

Berichte
aus dem
Institut für Meereskunde
an der
Christian-Albrechts-Universität Kiel
Nr. 1

Orthogonale Vektorfunktionen
zur stetigen Darstellung von meteorologischen
Feldern auf der Kugeloberfläche

von
Heinz Fechner

DOI 10.3289/IFM_BER_1

Kopien dieses Berichtes können angefordert werden von

Heinz Fechner
Institut für Meereskunde
Abt. Maritime Meteorologie

D 23 Kiel 1
Düsternbrooker Weg 22

ISSN 0341-8561

Summary

Orthogonal vector functions are developed from spherical harmonics and are used for the representation by series of continuous vector fields on the sphere. The orthogonal vector functions result from differentiation of the spherical harmonics and vice versa. A recursive algorithmic of the orthogonal vector functions are represented by arrows on the surface of the sphere. The formulas for the multiplication of the orthogonal series between two vectors and between vectors and scalars are treated extensively, especially in view of the calculation with an electronic computer. An iterative procedure for the division of the orthogonal series is specified. The first four rules of arithmetic, differentiation, and integration are reduced to operations with the coefficients of the series only.

For the representation on a single hemisphere fields are used which are reflected at the equator. Finally the equations of motion applicable to the large-scale circulation are written in such a form that only those arithmetic operations for the series of vector or scalar fields are used which have been introduced above.

Zusammenfassung

Aufbauend auf der Darstellung von skalaren Feldern auf der Kugeloberfläche durch Reihen von Kugelflächenfunktionen werden Orthogonale Vektorfunktionen auf der Kugeloberfläche entwickelt und zur Reihendarstellung von stetigen Vektorfeldern auf der Kugeloberfläche verwendet. Die Orthogonalen Vektorfunktionen entstehen durch Differentiation der Kugelflächenfunktionen und umgekehrt. Es wird eine rekursive Berechnungsmethode der Orthogonalen Vektorfunktionen dargestellt. Die ersten 26 Orthogonalen Vektorfunktionen werden durch Pfeilbilder auf der Kugeloberfläche veranschaulicht. Die Formeln für die Multiplikation der Orthogonalreihen sowohl zwischen Vektoren als auch zwischen Vektoren und Skalaren werden ausführlich behandelt, speziell im Hinblick auf die Berechnung mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen. Ein iteratives Verfahren zur Division der Orthogonalreihen wird ebenfalls angegeben. Alle Rechenoperationen der vier Grundrechenarten, der Differentiation und der Integration der Orthogonalreihen werden so auf Operationen mit den Koeffizienten der Reihenglieder zurückgeführt.

Zur Darstellung von Feldern auf einer Hemisphäre werden am Äquator gespiegelte Felder verwendet. Schließlich werden die Bewegungsgleichungen der großräumigen Zirkulation der Atmosphäre in einer solchen Form niedergeschrieben, daß darin nur die oben eingeführten Rechenoperationen für Reihen von Vektorfeldern und skalaren Feldern vorkommen und angewendet werden können.

Inhaltsverzeichnis	Seite
Summary	II
Zusammenfassung	III
Tabelle der verwendeten Symbole	1
1. Einleitung	6
2. Orthogonale Funktionen auf der Kugeloberfläche	7
3. Differentialquotienten und Vektoren auf der Kugeloberfläche	9
4. Die Orthogonalen Vektorfunktionen und ihre Differentialquotienten	13
5. Die Berechnung der Orthogonalen Vektorfunktionen	17
6. Vergleich der Orthogonalen Vektorfunktionen mit anderen spektralen Darstellungen von Vektoren	24
7. Multiplikation der Vektorfunktionen	28
8. Division durch einen Skalar	40
9. Darstellung der Bewegungsgleichungen	43
Literaturverzeichnis	45
Abbildungen der Vektorfunktionen	47
Danksagung	60

Tabelle der verwendeten Symbole

$A(x)$	$= \frac{(2x-1)!!}{x!}$
a	Parameter der Funktionen $F(a,b;e;1)$ und $W(a,b,c;d,e)$
B	Bodenreibungsfaktor
b	Parameter der Funktionen $F(a,b;e;1)$ und $W(a,b,c;d,e)$
c_k	Entwicklungskoeffizient von $Y_k(\phi, \lambda)$
c'_k	Entwicklungskoeffizient von $\mathcal{Y}'_k(\phi, \lambda)$
c_η	Entwicklungskoeffizient von $\mathcal{Y}_\eta(\phi, \lambda)$
c	Parameter der Funktion $W(a,b,c;d,e)$
$c_\eta(\phi, \lambda)$	variabler Entwicklungskoeffizient der $\mathcal{Y}_\eta(\phi, \lambda)$ für $\eta = 1, \dots, 6$
$c'_\eta(\phi, \lambda)$	ungenauer (fehlerhafter) $c_\eta(\phi, \lambda)$
D	Schranke < 1 für die Konvergenz bei der Division
d	Parameter der Funktion $W(a,b,c;d,e)$
div	zweidimensionaler Divergenzoperator
E	$= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$
e	Parameter der Funktionen $F(a,b;e;1)$ und $W(a,b,c;d,e)$; auch $e = 2,71828\dots$
$F(a,b;e;x)$	$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(e)_k k!} x^k$ hypergeometrische Reihe
f	Coriolisparameter
$f(\phi, \lambda)$	beliebige skalare Funktion auf der Kugeloberfläche der Erde
f_k	$= (k-\beta)/(-k-1-\beta)$ für β gerade, sonst 1

$G(n_1, n_2, n_3)$	der nur von den n_j abhängige Faktor des Tripelintegrals der $Q_{n_j}^{m_j, r_j}(z)$
$g(\phi, \lambda)$	skalare Divisorfunktion bei der Division
grad	zweidimensionaler Gradientoperator
H	Faktor der großturbulenten horizontalen Impulsdiffusion
$h(\phi, \lambda)$	Quotientenfunktion bei der Division
$h_j(\phi, \lambda)$	Glied einer Folge, die gegen $h(\phi, \lambda)$ konvergiert
h_n^m	$= \frac{(2n+1)(n+m)!}{n(n+1)(n-m)!}$ Normierungsfaktor für die Berechnung der $q_n(\phi, \lambda)$
J	$= \int_1^2 \int_2^3 \int_3^1$ Tripelintegral der reellen Orthogonalfunktionen, bei der Multiplikation von Orthogonalreihen
$i = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
j	= Index, der eine der drei Orthogonalfunktionen bei der Multiplikation kennzeichnet
K	maximaler Index von k oder n in einer Reihenentwicklung
k	Summationsindex von Reihen, speziell der komplexen Kugelflächenfunktionsreihe
L	$= n_1 + n_2 + n_3$
l	= Summationsindex der komplexen Orthogonalen Vektorfunktionen
M	= maximales m
m, m_j	zonale Wellenzahl
N	maximales n
n, n_j	Großkreiswellenzahl

$P_n^m(z)$	auf 1 normierte zugeordnete Legendre'sche Funktion
$P_{n-m}^{(m-r, m+r)}(z)$	Jacobi'sches Polynom
$p(z)$	allgemeine Funktion, die von dem Sinus der geographischen Breite ($z = \sin \phi$) abhängt
$P_n^m(z)$	zugeordnete Legendre'sche Funktion, mit der in der Mathematik üblichen Normierung
$Q_n^{m,r}(z)$	verallgemeinerte sphärische Funktion = Verallgemeinerung von $P_n^m(z)$
q	spezieller Index, der die Beziehung zwischen m_1, m_2 und m_3 charakterisiert
R	Erdradius
r	zweiter oberer Index von $Q_n^{m,r}(z)$, entscheidet darüber, ob man es mit Skalaren oder Vektoren zu tun hat
rot	zweidimensionaler Rotationsoperator, angewandt auf die dritte Komponente
rot_R	Vorticity-Operator
S	$= s_1 + s_2 + s_3$
s, s_j	Index zur Kennzeichnung von rotationsfrei ($s=0$) und divergenzfrei ($s=1$)
$T(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3)$	der von den m_j , aber nicht von den r_j abhängige Faktor des Tripelintegrals der $Q_n^{m,r}(z)$
t	die Zeitkomponente
$U_n^m(z)$	reelle Komponente des nur von z abhängenden Faktors $P_n^{m,s}(z)$ der Orthogonalen Vektorfunktion
$V_n^m(z)$	imaginäre Komponente des nur von z abhängigen Faktors $P_n^{m,s}(z)$ der Orthogonalen Vektorfunktion
u	Vektorkomponente in λ -Richtung
v	Vektorkomponente in ϕ -Richtung
$u_n^m(z)$	$\frac{1}{\sqrt{h_n^m}} U_n^m(z)$

$$v_n^m(z) = v_n^m(z) / \sqrt{h_n^m}$$

$$W(a,b,c;d,e) = \frac{(-d)!}{(e-1)!} \sum_{k=0}^{\min(-b,-c)} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k}{(d)_k (e)_k k!}$$

w_k Entwicklungskoeffizient der $Y_k(\phi, \lambda)$ für die Darstellung der $W(\phi, \lambda)$

$$x_j = \begin{cases} -m_j & \text{für } j = q \\ m_j & \text{für } j \neq q \end{cases}$$

x Parameter in $A(x)$ und $F(a,b;e;x)$

$Y_k(\phi, \lambda)$ komplexe Kugelflächenfunktion

$Y_\mu(\phi, \lambda)$ reelle Kugelflächenfunktion

$$z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$z = \sin \phi$$

$$P_n^{m,s}(z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} i v_n^m(z) \\ U_n^m(z) \end{pmatrix} & \text{für } s=0 \text{ bzw.} \\ \begin{pmatrix} U_n^m(z) \\ -i v_n^m(z) \end{pmatrix} & \text{für } s=1 \end{cases}$$

$$P_n^m(z) = \begin{pmatrix} u_n^m(z) \\ v_n^m(z) \end{pmatrix}$$

$W(\phi, \lambda)$ Vektorfeld auf der Kugeloberfläche

$W_N(\phi, \lambda)$ bis zur Großkreiswellenzahl N gefiltertes Vektorfeld

$W_0(\phi, \lambda)$ Vektorfeld auf der Kugeloberfläche

$Y_1(\phi, \lambda)$ 1-te komplexe Orthogonale Vektorfunktion

$Y_n(\phi, \lambda)$ n-te reelle Orthogonale Vektorfunktion

$Z_j(\phi, \lambda)$ komplexe Orthogonale Vektorfunktion für $\nu=1$ bzw. komplexe Kugelflächenfunktion für $\nu=0$

$Z_j(\phi, \lambda)$ reelle Orthogonale Vektorfunktion für $\nu=1$ bzw. reelle Kugelflächenfunktion für $\nu=0$

$$\alpha = \sqrt{g^2/\bar{g}} \text{ Iterationskonstante bei der Division}$$

$$\beta = [-b/2]$$

γ	=	$[-(b-1)/2]$	
Δ		Laplaceoperator auf der Kugeloberfläche	
Δ	=	grad div - rot rot _R vektorieller Laplace-Operator	
$\delta_{j,k}$	$\stackrel{=}{{\begin{matrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \end{matrix}}}$	$\begin{cases} 0 \text{ für } k \neq j \\ 1 \text{ für } k=j \end{cases}$	Kroneckersymbol
ε_m	$\stackrel{=}{{\begin{matrix} 1 \\ \cdot \\ 2 \end{matrix}}}$	$\begin{cases} 1 \text{ für } m=0 \\ 2 \text{ für } m>0 \end{cases}$	
n		Index der reellen Orthogonalen Vektorfunktion	
κ		Index, der entscheidet, ob das Zeichen o eine skalare (bei $\kappa=0$) oder vektorielle ($\kappa=1$) Multiplikation darstellt	
λ		geographische Länge	
μ		Summationsindex der reellen Kugelflächenfunktionen, im Einzelfall auch der komplexen Orthogonalfunktionen	
ν		Index, der entscheidet, ob $\mathfrak{f}(\phi, \lambda)$ bzw. $\mathfrak{z}(\phi, \lambda)$ ein Skalar ($\nu=0$) oder ein Vektor ($\nu=1$) ist.	
σ		Index zur Unterscheidung von verschiedenen reellen Orthogonalfunktionen mit gleichem n, m und s . $\sigma=0$ entsteht aus dem Realteil und $\sigma=1$ aus dem Imaginärteil der komplexen Funktionen	
ϕ		Geopotentialfeld	
ϕ		geographische Breite	
$\chi(\phi, \lambda)$		beliebiges skalares Feld auf der Erdoberfläche	
$\Psi(\phi, \lambda)$		beliebiges skalares Feld auf der Erdoberfläche	
$\bar{\Psi}$		Mittelwert von $\Psi(\phi, \lambda)$ über die Kugeloberfläche der Erde	
Y^*		Übergang zum konjugiert komplexen Wert von Y	
o		skalare oder vektorielle Multiplikation, je nach dem, ob $\kappa=0$ oder 1 ist	

1. Einleitung

Sowohl bei diagnostischen Untersuchungen globaler oder hemisphärischer atmosphärischer Felder als auch bei Modell- oder Vorhersagerechnungen, die die ganze oder die halbe Erde umfassen, werden manchmal anstelle von Gitterpunktwerten auch Reihen orthogonaler Funktionen zur Darstellung der Felder verwandt. Das ist die sogenannte spektrale Darstellung. Beispiele dafür sind die Arbeiten von Kubota [1], Eliassen und Machenhauer [2] und Eliassen, Machenhauer und Rasmussen [3].

Für die spektrale Darstellung von skalaren Daten auf der Kugeloberfläche sind die von diesen und anderen Autoren verwendeten Kugelflächenfunktionen deshalb besonders gut geeignet, weil sie überall auf der Kugel stetig und eindeutig sind. Eine gute und knappe Einführung in ihren Gebrauch findet man bei Platzman [7]. Entsprechende Entwicklungen für die Windkomponenten oder die Komponenten anderer vektorieller Größen lassen sich nicht oder nur mit Einschränkungen durchführen, weil die Windkomponenten in λ - bzw. ϕ -Richtung - auch bei einem stetigen Windfeld über dem Polargebiet - am Pol unstetig sind. Aus diesem Grunde wurde bisher auf eine globale spektrale Darstellung des Windfeldes verzichtet oder es wurde angenommen, daß der Wind in Polnähe verschwindet. Eine Diskussion mit der von Robert [8] angewendeten Methode, statt der Komponenten ihre mit dem Kosinus der geographischen Breite multiplizierten Werte zu entwickeln, erfolgt im Abschnitt Nr. 6.

Alle diese Schwierigkeiten und Vernachlässigungen lassen sich vermeiden, falls man das Horizontalwindfeld oder andere globale Vektorfelder durch eine Reihe von orthogonalen Vektorfunktionen darstellt, die auf der Kugeloberfläche stetig sind. Wesentliche Überlegungen in dieser Richtung findet man bei Efimov [4], der verallgemeinerte sphärische Funktionen verwendet, um die Windkomponenten darzustellen. Durch geeignete Kombination dieser Funktionen zu den Komponenten von Vektoren erhält man die weiter unten dargelegten Orthogonalen Vektorfunktionen.

Mit dieser Arbeit soll das vektorielle Analogon zu den Kugelflächenfunktionen und die engen Beziehungen zwischen diesen beiden Funktionenfamilien in einer übersichtlichen Art und Weise dargestellt werden. Dabei sollen die Darstellungen in der Vertikalen und in der Zeit hier unberücksichtigt bleiben.

2. Orthogonale Funktionen auf der Kugeloberfläche.

Ein Punkt auf der Erdoberfläche soll, wie üblich, durch seine geographischen Breiten- und Längenkoordinaten ϕ und λ dargestellt werden. Ist $f(\phi, \lambda)$ ein globales meteorologisches Feld, so soll die Mittelung über die Oberfläche der Erde durch einen Querstrich unter Weglassung der Koordinaten ausgedrückt werden:

$$\bar{f} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(\phi, \lambda) R^2 \cos \phi \, d\phi \, d\lambda,$$

darin ist R der Erdradius.

Betrachtet man zonale Mittelwerte:

$$p(\sin \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi, \lambda) d\lambda,$$

so reduziert sich das Mittelungsgebiet auf die Projektion $z = \sin \phi$ der geographischen Breite auf die Erdachse zwischen den beiden Polen $-1 \leq z \leq +1$, also

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p(z) dz.$$

Sei nun $\psi(\phi, \lambda)$ ein skalares Feld, z.B. das der Stromfunktion, so stellt

$$\psi(\phi, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k Y_k(\phi, \lambda)$$

eine Entwicklung von $\psi(\phi, \lambda)$ nach den als bekannt vorausgesetzten Funktionen $Y_k(\phi, \lambda)$ dar. Sind die $Y_k(\phi, \lambda)$ linear unabhängig oder sogar orthonormal, das heißt, erfüllen sie die folgende Bedingung:

$$\overline{Y_k Y_j^*} = \delta_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j \\ 1 & \text{für } k = j \end{cases} \quad (1),$$

so wird das Feld $\psi(\phi, \lambda)$ eindeutig durch die Koeffizienten C_1, C_2, \dots dargestellt. Vergleiche dazu z.B. Tricomi [11]. Der Stern in (1) soll den Übergang zum konjugiert-komplexen Wert andeuten. Nach der Theorie der orthogonalen Funktionen erhält man die Koeffizienten C_k , falls die Orthonormalrelation (1) gilt, durch Integration des Produkts aus dem gegebenen meteorologischen Feld mit der k-ten Orthogonalfunktion über die Kugeloberfläche:

$$C_k = \overline{\psi Y_k^*} \quad (2).$$

Sollen die Wellenzahlen n der $Y_k(\phi, \lambda)$ längs eines Großkreises mit wachsendem k monoton nicht abnehmen, so sind die $Y_k(\phi, \lambda)$ Kugelflächenfunktionen mit

$$k = n^2 + n + m + 1 \quad (3),$$

dabei läuft die zonale Wellenzahl m von $-n$ bis $+n$. Man erhält

$$Y_k(\phi, \lambda) = P_n^m(\sin \phi) \cdot e^{im\lambda} \quad (4).$$

Dabei sind die $P_n^m(z)$ die zugeordneten Legendre'schen Funktionen mit der Normierung $\overline{(P_n^m)^2} = 1$.

3. Differentialquotienten und Vektoren auf der Kugeloberfläche

Jetzt sollen die mathematischen Ableitungen von $\psi(\phi, \lambda)$ untersucht werden. Da es sich um Funktionen von zwei räumlichen Variablen handelt, gibt es zu jeder Richtung auf der Kugeloberfläche eine lineare Ableitung. Richtungsunabhängiger Differentialoperator ist der Gradient, ein Vektor, der in die Richtung des stärksten Anstiegs weist. Alle übrigen Richtungsableitungen kann man durch skalare Multiplikation mit dem Gradienten erhalten. Es gilt

$$\text{grad } \psi(\phi, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial \psi(\phi, \lambda)}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \psi(\phi, \lambda)}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (5).$$

Dabei stellt die obere Komponente den Faktor eines Einvektors in λ -Richtung (= übliche u -Komponente) und die untere (v -Komponente) den Faktor des Einvektors in ϕ -Richtung dar. Der Vektor gleicher Länge, der senkrecht auf dem Gradienten steht, soll als Rotation bezeichnet werden, weil

sein Feld in der Nähe eines Maximums von $\psi(\phi, \lambda)$ eine Zirkulationsströmung oder Rotation entgegen dem Uhrzeigersinn darstellt:

$$\text{rot } \psi(\phi, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi(\phi, \lambda)}{\partial \phi} \\ \frac{-1}{R \cos \phi} \frac{\partial \psi(\phi, \lambda)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \quad (6).$$

Die korrekte Schreibweise für Formel (6) wäre:

$$\text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(\phi, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \psi(\phi, \lambda)}{\partial \phi} \\ \frac{-1}{R \cos \phi} \cdot \frac{\partial \psi(\phi, \lambda)}{\partial \lambda} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Da die zwei Nullen links und die eine Null rechts in dem System für die Kugeloberfläche immer auftreten, werden sie hier weggelassen.

Wendet man die durch (5) und (6) definierten Differentiationsoperatoren auf die Kugelflächenfunktionen $Y_k(\phi, \lambda)$ an, so erhält man - bis auf eine Normierungskonstante - Orthogonale Vektorfunktionen $\mathcal{Y}_1(\phi, \lambda)$, durch die man - in Analogie zu der oben geschilderten Darstellung von skalaren Funktionen $\psi(\phi, \lambda)$ - vorgegebene Vektorfunktionen

$$\mathcal{W}(\phi, \lambda) = \begin{pmatrix} u(\phi, \lambda) \\ v(\phi, \lambda) \end{pmatrix}$$

durch eine Reihe darstellen kann:

$$\mathcal{W}(\phi, \lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \mathcal{Y}_l(\phi, \lambda) \quad (7).$$

Darin sind die c_l skalare Zahlen und die $\mathcal{Y}_l(\phi, \lambda)$ fest vorgegebene horizontale Vektorfunktionen, die analog zu (1) die

Orthonormalitätsrelation

$$\overline{g_k \cdot g_l^*} = \delta_{k,l} \quad (8)$$

erfüllen. Dabei ist zwischen den beiden Vektoren des inneren oder skalare Produkt zu bilden, das wie üblich definiert ist. Außerdem sollen mit dem \times -Zeichen zwei Pseudovektorprodukte definiert werden: Steht dies Zeichen zwischen zwei Vektoren, so ist das Ergebnis ein Skalar:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 ,$$

In der üblichen Schreibweise würde diese Formel so aussehen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} .$$

Steht das \times -Zeichen zwischen einem Skalar χ und einem Vektor, so ist das Ergebnis ein Vektor:

$$\chi \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \times \chi = \begin{pmatrix} -\chi v \\ \chi u \end{pmatrix} .$$

Dem entspricht im dreidimensionalen Raum

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi v \\ \chi u \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Doch werden die Nullen, weil sie immer auftreten, hier stets weggelassen. Auf unsere zweidimensionalen Vektoren lassen sich nun auch genau zwei voneinander unabhängige Differentiationsoperatoren erster Ordnung anwenden, die stets skalare Funktionen als Ergebnis haben. Das ist einmal der zweidimensionale Divergenzoperator:

$$\operatorname{div} \mathcal{W}(\varphi, \lambda) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} u(\varphi, \lambda) \\ v(\varphi, \lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{R \cos \varphi} \cdot \frac{\partial u(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{1}{R \cos \varphi} \cdot \frac{\partial (\cos \varphi \cdot v(\varphi, \lambda))}{\partial \varphi} \quad (9)$$

und die Radialkomponente des Rotationsoperators, im allgemeinen als Vorticity bezeichnet,

$$\operatorname{rot}_R \mathcal{W}(\varphi, \lambda) = \operatorname{rot}_R \begin{pmatrix} u(\varphi, \lambda) \\ v(\varphi, \lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial v(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda} - \frac{1}{R \cos \varphi} \cdot \frac{\partial (\cos \varphi \cdot u(\varphi, \lambda))}{\partial \varphi} \quad (10)$$

Durch geeignete Hintereinanderausführung von je zwei der vier Operatoren (5), (6), (9) und (10) erhält man zwei Laplaceoperatoren: Der übliche Laplace-Operator mit der Definition

$$\Delta \Psi(\varphi, \lambda) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi(\varphi, \lambda) = - \operatorname{rot}_R \operatorname{rot} \Psi(\varphi, \lambda)$$

wird auf Skalare angewandt und liefert wieder einen Skalar. In der oben angegebenen Formel stehen tatsächlich zwei Gleichheitszeichen. Ausgeschrieben erhält man dafür

$$\Delta \Psi(\varphi, \lambda) = \frac{1}{R^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{R^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \cdot \frac{\partial \Psi(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi} \right)$$

Der (vektorielle) Laplace-Operator wird auf Vektoren angewandt und liefert einen Vektor:

$$\Delta \mathcal{W}(\varphi, \lambda) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathcal{W}(\varphi, \lambda) - \operatorname{rot} \operatorname{rot}_R \mathcal{W}(\varphi, \lambda) \quad (11)$$

Hier steht vor $\operatorname{rot} \operatorname{rot}_R$ im Gegensatz zu der Formel für den skalaren Laplace-Operator ein Minuszeichen.

In ausgeschriebener Form stellt er sich so dar:

$$\Delta \mathcal{W}(\varphi, \lambda) = \frac{1}{R^2 \cos^2 \varphi} \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{W}(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda^2} + 2 \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} -v(\varphi, \lambda) \\ u(\varphi, \lambda) \end{pmatrix} + \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \mathcal{W}(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi} \right) - \mathcal{W}(\varphi, \lambda) \right\} \quad (12)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind Eigenfunktionen des skalaren Laplace-Operators:

$$\Delta Y_k(\varphi, \lambda) = - \frac{n(n+1)}{R^2} Y_k(\varphi, \lambda) \quad (13)$$

mit den Eigenwerten $-\frac{n(n+1)}{R^2}$, wobei die maximale Großkreiswellenzahl n mit k durch die Beziehung (3) verbunden ist. Analog zu (13) werden

die Orthogonalen Vektorfunktionen durch die Eigenwertgleichung

$$\Delta \mathcal{Y}_1(\varphi, \lambda) = - \frac{n(n+1)}{R^2} \mathcal{Y}_1(\varphi, \lambda) \quad (14)$$

definiert.

Jetzt sind h und l analog zu Formel (3) durch die Beziehung

$$l = 2n^2 + 2n + 2m - s$$

$$\text{mit } s = 0, 1 \text{ und } m = -n, \dots, 0, \dots, +n \quad (15)$$

gekoppelt, da es im allgemeinen zu jedem n doppelt so viel Vektorfunktionen wie Kugelflächenfunktionen gibt, je eine aus dem Gradienten mit $s=0$ und die zweite aus der Rotation der Kugelflächenfunktion mit $s=1$.

4. Die Orthogonalen Vektorfunktionen und ihre Differentialquotienten

Da die zweiten Ableitungen der beiden orthogonalen Funktionenfamilien bis auf das Vorzeichen den Eigenwert $\frac{n(n+1)}{R^2}$ liefern, ist zu vermuten, daß bei den ersten Ableitungen sowohl der Kugelflächenfunktionen als auch der Orthogonalen Vektorfunktionen die Wurzel aus diesem Eigenwert als Faktor auftritt. Tatsächlich ergeben sich folgende Formeln für die ersten Ableitungen:

$$\text{grad } Y_k(\varphi, \lambda) = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{R} \mathcal{Y}_{2k}(\varphi, \lambda) \quad (16),$$

$$\text{rot } Y_k(\varphi, \lambda) = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{R} \mathcal{Y}_{2k-1}(\varphi, \lambda) \quad (17)$$

und

$$\text{div } \mathcal{Y}_{2k}(\varphi, \lambda) = - \frac{\sqrt{n(n+1)}}{R} Y_k(\varphi, \lambda) \quad (18),$$

$$\text{rot}_R \mathcal{Y}_{2k}(\varphi, \lambda) = 0 \quad (19),$$

$$\text{rot}_R \mathcal{Y}_{2k-1}(\varphi, \lambda) = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{R} Y_k(\varphi, \lambda) \quad (20),$$

$$\text{div } \mathcal{Y}_{2k-1}(\varphi, \lambda) = 0 \quad (21).$$

Die Formeln (19) und (21) erhält man aus den bekannten Beziehungen der Vektoranalysis $\text{rot grad } \Psi = 0$ und $\text{div rot } \mathcal{W} = 0$; für das Verhältnis zwischen n und k gilt Formel (3). Die durch (8) postulierte Orthogonalität der durch (16) und (17) definierten Vektorfunktionen ist nun leicht zu beweisen. Zunächst sieht man, daß diese Funktionen tatsächlich die Eigenwertgleichung (14) mit dem Laplace-Operator (11) erfüllen. Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten, also zu verschiedenen Werten von n gehören, sind nach einem bekannten Satz stets orthogonal. Eigenvektoren mit verschiedenem s und gleichem n und m haben nach Formel (15) in (16) und (17) das gleiche k , entstehen also durch die Operationen von grad und rot aus der gleichen skalaren Funktion $Y_k(\varphi, \lambda)$. Dann müssen sie aber nach der Definition der Operatoren grad und rot durch (5) und (6) orthogonal zueinander sein. Daß auch Vektoren mit verschiedenen Werten für m stets orthogonal sind, wird sich weiter unten bei der expliziten Darstellung der orthogonalen Vektorfunktionen ergeben (Formel 22).

Analog zu der Formel (2) für die Kugelflächenfunktionen lassen sich die Entwicklungskoeffizienten c_1 nach orthogonalen Vektorfunktionen in der Reihe (7) durch das Integral $c_1 = \overline{\mathcal{W} \cdot \mathcal{W}_1^*}$ berechnen. Bei der ausführlichen Darstellung der $\mathcal{W}_1(\varphi, \lambda)$, die jetzt in Angriff genommen werden soll, wird analog zu (4) zunächst der von der geographischen Länge λ abhängige Teil abgespalten:

$$\mathcal{W}_1(\varphi, \lambda) = \mathcal{P}_n^{m,s}(\sin \varphi) \cdot e^{im\lambda} \quad (22).$$

Die Komponenten der Vektoren $\mathcal{P}_n^{m,s}(z)$ lassen sich durch zwei von n, m und z abhängige reelle skalare Funktionen $U_n^m(z)$ und $V_n^m(z)$ wie folgt darstellen:

$$\mathcal{P}_n^{m,0}(z) = \begin{pmatrix} i V_n^m(z) \\ U_n^m(z) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_n^{m,1}(z) = \begin{pmatrix} U_n^m(z) \\ -i V_n^m(z) \end{pmatrix} \quad (23),$$

dabei gilt für die Beziehung zwischen l , n , m und s Formel (15); für z ist $\sin \phi$ einzusetzen. Für die Komponenten erhält man aus der Definition (16) oder (17) in Verbindung mit (5) und (6) unter Berücksichtigung von (4):

$$U_n^m(z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{d P_n^m(z)}{dz} \quad (24)$$

und

$$V_n^m(z) = \frac{m}{\sqrt{n(n+1)}\sqrt{1-z^2}} P_n^m(z) \quad (25)$$

Weitere Formeln zur Berechnung der Orthogonalen Vektorfunktionen folgen im nächsten Abschnitt. Doch nun zurück zu den Orthogonalen Vektorfunktionen selbst und zu ihren speziellen Eigenschaften. Aus Formel (19) erkennt man, daß die $\mathcal{Y}_{2k}(\varphi, \lambda)$, also die Funktionen mit geradem Index rotationsfrei sind und ein divergentes Feld darstellen. Formel (16) zeigt, daß $-\frac{R}{\sqrt{n(n+1)}} y_n^m(\varphi, \lambda)$ die zugehörige Potentialfunktion ist. Aus Formel (21) ergibt sich, daß die Vektorfunktionen mit ungeradem Index, also die Funktionen $\mathcal{Y}_{2k-1}(\varphi, \lambda)$ ein divergenzfreies und rotationelles Feld darstellen. Nach Formel (17) stellt $\frac{R}{\sqrt{n(n+1)}} y_n^m(\varphi, \lambda)$ die zugehörige Stromfunktion dar.

Betrachtet man das durch die Kugelflächenfunktionen und durch die Orthogonalen Vektorfunktionen dargestellte System von Skalaren und Vektoren auf der Kugeloberfläche, sowie die von mir als allein sinnvoll angegebenen Differentialoperatoren, so stellt man fest, daß alle diese Funktionen beliebig oft differenzierbar sind. Selbstverständlich sind sie dann auch stetig. Die Differentiation führt nicht aus dem System heraus, Eine einfache Ableitung bedeutet eine Transformation von einem Skalar zu

einem Vektor oder umgekehrt. Bei der Differentiation bleiben die Wellenzahlen n und m stets erhalten. Aus der Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen folgt die Vollständigkeit der Orthogonalen Vektorfunktionen. Das bedeutet, jede stetige Vektorfunktion $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$ läßt sich durch die in (7) rechts stehende Reihe der Orthogonalen Vektorfunktionen bereits mit endlich vielen Gliedern beliebig genau approximieren. Übrigens hat jedes stetige Vektorfeld $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$ stets mindestens zwei Nullstellen, und es existiert keine Vektorfunktion der Wellenzahl $n=0$, also keine konstante Vektorfunktion. Die Vektorfunktionen der Wellenzahl $n=1$ stellen starre Bewegungen im dreidimensionalen Raum dar. Es gibt sechs derartige Orthogonale Funktionen. Die entsprechenden reellen Funktionen $\eta_1(\varphi, \lambda), \dots, \eta_6(\varphi, \lambda)$ sind auf den Abbildungen 1 bis 6 dargestellt. Der nullte Meridian, also $\lambda=0$, ist dabei eine Senkrechte durch die Mitte des Bildes. Die drei divergenten rotationsfreien Funktionen mit geraden Indices ($s=0$) stellen die Komponenten parallel zur Kugeloberfläche einer starren Bewegung im dreidimensionalen Raum in den drei zueinander senkrechten Richtungen des Raumes dar. Die drei divergenzfreien, rotationellen Funktionen mit ungeraden Indices stellen starre Drehungen um die drei räumlichen Achsen dar. Auf den Abbildungen 7 bis 26 sind einige Felder mit höheren Wellenzahlen dargestellt. Auf die Bedeutung des Wertes für σ , der auf den Abbildungen angegeben ist, kann erst im nächsten Abschnitt bei der Behandlung der reellen Funktionen $\eta_\eta(\varphi, \lambda)$ eingegangen werden; vergleiche dazu die Formel (36), die die Beziehung zwischen η einerseits und n, m, s und σ andererseits herstellt. Die Abbinungsnummer hat den gleichen Wert wie η .

Wenn man sich überlegen will, welche anschauliche Bedeutung die Wellenzahlen n und m haben, so muß man zunächst ihre Bedeutung bei den Kugelflächenfunktionen untersuchen; Legt man einen Großkreis durch den größten und den kleinsten Wert, so stellt n die Wellenzahl auf diesem Kreis dar; es gibt also $2n$ Extremwerte auf diesem Kreis. An diesen Extremwerten verschwinden aber sowohl der Gradient als auch die Rotation der Kugelflächenfunktionen. Daher haben die so gebildeten Orthogonalen Vektorfunktionen dort Nullstellen, also $2n$ Stück auf diesem Großkreis; und es gibt keinen Großkreis, auf dem mehr liegen. Beim Durchgang durch die Nullstelle, dreht sich der Vektor um 180° . Ganz entsprechend gibt es Breitenkreise mit $2m$ Nullstellen, aber keine mit einer größeren Anzahl. Diese Eigenschaften kann man an den Abbildungen 1 bis 26 nachprüfen.

5. Die Berechnung der Orthogonalen Vektorfunktionen

Da man im allgemeinen alle aufeinander folgenden Vektorfunktionen bis zu einer bestimmten maximalen Wellenzahl $n=N$ benötigt, ist es zweckmäßig, die Berechnung rekursiv vorzunehmen. Dabei wurde der Normierungsfaktor $\sqrt{h_n^m}$ gesondert berechnet, um in den Rekursionsformeln nicht mehrfach Quadratwurzeln ziehen zu müssen. Schließlich fand die Rechnung, wie auch die praktischen Anwendungen, im Reellen statt. Die rekursive Berechnung des λ -abhängigen Teils im Reellen erfordert die Ermittlung von $\cos m\lambda$ und $\sin m\lambda$. Sie wurde nach der Fourier-Analysenmethode von Ralston und Wilf [6] mit Hilfe der Additionstheoreme durchgeführt:

$$\begin{aligned}\cos (m+1)\lambda &= \cos m\lambda \cdot \cos \lambda - \sin m\lambda \cdot \sin \lambda \\ \sin (m+1)\lambda &= \sin m\lambda \cdot \cos \lambda + \cos m\lambda \cdot \sin \lambda.\end{aligned}$$

Für die Berechnung des φ - oder z -abhängigen Teils ($z = \sin \varphi$), wird ein rational normierter Vektor $\mathcal{P}_n^m(z)$ definiert mit den Komponenten

$$\begin{aligned} u_n^m(z) &= U_n^m(z) / \sqrt{h_n^m} \\ v_n^m(z) &= V_n^m(z) / \sqrt{h_n^m}. \end{aligned} \tag{26}$$

Sind $p_n^m(z)$ die zugeordneten Legendre'schen Funktionen mit der in der Mathematik üblichen Normierung, wie sie z.B. bei Magnus und Oberhettinger [6] angewendet wird, also

$$P_n^m(z) = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} p_n^m(z),$$

so erhält man aus (24)

$$U_n^m(z) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{n(n+1)(n+m)!}} \sqrt{1-z^2} \frac{d p_n^m(z)}{dz}.$$

Um die Wurzel loszuwerden, setzt man

$$h_n^m = \frac{(2n+1)(n+m)!}{n(n+1)(n-m)!} \tag{27}.$$

dann folgt aus (24) und (26) bzw. (25) und (27)

$$u_n^m(z) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sqrt{1-z^2} \frac{d p_n^m(z)}{dz} \tag{28},$$

$$v_n^m(z) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot \frac{m}{\sqrt{1-z^2}} p_n^m(z) \tag{29}.$$

Unter Verwendung der Formel

$$(1-z^2) \frac{d p_n^m(z)}{dz} = z \cdot p_n^m(z) + (n+m) p_{n-1}^m(z) - (n-m+1) p_{n+1}^m(z)$$

für die Legendre'schen Funktionen $p_n^m(z)$, die man z.B. bei Magnus und Oberhettinger [6] auf S. 171 findet, erhält man aus (28) in Verbindung mit (29) die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} (n+m)(n-1)^2 v_n^m(z) &= \\ &= (2n-1) \left\{ n(n-1) \cdot z \cdot v_{n-1}^m(z) + m u_{n-1}^m(z) \right\} - n^2 (n-m-1) v_{n-2}^m(z). \end{aligned}$$

Für $u_n^m(z)$ erhält man eine ganz analoge Formel, die man mit der ersteren zu der Vektorrekursionsformel

$$p_n^m(z) = \frac{(2n-1) \left\{ n(n-1) \cdot z p_{n-1}^m(z) + m \widetilde{p}_{n-1}^m(z) \right\} - n^2(n-m-1) p_{n-2}^m(z)}{(n+m)(n-1)^2}$$

mit $\widetilde{p}_n^m(z) = \begin{pmatrix} v_n^m(z) \\ u_n^m(z) \end{pmatrix}$ für $n = m+1, m+2, \dots, N$

zusammenfassen kann. Zur Rekursion über $m=n=2, 3, \dots, N$ wurde

die Formel $p_m^m(z) = - \frac{\sqrt{1-z^2}}{2(m-1)} p_{m-1}^{m-1}(z)$

mit den Anfangswerten $p_1^0(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $p_1^1(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$

verwendet. Die Anfangswerte des Normierungsfaktors

h_n^m sind $h_1^0 = \frac{3}{2}$ und $h_1^1 = 3$

und seine Rekursionsformeln

$$h_m^m = \frac{2m(2m+1)(m-1)}{m+1} h_{m-1}^{m-1} \quad \text{für } m=n=2, 3, \dots, N,$$

sowie $h_n^m = \frac{(2n+1)(n-1)(n+m)}{(2n-1)(n+1)(n-m)} h_{n-1}^m$ für $n=m+1, m+2, \dots, N$.

Hat man die $p_n^m(z)$ und die h_n^m rekursiv berechnet, so lassen sich die $p_n^{m,s}(z)$ nach (26) bzw. (27) mit einer Wurzelziehung ermitteln.

Die Orthogonalen Vektorfunktionen lassen sich auch mit Hilfe von hypergeometrischen Reihen $F(a, b; c; x)$ darstellen:

$$p_n^{m,1}(z) = \sqrt{h_n^m} \left(\frac{1-z^2}{4} \right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(-1)^{m-1}}{2^{(m-1)!}} \left(F(m-n-1, n+m; m; \frac{1-z}{2}) - i \cdot F(m-n, n+m+1; m+1; \frac{1-z}{2}) \right).$$

Eine weitere Darstellung, die später für die Berechnung der Produkte von Vektorfunktionen verwendet wird, ist

$$u_n^m(z) = -\frac{1}{2} \left\{ Q_n^{m,1}(z) - Q_n^{m,-1}(z) \right\}$$

und

$$v_n^m(z) = \frac{1}{2} \left\{ Q_n^{m,1}(z) + Q_n^{m,-1}(z) \right\}.$$

Darin sind die $Q_n^{m,r}(z)$ diejenigen Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \left\{ (1-z^2) \frac{d Q_n^{m,r}(z)}{dz} \right\} + \left\{ n(n+1) \frac{-m^2 + 2mrz + r^2}{1-z^2} \right\} Q_n^{m,r}(z) = 0 \quad (31),$$

die im abgeschlossenen Intervall $-1 \leq z \leq +1$ stetig sind und auf 1 normiert wurden:

$$\overline{[Q_n^{m,r}]^2} = 1.$$

Die Gleichung (31) erhält man aus der vektoriellen Laplace-Gleichung (14) für die $Y_k(\vartheta, \lambda)$ unter Verwendung des Laplace-Operators (12). Bei der Ableitung der Gleichung (31) hat man außerdem die Formeln (22), (23) und (30) zu berücksichtigen. Die $Q_n^{m,r}(z)$ sind die verallgemeinerten sphärischen Funktionen bei Efimov [3], denn für $r=0$ gehen sie in die $P_n^m(z)$ über:

$$Q_n^{m,0}(z) = Q_n^{0,m}(z) = P_n^m(z) \quad (32),$$

da für $r=0$ die Differentialgleichung (31) sich auf die Legendresche Differentialgleichung reduziert, wie man sie z.B. bei Magnus und Oberhettinger [6] auf Seite 151 findet. Die Differentialgleichung (31) gehört der Fuchs'schen Klasse an (Bieberbach [14], S. 182 ff.) mit den singulären Stellen bei $z=-1, +1$ und ∞ und den Wurzeln der determinierenden Gleichungen: $-\frac{m+r}{2}, \frac{m+r}{2}, \frac{m-r}{2}, -\frac{m-r}{2}, n+1, -n$.

Daraus erhält man folgende Darstellung durch hypergeometrische Funktionen:

$$Q_n^{m,r}(z) = \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{(n-r)!(n+m)!}{(n+r)!(n-m)!}} \left(\frac{1-z}{2}\right)^{\frac{m-r}{2}} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{m+r}{2}} \cdot \frac{(-1)^m}{(m-r)!} F(-n+m, n+m+1; m-r+1; \frac{1-z}{2}) \quad (33).$$

Für $0 \leq m \leq n$ stellt die hypergeometrische Reihe auf der rechten Seite von (33) ein Polynom der Ordnung $n-m$ in $\frac{1-z}{2}$ dar, das mit geeigneter Normierung Jacobisches Polynom $P_{n-m}^{(m-r, m+r)}(z)$ genannt wird. Man erhält damit

$$Q_n^{m,r}(z) = (-1)^m \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{(n-m)!(n+m)!}{(n-r)!(n+r)!}} \left(\frac{1-z}{2}\right)^{\frac{m-r}{2}} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{m+r}{2}} \cdot P_{n-m}^{(m-r, m+r)}(z) \quad (34).$$

Die $P_{n-m}^{(m-r, m+r)}(z)$ sind im Intervall $-1 \leq z \leq 1$ orthogonal mit den Gewichtsfunktionen $(1-z)^{m-r} (1+z)^{m+r}$; den Beweis dafür findet man z.B. bei Tricomi [11]. Daraus folgt die Orthogonalität der $Q_n^{m,r}(z)$

$$\overline{Q_{n_1}^{m,r} Q_{n_2}^{m,r}} = \delta_{n_1, n_2}.$$

Spezielle Werte der $Q_n^{m,r}(z)$ sind:

$$\begin{aligned} Q_n^{m,r}(z) &= 0 \text{ für } |m| > n \text{ oder } |r| > n, \\ Q_n^{m,-r}(z) &= (-1)^{n+m} Q_n^{m,r}(-z); \quad Q_n^{-m,-r}(z) = (-1)^{m+r} Q_n^{m,r}(z); \quad (35) \\ Q_0^{0,0}(z) &= 1; \quad Q_1^{0,0}(z) = \sqrt{3}z; \quad Q_2^{0,0}(z) = \frac{1}{2} \sqrt{5} (3z^2 - 1); \\ Q_1^{1,0}(z) &= -\frac{1}{2} \sqrt{6} \sqrt{1-z^2}; \quad Q_1^{1,1}(z) = -\frac{1}{2} \sqrt{3} (1+z); \quad Q_1^{1,-1}(z) = -\frac{1}{2} \sqrt{3} (1-z). \end{aligned}$$

Spezielle Werte von $U_n^m(z)$ und $V_n^m(z)$ sind:

$$\begin{aligned} U_1^1(z) &= \frac{1}{2} \sqrt{3} z; \quad U_1^0(z) = \frac{1}{2} \sqrt{6} \sqrt{1-z^2}; \quad U_2^2(z) = -\frac{1}{2} \sqrt{5} z \sqrt{1-z^2}; \\ V_1^1(z) &= -\frac{1}{2} \sqrt{3}; \quad V_1^0(z) = 0; \quad V_2^2(z) = \frac{1}{2} \sqrt{5} \sqrt{1-z^2}. \end{aligned}$$

Bei den praktischen Anwendungen muß man statt der komplexen Vektorfunktionen $Y_k(\varphi, \lambda)$ reelle Orthogonale Vektorfunktionen $y_k(\varphi, \lambda)$ verwenden. Bei den letzteren gibt es keine negativen Werte für die zonale Wellenzahl m , aber dafür bei $m \neq 0$ zwei

divergenzfreie und zwei rotationsfreie Vektorfunktionen. Diese maximal vier verschiedenen Funktionen bei gleichem n und m werden durch die Indices s und σ unterschieden. Zwischen dem fortlaufenden Index η und diesen Zahlen sowie den Wellenzahlen n und m besteht die Beziehung

$$\eta = 2n^2 + 4m - 2\sigma - s \quad (36)$$

mit $0 \leq m \leq n$; $s=0,1$ und $\sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } m=0 \\ 0,1 & \text{für } m > 0. \end{cases}$

Man erhält für die vier Fälle folgende Darstellung von $ig_\eta(\varphi, \lambda)$:

$$ig_\eta(\varphi, \lambda) = \sqrt{\varepsilon_m} \begin{pmatrix} -V_n^m(z) \sin m\lambda \\ U_n^m(z) \cos m\lambda \end{pmatrix} \quad \text{für } s=0 \text{ und } \sigma=0;$$

$$ig_\eta(\varphi, \lambda) = \sqrt{\varepsilon_m} \begin{pmatrix} U_n^m(z) \cos m\lambda \\ V_n^m(z) \sin m\lambda \end{pmatrix} \quad \text{für } s=1 \text{ und } \sigma=0;$$

$$ig_\eta(\varphi, \lambda) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} V_n^m(z) \cos m\lambda \\ U_n^m(z) \sin m\lambda \end{pmatrix} \quad \text{für } s=0 \text{ und } \sigma=1$$

und

$$ig_\eta(\varphi, \lambda) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} U_n^m(z) \sin m\lambda \\ -V_n^m(z) \cos m\lambda \end{pmatrix} \quad \text{für } s=1 \text{ und } \sigma=1.$$

mit $\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{für } m=0 \\ 2 & \text{für } m>0 \end{cases}$ und $z = \sin \varphi$.

Die ersten beiden Funktionen stellen jeweils den Realteil und die letzten beiden den positiven Imaginärteil der mit $\sqrt{\varepsilon_m}$ multiplizierten Funktion $ig_k(\varphi, \lambda)$ dar. Vergleiche dazu Formel (49)!

Im einzelnen gilt für

	<u>n</u>	<u>m</u>	<u>σ</u>	<u>s</u>
$y_1(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$	1	0	0	1
$y_2(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \varphi \end{pmatrix}$	1	0	0	0
$y_3(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \varphi \cdot \sin \lambda \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \cos \lambda \end{pmatrix}$	1	1	1	1
$y_4(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \lambda \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \varphi \cdot \sin \lambda \end{pmatrix}$	1	1	1	0
$y_5(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \varphi \cos \lambda \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sin \lambda \end{pmatrix}$	1	1	0	1
$y_6(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sin \lambda \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \varphi \cdot \cos \lambda \end{pmatrix}$	1	1	0	0
$y_7(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{15}{8}} \sin 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$	2	0	0	1
$y_{13}(\varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{5}{8}} \sin 2\varphi \cdot \sin 2\lambda \\ -\sqrt{\frac{5}{2}} \cos \varphi \cdot \cos 2\lambda \end{pmatrix}$	2	2	1	1

Vergleiche dazu die Abbildungen 1 bis 26! Der nullte Längenkreis liegt dabei stets in Bildmitte, der Nordpol oben. In Zukunft sollen die c_η Koeffizienten der Reihe

$$W(\varphi, \lambda) = \sum_{\eta=1}^{\infty} c_\eta y_\eta(\varphi, \lambda) \quad (37)$$

sein. Diese Koeffizienten erhält man - analog zum skalaren Fall (2) und zum komplexen vektoriellen Fall - aus

$$c_\eta = \overline{W \cdot y_\eta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(\varphi, \lambda) \cdot y_\eta(\varphi, \lambda) \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda \quad (38)$$

Will man nur eine Hemisphäre darstellen, so ist es zweckmäßig, eine am Äquator gespiegelte Darstellung zu verwenden. Geht man von einer am Äquator gespiegelten skalaren Funktion aus und wendet man darauf den Gradienten an, so erhält man gespiegelte Vektorfunktionen. Der antisymmetrische Rotationsoperator tritt in der Meteorologie im Zusammenhang mit dem antisymmetrischen Coriolisparameter auf. Die kombinierte Anwendung dieser beiden Operationen auf ein am Äquator gespiegeltes Skalarfeld liefert deshalb ebenfalls ein am Äquator gespiegeltes Vektorfeld.

Die Komponenten in φ -Richtung sind dabei stets antisymmetrisch, die in λ -Richtung dagegen symmetrisch zum Äquator. Es ergibt sich, daß in der Reihe (37) bei derart gespiegelten Feldern nur diejenigen Koeffizienten $c_n \neq 0$ sein dürfen, für die $n+m+s$ eine gerade Zahl darstellt. Vergleiche dazu die Abbildungen 1 bis 26.

6. Vergleich der Orthogonalen Vektorfunktionen mit anderen spektralen Darstellungen von Vektoren.

Empirisch gegebene Felder liegen ursprünglich stets an gewissen Gitterpunkten vor. Um die Entwicklungskoeffizienten c_n in (37) zu berechnen, muß man das gegebene Vektorfeld $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$ über die Kugel- oder bei Spiegelung am Äquator über eine Halbkugel - integrieren. Hier hat man nun eindeutige Vorteile bei der Darstellung von Vektorfeldern durch Vektorfunktionen. Denn es genügt bei Formel (38), eine Methode anzugeben, wie die Integration über die Kugeloberfläche exakt oder näherungsweise durchgeführt werden soll. Der Integrand $\mathcal{W}(\varphi, \lambda) \cdot y_n(\varphi, \lambda)$ ist eine skalare Größe, dessen Berechnung an jedem Gitterpunkt mit den Koordinaten φ, λ keine Schwierigkeiten bereitet. Diese skalare Größe ist bei einem stetigen \mathcal{W} -Feld auch selbst überall stetig. Wie man diese Eigenschaft zur

Zurückführung der Analyse von Vektorfeldern auf die Analyse skalarer Felder verwenden kann, wird am Ende dieses Abschnitts gezeigt.

Welche Alternativen gibt es, um Vektorfelder auf der Kugeloberfläche spektral darzustellen? Man könnte die Komponenten des Vektorfeldes spektral berechnen. Doch diese können auch bei stetigen und sogar bei beliebig oft differenzierbaren Vektorfeldern an den Polen unstetig sein. Als Beispiele seien die u -Komponenten von $y_3(\varphi, \lambda)$, $y_4(\varphi, \lambda)$ und $y_6(\varphi, \lambda)$ angeführt, deren Werte weder am Nordpol noch am Südpol eindeutig definiert sind und dort auch nicht stetig und eindeutig definiert werden können. Bei der Entwicklung der Vektorkomponenten nach Kugelflächenfunktionen bliebe nur die Möglichkeit, diejenigen Orthogonalen Vektoren aus der Reihe (37), deren Komponenten in P olnähe unstetig sind, bei der Darstellung fortzulassen. Das läuft darauf hinaus, daß man nur Vektorfelder zuläßt, die an den Polen verschwinden. Um dies zu vermeiden, entwickelt Robert [8] die mit $\cos \varphi$ multiplizierten Vektorkomponenten in Kugelflächenfunktionen; das ist in einwandfreier stetiger

Form möglich: Für $\cos \varphi \cdot U_n^m(\sin \varphi)$ erhält man nach Formel (24)

$$\begin{aligned} \sqrt{1-z^2} U_n^m(z) &= \frac{1-z^2}{\sqrt{n(n+1)}} \frac{d P_n^m(z)}{dz} = \\ &= - \frac{\sqrt{n(n-m+1)(n+m+1)}}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)(n+1)}} P_{n+1}^m(z) + \frac{\sqrt{(n+m)(n+1)(n-m)}}{\sqrt{(2n+1)(2n-1) \cdot n}} P_{n-1}^m(z) \end{aligned}$$

und für $\cos \varphi \cdot V_n^m(\sin \varphi)$ erhält man $\frac{m}{\sqrt{n(n+1)}} P_n^m(z)$;

und das sind stetige Funktionen, die außerdem für $m > 0$ an den Polen verschwinden und deshalb auch bei Multiplikation mit $\cos m\lambda$ oder $\sin m\lambda$ stetig bleiben. Diese Methode hat jedoch den Nachteil, daß

bei der Integration - durch die Multiplikation des Integranden mit $\cos^2 \varphi$ - Gewichte eingeführt werden, die alle in Polnähe gegebenen Werte gegenüber den Werten in Äquatornähe benachteiligen. Ein Wert am Pol bleibt dadurch sogar vollkommen unberücksichtigt. Außerdem muß Robert [8] noch bei den höchsten und niedrigsten Gliedern der Reihen bestimmte algebraische Beziehungen zwischen den Reihen der u- und v-Komponenten berücksichtigen. Die entsprechende Koppelung zwischen den Feldern der beiden Vektorkomponenten erfolgt in Formel (38) durch Bildung der Skalarprodukte zwischen dem gegebenen Vektor und dem Wert der Orthogonalen Vektorfunktion am Ort der Messung. Deshalb darf man bei der durch (37) gegebenen Darstellung die dortige Reihe nach einem Wert $\eta = K = 2N^2 + 4M - 1$ gefahrlos abbrechen. Ist dabei $M = N$, so enthält das durch die Teilreihe

$$W_N(\varphi, \lambda) = \sum_{\eta=1}^K c_{\eta} y_{\eta}(\varphi, \lambda)$$

dargestellte Vektorfeld genau alle Wellenzahlen $n \leq N$, unabhängig von der speziellen Lage des Koordinatensystems, mit anderen Worten, $W_N(\varphi, \lambda)$ stellt eine exakte Filterung von $W(\varphi, \lambda)$ dar, aus der alle Wellen der Wellenzahlen $n > N$ entfernt worden sind. Die Entwicklung (37) stellt eine exakte Spektralzerlegung dar. Bei der Differentiation der Orthogonalen Vektorfunktionen und der skalaren Kugelflächenfunktionen wird weder die Wellenzahl n noch m geändert. Dies gilt bei der Differentiation der Vektorkomponenten nach dem Verfahren von Robert [8] nicht.

Ein weiterer Vorteil der Orthogonalen Vektorfunktionen liegt darin, daß man durch Weglassen der Terme mit geraden bzw. ungeraden Indices den rotationsfreien bzw. den divergenzfreien Anteil des Vektorfeldes erhält.

Auch das Verfahren, statt der gegebenen Vektorfelder ihre skalaren

Strom- und Potentialfunktionen spektral zu zerlegen, hat schwerwiegende Nachteile: Um diese Felder aus an Gitterpunkten gegebenen Vektorfelder aufzubauen, muß man an den Gitterpunkten horizontale Differentialquotienten bilden. Dies ist - vor allem bei größerem Gitterabstand - nicht fehlerfrei möglich und häufig mit großen Schwierigkeiten verbunden, denn die Differentialquotienten müssen durch Differenzenquotienten angenähert werden, für deren Berechnung mindestens drei räumlich verschiedene Gitterwerte benötigt werden. Demgegenüber erfordert die Berechnung der Koeffizienten der Orthogonalen Vektorfunktionen keine Differentiation. Die noch nicht integrierten Werte in Formel (38), die nach der Integration die Koeffizienten c_η liefern, sind stetige skalare Funktionen, die das Vektorfeld $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$ eindeutig beschreiben:

$$c_\eta(\varphi, \lambda) = \mathcal{W}(\varphi, \lambda) \cdot \omega_\eta(\varphi, \lambda) \quad (39).$$

Insbesondere erreicht man eine eindeutige Beschreibung von $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$, falls man zur Darstellung alle $c_\eta(\varphi, \lambda)$ verwendet, deren Vektorfunktionen zu $n=1$ gehören, das sind nach Formel (36) die sechs $c_\eta(\varphi, \lambda)$ mit $\eta=1, \dots, 6$. Dabei werden alle Gegenden der Kugeloberfläche völlig gleich behandelt. Doch ist das System selbstverständlich überbestimmt; zur Darstellung eines zweidimensionalen Vektorfeldes reichen bereits zwei skalare Funktionen. Hat man umgekehrt die sechs evtl. fehlerhaften Funktionen $c'_1(\varphi, \lambda), \dots, c'_6(\varphi, \lambda)$ und will man daraus nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die beste Vektorfunktion $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$, für die Formel (39) gilt, wiedergewinnen, so hat man $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$ so zu bestimmen, daß

$$\sum_{\eta=1}^6 [c_\eta(\varphi, \lambda) - c'_\eta(\varphi, \lambda)]^2 = \sum_{\eta=1}^6 [\mathcal{W}(\varphi, \lambda) \cdot \omega_\eta(\varphi, \lambda) - c'_\eta(\varphi, \lambda)]^2$$

ein Minimum wird. Man erhält

$$\mathcal{W}(\varphi, \lambda) = \frac{1}{3} \sum_{\eta=1}^6 c'_\eta(\varphi, \lambda) \cdot \omega_\eta(\varphi, \lambda) \quad (40).$$

Damit erhält man die Möglichkeit, Analysen von Vektorfeldern auf die Analysen von skalaren Feldern zurückzuführen.

Dazu berechnet man zunächst an allen Meßpunkten (φ, λ) aus den dort gemessenen Vektoren $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$ nach Formel (39) die sechs skalaren Werte $c_1(\varphi, \lambda), \dots, c_6(\varphi, \lambda)$. Diese skalaren Werte an den verschiedenen Meßpunkten (φ, λ) werden dann für jeden der sechs η -Werte einzeln für das betrachtete Gebiet (z.B. die Nordhalbkugel) analysiert. Durch das dabei angewandte Analysenverfahren kann möglicherweise die exakte Erfüllung der Beziehung (39) für Werte von φ, λ verlorengehen. Die beste Methode, um aus den sechs derart analysierten $c'_\eta(\varphi, \lambda)$ -Funktionen das Vektorfeld $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$ für alle Werte von φ und λ zu erhalten, ist durch die Formel (40) gegeben. Nach dieser Methode sind von Speth [9] Windfelder und Felder des Transports verschiedener meteorologischer Größen, wie Impuls und Energie analysiert worden.

7. Multiplikation der Vektorfunktionen

Hat man ein horizontales meteorologisches Feld durch orthogonale Funktionen dargestellt, so möchte man auch verschiedene Rechenoperationen ausführen. Das gilt sowohl für diagnostische Untersuchungen als auch in verstärktem Maße für Modellrechnungen und Vorhersagerechnungen. Man sieht sofort ein, daß die Addition und Subtraktion spektral dargestellter Felder keine Schwierigkeiten bereitet, die Koeffizienten der Summenreihe bestehen aus der Summe der entsprechenden Koeffizienten der Summandenreihen. Die Differentiation läßt sich bei spektraler Darstellung auf sehr einfache Art und Weise nach den Formeln (16) bis (21), sowie (13) und (14) durchführen. Schwieriger ist die Multiplikation, die jetzt untersucht werden soll. Es seien zwei Felder $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$ und $\Psi(\varphi, \lambda)$ durch

endliche Reihenentwicklungen nach den orthonormalen Funktionsfamilien $\mathcal{W}_\mu(\varphi, \lambda)$ und $Y_k(\varphi, \lambda)$ gegeben:

$$\mathcal{W}(\varphi, \lambda) = \sum_{\mu=1}^{K_1} w_\mu \mathcal{W}_\mu(\varphi, \lambda) \quad (41)$$

$$\Psi(\varphi, \lambda) = \sum_{k=1}^{K_2} C_k Y_k(\varphi, \lambda) \quad (42)$$

Die Produktfunktion $\mathcal{W}(\varphi, \lambda) = \Psi(\varphi, \lambda) \cdot \mathcal{W}(\varphi, \lambda)$ (43)

werde ebenfalls formal in eine Reihe mit den zunächst unbekanntem Koeffizienten c_1 entwickelt:

$$\mathcal{W}(\varphi, \lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \mathcal{W}_l(\varphi, \lambda) \quad (44)$$

Wie lassen sich die c_1 aus den bekannten w_μ und C_k berechnen?

Setzt man in die Formel für den Entwicklungskoeffizienten

$c_1 : c_1 = \overline{\mathcal{W} \cdot \mathcal{W}_1^*}$ nach Formel (43) das Produkt der Reihen (42) und (41) ein, so erhält man

$$c_1 = \sum_{k=1}^{K_2} \sum_{\mu=1}^{K_1} C_k w_\mu \overline{\mathcal{W}_\mu Y_k \mathcal{W}_1^*} \quad (45)$$

Man erkennt, daß im allgemeinen Fall jeder Entwicklungskoeffizient c_1 der Produktfunktion $\mathcal{W}(\varphi, \lambda)$ aus einer Doppelsumme über alle Produkte der Entwicklungskoeffizienten der beiden Faktorenreihen multipliziert mit dem Tripelintegral $\overline{\mathcal{W}_\mu Y_k \mathcal{W}_1^*}$ besteht. Die Reihe der Produktfunktionen (44) bricht dann ab, wenn für alle $\mu \leq K_1, k \leq K_2$ und $l > K$ die dreifach indizierten Zahlen des Tripelintegrals verschwinden.

Bevor diese Tripelintegralwerte untersucht werden, soll die Multiplikation noch verallgemeinert werden. Weiter oben im Abschnitt 3 wurden bereits die in dem System von Vektoren und Skalaren auf der Kugeloberfläche auftretenden verschiedenen

Arten von Multiplikationen definiert. Man erhielt:

Skalar	mal	Skalar = Vektor,
Vektor	skalar mal	Vektor = Skalar,
Vektor	vektoriell mal	Vektor = Skalar,
Skalar	mal	Vektor = Vektor,
Skalar	vektoriell mal	Vektor = Vektor.

In jeder dieser Beziehungen treten jeweils drei Größen auf, die man unter Verallgemeinerung der Formeln (41) bis (45) den drei Orthogonalfunktionen $W_{\mu}(\varphi, \lambda)$, $Y_k(\varphi, \lambda)$ und $W_1(\varphi, \lambda)$ in dem Tripelintegral zuordnen kann. In jeder dieser Beziehungen erscheinen Vektoren entweder gar nicht oder paarweise. Dementsprechend können wir bei allen diesen verschiedenen Arten der Multiplikation nur entweder ein aus drei skalaren Funktionen aufgebautes Tripelintegral oder ein aus zwei Vektoren und einer Skalarfunktion aufgebautes erhalten. Dementsprechend wollen wir jetzt ein verallgemeinertes Tripelintegral

$$\overline{W_{1_1} \circ W_{1_2} Y_{k_3}^*}$$

untersuchen. Das Zeichen \circ stellt für $\kappa = 0$ eine skalare und für $\kappa = 1$ eine vektorielle Multiplikation dar. Unter Verwendung von (4) und (32) erhält man für das rein skalare Tripelintegral

$$\overline{Y_{k_1} Y_{k_2} Y_{k_3}^*} = (-1)^{m_3} \overline{e^{i\lambda(m_1+m_2-m_3)} Q_{n_1}^{m_1,0} Q_{n_2}^{m_2,0} Q_{n_3}^{-m_3,0}} =$$

$$= \delta_{m_1+m_2, m_3} \overline{Q_{n_1}^{m_1,0} Q_{n_2}^{m_2,0} Q_{n_3}^{m_3,0}}$$

(46).

Dabei gilt für die Beziehung zwischen den k_j , m_j und n_j die Formel (3) sinngemäß. Ersetzt man in dem halben Integral rechts in (46) z durch $-z$, wendet die erste Formel von (35) an und addiert die andere Hälfte des Integrals, so folgt unter Berücksichtigung von $m_1+m_2+m_3 = 2m_3 = \text{gerade}$:

$$\overline{y_{k_1} y_{k_2} y_{k_3}^*} = \delta_{m_1+m_2, m_3} \frac{1+(-1)^{n_1+n_2+n_3}}{2} \overline{Q_{n_1}^{m_1,0} Q_{n_2}^{m_2,0} Q_{n_3}^{m_3,0}}$$

Zunächst erkennt man, daß das Tripelintegral (46) nur für $m_1+m_2 = m_3$ nicht verschwindet. Das ist ein Ergebnis, das wegen der gleichen λ -Abhängigkeit der $\mathcal{W}_1(\varphi, \lambda)$ nach (22) auch für das zweite Tripelintegral gelten muß:

$$\overline{\mathcal{W}_{1_1} \circ \mathcal{W}_{1_2} y_{k_3}^*} = \delta_{m_1+m_2, m_3} \overline{P_{n_1}^{m_1, s_1} \circ P_{n_2}^{m_2, s_2} Q_{n_3}^{m_3, 0}} \quad (47).$$

Hierbei gilt für die Beziehung zwischen den Indices neben Formel (3) auch die Formel (15). Ersetzt man in (47) die $P_n^{m, s}(z)$ nach (23), so folgt

$$\overline{\mathcal{W}_{1_1} \circ \mathcal{W}_{1_2} y_{k_3}^*} = \delta_{m_1+m_2, m_3} i^{s_1-s_2-k} \begin{cases} \overline{(U_{n_1}^{m_1} U_{n_2}^{m_2} - V_{n_1}^{m_1} V_{n_2}^{m_2}) Q_{n_3}^{m_3, 0}} \\ \overline{(U_{n_1}^{m_1} V_{n_2}^{m_2} - V_{n_1}^{m_1} U_{n_2}^{m_2}) Q_{n_3}^{m_3, 0}} \end{cases}$$

dabei gilt die obere Reihe rechts für reelle Integralwerte und die untere für imaginäre. Falls man nun die $U_n^m(z)$ und die $V_n^m(z)$ nach Formel (30) durch die $Q_n^{m, r}(z)$ ersetzt, folgt

$$\overline{\mathcal{W}_{1_1} \circ \mathcal{W}_{1_2} y_{k_3}^*} = \delta_{m_1+m_2, m_3} i^{s_1-s_2-k} \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot \overline{(Q_{n_1}^{m_1, 1} Q_{n_2}^{m_2, -1} + Q_{n_1}^{m_1, -1} Q_{n_2}^{m_2, 1}) Q_{n_3}^{m_3, 0}} \\ -\frac{1}{2} \cdot \overline{(Q_{n_1}^{m_1, 1} Q_{n_2}^{m_2, -1} - Q_{n_1}^{m_1, -1} Q_{n_2}^{m_2, -1}) Q_{n_3}^{m_3, 0}} \end{cases}$$

Jeweils in dem zweiten Integralterm der $Q_n^m(z)$ wird z durch $-z$ ersetzt und Formel (35) angewendet:

$$\overline{y_{1_1} \circ y_{1_2} y_{k_3}^*} = \delta_{m_1+m_2, m_3} i^{s_1-s_2-k+2} \frac{1+(-1)^{n_1+n_2+n_3+s_1-s_2-k}}{2} \cdot \overline{Q_{n_1}^{m_1,1} Q_{n_2}^{m_2,-1} Q_{n_3}^{m_3,0}} \quad (48).$$

Über das in (48) ganz rechts stehende Tripelintegral sei noch vorweggenommen, daß es nach Formel (64) verschwindet, wenn die Summe von zwei n -Werten größer als der dritte Wert ist. Daraus ergibt sich, daß die Reihe (44) der Produktfunktion höchstens maximale Großkreiswellenzahlen n_3 enthält, die gleich der Summe aus den entsprechenden Wellenzahlen der Faktorenreihen (41) und (42) ist. Falls man allgemein Reihen bis zu einer festen maximalen Wellenzahl $n \leq N$ verwendet, so muß man nach einer Multiplikation alle Reihenglieder mit Wellenzahlen n zwischen $N+1$ und $2N$ weglassen. Der dabei entstehende Fehler wird mit einem Wort aus der angelsächsischen Literatur truncation-Fehler genannt. Die Formel (48) läßt jedoch noch weitere Auswahlregeln bei der Multiplikation erkennen. Das Kroneckersymbol als erster Faktor auf der rechten Seite von (48) besagt, daß die zonale Wellenzahl m_3 der Produktfunktion nur gleich der Summe oder - wegen der Möglichkeit von negativen m -Werten - gleich der Differenz der beiden Wellenzahlen m_1 und m_2 sein kann. In einem Produkt können also nur zonale Wellenzahlen aus der Summe oder der Differenz der ursprünglichen zonalen Wellenzahlen auftauchen. Die Potenz von $i = \sqrt{-1}$ tritt in (48) auf, weil mit komplexen Werten gerechnet wird; sie bewirkt Übergänge zwischen $\sin m\lambda$ - und $\cos m\lambda$ -Werten. Auf Einzelheiten kann verzichtet werden, da

später zu reellen Werten übergegangen wird; dann kann man den Einfluß dieser Potenz auf die reellen Werte betrachten. Der nächste Faktor mit dem Bruchstrich stellt wieder eine Auswahlregel dar, die auch im Reellen gilt. Wenn die Summe aus den drei Großkreiswellenzahlen, den beiden Kennzahlen für Rotations- oder Divergenzfreiheit der beiden Vektoren und der Kennzahl 0 für den Skalarprodukt bzw. 1 für den Vektorprodukt ungerade ist, verschwindet das Tripelintegral links in (48). Das hat als Konsequenz: Multipliziert man einen Vektor mit gerader Wellenzahl n skalar mit Vektoren einer festen Großkreiswellenzahl, die in bezug auf Rotations- bzw. Divergenzfreiheit mit ihm übereinstimmen, so erhält man einen Skalar mit Wellenzahlen, die gerade oder ungerade sind, je nachdem, ob der zweite Vektor eine gerade oder ungerade Großkreiswellenzahl hatte. Stimmen Rotations- bzw. Divergenzfreiheit nicht überein, so sind beim Ergebnis gerade und ungerade miteinander zu vertauschen. Durch die Verwendung des Vektorprodukts erfolgt eine abermalige Vertauschung. Entsprechende Auswahlregeln gelten auch für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Auf die Interpretation des rein skalaren Tripelintegrals (46) gehe ich nicht näher ein, weil es bereits von Silberman [10] berechnet, untersucht und angewendet worden ist. Bevor für das in (48) rechts stehende Integral ein zur Berechnung geeigneter formelmäßiger Ausdruck abgeleitet wird, soll noch der entsprechende Koppelungskoeffizient, also das Analogon des Tripelintegrals (47) für reelle Reihen (37) bzw. für die entsprechende Reihe der skalaren Funktionen

$$y_{\mu}(\varphi, \lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_m} \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma=0 \\ \frac{1}{i} & \text{für } \sigma=1 \end{cases} \left\{ y_k(\varphi, \lambda) \pm y_k^*(\varphi, \lambda) \right\} \quad (49)$$

$$\text{mit } \mu = n^2 + 2m + 1 - \sigma; \quad 0 \leq m \leq n; \quad \sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } m=0 \\ 0, 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

abgeleitet werden. Um Vektoren und Skalare durch einheitliche Formeln darstellen zu können, wird eine reelle Funktion $\mathfrak{z}(\varphi, \lambda)$ wie folgt definiert:

$$\mathfrak{z}(\varphi, \lambda) = \begin{cases} \mathfrak{y}_{\eta}(\varphi, \lambda) & \text{für } \nu=1 \text{ mit } \eta = 2n^2 + 4m - 2\sigma - s \\ y_{\mu}(\varphi, \lambda) & \text{für } \nu=0 \text{ mit } \mu = n^2 + 2m - \sigma + 1 \end{cases}$$

Ganz entsprechend wird $\mathfrak{z}(\varphi, \lambda)$ durch die entsprechenden komplexen Funktionen dargestellt. Die drei Funktionen des Tripelintegrals werden durch die Indices 1, 2, 3 unterschieden, die man auch an den Indexzahlen η, μ, n, m, σ und ν wiederfindet. Die Tripelintegrale (46) und (48) lassen sich damit zu der einen verallgemeinerten Formel

$$\overline{\mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_3} = \begin{cases} 1 & \text{für } m_1 + m_2 + m_3 = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \cdot i^{S - K + E + 2s_2} \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } L + S + K \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \cdot \frac{Q_{n_1}^{m_1, \nu_1} Q_{n_2}^{m_2, -\nu_2} Q_{n_3}^{m_3, \nu_3}}{\quad} \quad (50)$$

zusammenfassen; darin ist

$$S = s_1 + s_2 + s_3; \quad L = n_1 + n_2 + n_3; \quad E = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \quad \text{und} \quad \nu_2 = \nu_1 + \nu_3.$$

Für das Tripelintegral der reellen Größen erhält man mit (49) und der entsprechenden Beziehung für die Orthogonalen Vektorfunktionen

$$J = \overline{z_1 \circ z_2 z_3} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{m_1} \varepsilon_{m_2} \varepsilon_{m_3}}}{4i^Z} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\overline{z_1 \circ z_2 z_3} + (-1)^Z \overline{z_1^* \circ z_2^* z_3^*} \right) \\ & + (-1)^{\sigma_1} \frac{1}{2} \left(\overline{z_1^* \circ z_2 z_3} + (-1)^Z \overline{z_1 \circ z_2^* z_3^*} \right) \\ & + (-1)^{\sigma_2} \frac{1}{2} \left(\overline{z_1 \circ z_2^* z_3} + (-1)^Z \overline{z_1^* \circ z_2 z_3^*} \right) \\ & + (-1)^{\sigma_3} \frac{1}{2} \left(\overline{z_1 \circ z_2 z_3^*} + (-1)^Z \overline{z_1^* \circ z_2^* z_3} \right) \end{aligned} \right\};$$

darin gilt $Z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$; bei der reellen Funktion $z_j(\varphi, \lambda)$ stellt $\sigma_j=0$ jeweils den Realteil und $\sigma_j=1$ den Imaginärteil der komplexen Funktion $z_j(\varphi, \lambda)$ dar. Aus der Definition von $z_j(\varphi, \lambda)$ nach (4) bzw. (22) in Verbindung mit (23) bis (25), (32) und (35) läßt sich ableiten:

$$z_j^*(\varphi, \lambda) = (-1)^{m_j} \overline{z_j'(\varphi, \lambda)},$$

wobei der Strich rechts am $z_j(\varphi, \lambda)$ andeuten soll, daß statt m_j die Zahl $-m_j$ einzusetzen ist. Berücksichtigt man dies und Formel (50), so erhält man für das reelle Tripelintegral

$$J = \frac{\sqrt{\varepsilon_{m_1} \varepsilon_{m_2} \varepsilon_{m_3}}}{4} (-1)^{s_2 + \frac{S-K+E-Z}{2}} \left\{ \begin{aligned} & 1 \text{ für } S+Z+K \text{ gerade und } L+Z \text{ gerade} \\ & 0 \text{ sonst} \end{aligned} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 \text{ für } m_1+m_2+m_3=0 \\ 0 \text{ sonst} \end{pmatrix} \cdot \frac{Q_{n_1}^{m_1, \nu_1} Q_{n_2}^{m_2, -\nu_2} Q_{n_3}^{m_3, \nu_3}}{Q_{n_1} Q_{n_2} Q_{n_3}} + \\ & + \begin{pmatrix} 1 \text{ für } m_1=m_2+m_3 \\ 0 \text{ sonst} \end{pmatrix} (-1)^{m_1+\sigma_1} \frac{Q_{n_1}^{-m_1, \nu_1} Q_{n_2}^{m_2, -\nu_2} Q_{n_3}^{m_3, \nu_3}}{Q_{n_1} Q_{n_2} Q_{n_3}} + \\ & + \begin{pmatrix} 1 \text{ für } m_2=m_1+m_3 \\ 0 \text{ sonst} \end{pmatrix} (-1)^{m_2+\sigma_2} \frac{Q_{n_1}^{m_1, \nu_1} Q_{n_2}^{-m_2, -\nu_2} Q_{n_3}^{m_3, \nu_3}}{Q_{n_1} Q_{n_2} Q_{n_3}} + \\ & + \begin{pmatrix} 1 \text{ für } m_3=m_1+m_2 \\ 0 \text{ sonst} \end{pmatrix} (-1)^{m_3+\sigma_3} \frac{Q_{n_1}^{m_1, \nu_1} Q_{n_2}^{m_2, -\nu_2} Q_{n_3}^{-m_3, \nu_3}}{Q_{n_1} Q_{n_2} Q_{n_3}} \end{aligned} \right\}$$

und dies kann man schließlich zu der folgenden Formel zusammenfassen:

$$J = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } S+Z+K \text{ und } L+Z \text{ gerade} \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right\} \cdot \frac{(-1)^{\frac{S+E-K-Z}{2} + s_2 + m_q + \sigma_q}}{\sqrt{\varepsilon_{m_1} \varepsilon_{m_2} \varepsilon_{m_3}}} \cdot \frac{Q_{n_1}^{X_1, \nu_1} Q_{n_2}^{X_2, -\nu_2} Q_{n_3}^{X_3, \nu_3}}{\quad} \quad (51)$$

$$\text{mit } q = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } m_1 \geq m_2 + m_3 \\ 2 \text{ für } m_2 \geq m_1 + m_3 \text{ und } m_3 \neq 0 \\ 3 \text{ sonst} \end{array} \right\} \quad \text{und } X_j = \left\{ \begin{array}{l} -m_j \text{ für } j=q \\ m_j \text{ für } j \neq q \end{array} \right.$$

Jetzt soll für die in (48), (50) und (51) auftretenden Tripelintegrale über z

$$\frac{Q_{n_1}^{m_1, r_1} Q_{n_2}^{m_2, r_2} Q_{n_3}^{m_3, r_3}}{\quad} \text{ mit } m_1 + m_2 + m_3 = r_1 + r_2 + r_3 = 0 \quad (52)$$

eine Formel angegeben werden, die zur schnellen und exakten Berechnung mit einem Elektronenrechner in Gleitkommadarstellung geeignet ist. Für den Fall, daß alle r_j (oder alle m_j) verschwinden, erhält man aus (52) wegen der Beziehung (32) das Tripelintegral über die Legendre'schen Polynome, für die Silberman [10] folgende Formel abgeleitet hat

$$\frac{Q_{n_1}^{m_1, 0} Q_{n_2}^{m_2, 0} Q_{n_3}^{m_3, 0}}{\quad} = \frac{P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} P_{n_3}^{m_3}}{\quad} = (-1)^{\frac{n_1 + n_3 - n_2}{2}} \sqrt{(2n_1 + 1)(2n_2 + 1)(2n_3 + 1)} \cdot \frac{(n_1 + n_2 - n_3 - 1)!!}{(n_1 + n_2 + n_3 + 1)!! (n_2 + n_3 - n_1)!! (n_1 + n_3 - n_2)!!} \cdot T(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3) \quad (53)$$

$$\text{mit } T(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3) = (-1)^{m_2} \sqrt{\frac{(n_1 + m_1)! (n_2 - m_2)! (n_3 - m_3)!}{(n_1 - m_1)! (n_2 + m_2)! (n_3 + m_3)!}} \quad (54)$$

$$\cdot W(n_1 + m_1 + 1, -n_3 - m_3, -n_1 + m_1; -n_2 - n_3 + m_1, n_2 - n_3 + m_1 + 1)$$

$$\text{und mit } W(a,b,c;d,e) = \frac{(-d)!}{(e-1)!} \sum_{k=0}^{\min(-b,-c)} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k}{(d)_k (e)_k k!} \quad (55).$$

Dabei bedeutet $(a)_k = a \cdot (a+1) \dots (a+k-1)$ das Pochhammer-Symbol und $k!! = k \cdot (k-2) \dots$ (2 für k gerade, sonst 1); es gilt $(-1)!! = 1$.

Das Tripelintegral (53) verschwindet, falls $n_1+n_2+n_3$ ungerade ist. Die Formel (55) ist nur für $e \geq 1$ sinnvoll; für $e < 1$ nimmt man statt dessen

$$W(a,b,c;d,e) = \frac{(a-e)!(-b)!(-c)!(-1)^{e+1}}{(a-1)!(e-b-1)!(e-c-1)!} W(a+1-e,b+1-e,c+1-e;d+1-e,2-e), \quad (56)$$

das man in diesem Fall aus (55) durch einen Grenzübergang erhält.

Ist in (54) $n_3 > n_1+n_2$ und $m_1 \leq n_1$, so wird in (55) $e < 1$. Dann gilt Formel (56); dort erhält man für $e-c-1$ den Wert $n_2+n_1-n_3$, der < 0 ist. Damit verschwindet $W(a,b,c;d,e)$, weil der Ausdruck $(e-b-1)!$ im Nenner von (56) unendlich wird. Also verschwindet $T(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3)$ für $n_3 > n_1+n_2$ (57).

Die Rechnung mit der in (55) rechts stehenden Summenformel für die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe kann bei einer größeren Zahl von Summanden dazu führen, daß Abrundungsfehler überhand nehmen, weil man Differenzen von zu großen Zahlen bilden muß. Die Reihenglieder in der Summe von (55) nehmen für $k \approx \min(-b, -c)$ dem Betrag nach ihren größten Wert an und haben gleichzeitig alternierende Vorzeichen. Durch geeignet Zusammenfassung von je zwei Reihengliedern, die etwa spiegelbildlich zum mittleren Glied liegen und Ausklammern der stark wachsenden Faktoren, kann man diese Gefahr der zu großen Abrundungsfehler weitgehend ausschalten:

Sei $-b \leq -c$ und $\beta = [-b/2]$, sowie $\gamma = [-(b-1)/2]$, so verwendet man

(58)

$$\sum_{k=0}^{-b} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k}{(d)_k (e)_k k!} = \frac{(a)_\beta (c)_\beta (-b)! (-1)^\beta}{(d)_\beta (e)_\beta \beta! \gamma!} \sum_{k=0}^{\beta} \frac{(-\beta)_k}{(\gamma+1)_k} \left\{ \frac{(1-d-\beta)_k (1-e-\beta)_k (a+1+\beta)_k (c+1+\beta)_k}{(1-a-\beta)_k (1-c-\beta)_k k (d+1+\beta)_k (e+1+\beta)_k} \right\}$$

mit $f_k = \begin{cases} (k-\beta)/(-k-1-\beta) & \text{für } b \text{ gerade} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Ist übrigens in der Summe $a = e$ oder $c = d$, so lassen sich diese beiden Faktoren herauskürzen, dann erhält man eine echte hypergeometrische Reihe, in der die Variable den Wert 1 hat. Dafür existiert die folgende Summenformel (vergleiche z.B. Wittaker u.a. [13],

S. 282):

$$\sum_{k=0} \frac{(a)_k (b)_k}{(e)_k k!} = F(a, b; e; 1) = \frac{\Gamma(e) \cdot \Gamma(e-a-b)}{\Gamma(e-a) \cdot \Gamma(e-b)} = \frac{(e-1)! (e-a-b-1)!}{(e-a-1)! (e-b-1)!} \quad (59)$$

Im Falle $a=e$ erhält man nach der gleichen Formel

$$\sum_{k=0}^{-b} \frac{(b)_k (c)_k}{(d)_k k!} = \frac{(d-1)! (d-b-c-1)!}{(d-b-1)! (d-c-1)!} \quad (60)$$

Doch nun zurück zu einem weiteren Spezialfall des Tripelintegrals (52). Sind alle m_j und alle $r_j=0$, so findet man bei Wittaker u.a.

[13] auf S. 331 einen summenfreien Ausdruck für das Integral (52):

$$\overline{Q_{n_1}^0, Q_{n_2}^0, Q_{n_3}^0} = P_{n_1}^0 P_{n_2}^0 P_{n_3}^0 = \frac{\sqrt{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n_3+1)}}{n_1+n_2+n_3+1} \cdot \frac{A\left(\frac{n_2+n_3-n_1}{2}\right) \cdot A\left(\frac{n_3+n_1-n_2}{2}\right) \cdot A\left(\frac{n_1+n_2-n_3}{2}\right)}{A\left(\frac{n_1+n_2+n_3}{2}\right)}$$

mit $A(x) = \frac{(2x-1)!!}{x!}$ für $n_1+n_2+n_3$ gerade, (61)

sonst verschwindet der Wert des Integrals.

Nun weiß man aus der Theorie des Drehimpulses in der Quantenmechanik, z.B. dem Buch von Edmonds [12], daß sich das Tripelintegral (52) in zwei Faktoren zerlegen läßt, deren einer nicht von den m_j

und deren anderer nicht von den r_j abhängt. Um die Berechnung zu vereinfachen, wird noch ein weiterer Faktor abgespalten, der nur von den n_j abhängt:

$$\overline{Q_{n_1}^{m_1, r_1} Q_{n_2}^{m_2, r_2} Q_{n_3}^{m_3, r_3}} = G(n_1, n_2, n_3) \cdot T(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3) \cdot T(n_1, n_2, n_3, r_1, r_2, r_3) \quad (62),$$

Man überlegt sich nun leicht, daß man für die Funktionen T in (62) genau die T -Funktionen aus (53) nehmen kann. Setzt man dann $m_j = r_j = 0$, so kann man $T(n_1, n_2, n_3, 0, 0, 0)$ aus (53) und (62) eliminieren und erhält

$$G(n_1, n_2, n_3) = \frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n_3+1) [(n_1+n_2-n_3-1)!!]^2}{[(n_1+n_2+n_3+1)!!(n_2+n_3-n_1)!!(n_1+n_3-n_2)!!]^2 P_{n_1}^0 P_{n_2}^0 P_{n_3}^0}.$$

Entnimmt man den Wert für $P_{n_1}^0 P_{n_2}^0 P_{n_3}^0$ der Formel (61), so erhält man

$$G(n_1, n_2, n_3) = \frac{\sqrt{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n_3+1)} (n_1+n_2-n_3)!}{(n_2+n_3-n_1)!(n_1+n_3-n_2)!(n_1+n_2+n_3+1)!} \quad (63)$$

Man kann durch Grenzbetrachtungen zeigen, daß diese Formel auch dann richtig bleibt, wenn $n_1+n_2+n_3$ ungerade ist. Dieser Ausdruck verschwindet für $n_1 > n_2+n_3$ und $n_2 > n_1+n_3$. Für $n_3 > n_1+n_2$ strebt $G(n_1, n_2, n_3)$ zwar gegen ∞ , doch streben gleichzeitig beide T -Funktionen in (62) gemäß (57) gegen Null, so daß insgesamt auch in diesem Fall das Tripelintegral (52) verschwindet. Wir erhalten also den Satz $\overline{Q_{n_1}^{m_1, r_1} Q_{n_2}^{m_2, r_2} Q_{n_3}^{m_3, r_3}} = 0$ für $n_1 > n_2+n_3$ oder $n_2 > n_1+n_3$ oder $n_3 > n_1+n_2$ (64). Schließlich läßt sich nun auch eine summenfreie Formel für $T(n_1, n_2, n_3, 0, 0, 0)$ angeben, indem man in (53)

$m_j = 0$ setzt:

$$T(n_1, n_2, n_3, 0, 0, 0) = (-1)^{\frac{n_1+n_3-n_2}{2}} \frac{(n_1+n_2+n_3+1)!!(n_2+n_3-n_1)!!(n_1+n_3-n_2)!!}{\sqrt{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n_3+1)} (n_1+n_2-n_3-1)!! P_{n_1}^0 P_{n_2}^0 P_{n_3}^0}$$

Setzt man für das rechtsstehende Integral den Wert aus Formel (61) ein, so erhält man für $n_1+n_2+n_3$ gerade:

$$T(n_1, n_2, n_3, 0, 0, 0) = (-1)^{\frac{n_1+n_3-n_2}{2}} \cdot 2^{n_3} \frac{\left(\frac{n_1+n_2+n_3}{2}\right)!}{\left(\frac{n_1+n_2-n_3}{2}\right)!} (n_2+n_3-n_1-1)!! (n_1+n_3-n_2-1)!! .$$

Daraus läßt sich für $W(a, b, c; d, e)$ folgender Ausdruck ableiten, falls $a+c=1$ und $d+e=2b+1$ ist:

$W(a, b, c; d, e) = 0$ für $a-d$ gerade sonst

$$W(a, b, c; d, e) = (-1)^{\frac{a-e}{2}} \cdot 2^{-b} \frac{\left(\frac{-d-c}{2}\right)!}{\left(\frac{a+e}{2}-1\right)!} (-d-a)!! (-e-c)!! \quad (65).$$

Damit hat man alle Formeln zur Hand, die eine schnelle Berechnung des Tripelintegrals (52) ermöglichen; Zunächst zerlegt man das Integral nach (62) in die Funktionen $G(n_1, n_2, n_3)$ und $T(n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3)$. Der Wert für G wird nach (63) berechnet, der von T nach Formel (54); dabei tritt die Funktion W auf. Diese wird je nach den Werten ihrer Parameter nach Formel (65), Formel (56) oder Formel (55) berechnet. Die dort auftretende verallgemeinerte hypergeometrische Reihe wird je nach den Werten ihrer Parameter nach Formel (59), (60) oder (58) berechnet. Damit ist das Problem der Multiplikation im Wellenzahlenbereich gelöst.

8. Die Division durch einen Skalar

Die durch Reihen von Kugelflächenfunktionen dargestellten skalaren Felder und die entsprechenden Vektorfelder können auch durch ein skalares Feld dividiert werden. Man erhält aber nur dann ein stetiges Ergebnis, wenn der Divisor an keiner Stelle der Kugeloberfläche verschwindet. Den Fall einer behebbaren Singularität, also den Fall, daß der Zähler auch an den Stellen

mindestens von gleicher Ordnung verschwindet, an denen der Nenner Null wird, soll nicht betrachtet werden. Die Division ist also nur durch solche Reihen gestattet, deren konstantes Glied so groß ist, daß die Reihe für keine Stelle der Kugeloberfläche den Wert Null erreichen kann. Die Division wird dann in einem impliziten Iterationsverfahren auf die Multiplikation zurückgeführt. Soll der Quotient der gegebenen Reihen $f(\varphi, \lambda)$ und $g(\varphi, \lambda)$ mit $g(\varphi, \lambda) \neq 0$ für alle φ und λ gebildet werden, so setzt man $h_0(\varphi, \lambda) = 0$ und iteriert nach der Formel

$$h_{j+1}(\varphi, \lambda) = h_j(\varphi, \lambda) + [f(\varphi, \lambda) - g(\varphi, \lambda) \cdot h_j(\varphi, \lambda)] / \alpha \quad (66).$$

Darin ist die Iterationskonstante α durch

$$\alpha = \overline{g^2} / \overline{g} \quad (67)$$

gegeben. Wenn das Iterationsverfahren konvergiert, erhält man das gesuchte Ergebnis $h(\varphi, \lambda) = f(\varphi, \lambda) / g(\varphi, \lambda)$ aus

$$h(\varphi, \lambda) = \lim_{j \rightarrow \infty} h_j(\varphi, \lambda)$$

Um die Konvergenz zu beweisen, definiert man zunächst die folgende

Norm
$$\|h\| = \sqrt{\overline{h^2}}.$$

$\overline{h^2}$ besteht aus der Quadratsumme aller Koeffizienten der Reihe $h(\varphi, \lambda)$. Die Konvergenz der Iterationsformel (66) ist gesichert, falls die Norm der partiellen Ableitung nach $h_j(\varphi, \lambda)$ auf der rechten Seite von (66) unterhalb einer festen Schranke D bleibt, die kleiner als 1 ist:

$$\|1 - g/\alpha\| \leq D < 1 \quad (68).$$

Aus der Normdefinition folgt

$$\|1 - g/\alpha\|^2 = 1 + \overline{g^2}/\alpha^2 - 2\overline{g}/\alpha,$$

verwendet man die Definition von α durch (67), so ergibt sich

$$\|1 - g/\alpha\|^2 = 1 + \bar{g}^2 / \bar{g}^2 - 2 \bar{g}^2 / \bar{g}^2 = 1 - \bar{g}^2 / \bar{g}^2 ,$$

welches gewiß kleiner als 1 ist. Damit ist die Konvergenz des Iterationsverfahrens mit Formel (66) bewiesen.

Rechnet man mit den Koeffizienten der Reihen, so kann man die Iterationsformel (66) jedoch nicht exakt anwenden. Denn bei jedem Iterationsschritt würde die maximale Wellenzahl N_3 der Ergebnisreihe $h_j(\varphi, \lambda)$ zunehmen. Das ergibt sich aus dem in der Iterationsformel rechts stehenden Produkt $g(\varphi, \lambda) \cdot h_j(\varphi, \lambda)$, dessen maximale Wellenzahl gleich der Summe der maximalen Wellenzahlen der Faktoren ist. Man wird die iterierte Reihe $h_j(\varphi, \lambda)$ nach einer Wellenzahl N_3 abbrechen, die gleich dem Maximum aus den Wellenzahlen von $f(\varphi, \lambda)$ und $g(\varphi, \lambda)$ ist. Wegen dieses truncation-Fehlers, kann man den Quotienten von zwei Reihen nur näherungsweise berechnen.

Das Divisionsverfahren läßt sich auch auf die Division von Vektorfeldern durch ein Skalarfeld ausdehnen. Dann sind $f(\varphi, \lambda)$, $h(\varphi, \lambda)$ und $h_j(\varphi, \lambda)$ Vektorfelder. Die oben dargelegte Divisionsmethode und der Konvergenzbeweis sehen ganz analog aus und sollen deshalb nicht noch einmal dargelegt werden. Lediglich an einigen Stellen ist statt der gewöhnlichen Multiplikation die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar bzw. in der Normdefinition das innere Produkt zweier Vektoren einzuführen.

Die Division nach diesem Verfahren ist sehr rechenintensiv, da bei jedem Iterationsschritt in (66) ein Produkt aus zwei Reihen nach der im vorigen Kapitel angegebenen Methode berechnet werden muß.

9. Die Darstellung der Bewegungsgleichungen

Bei meteorologischen Berechnungen mit den aus Kugelflächenfunktionen und Orthogonalen Vektorfunktionen aufgebauten Reihen sind noch einige Gesichtspunkte zu berücksichtigen, die im folgenden angegeben werden. Den Abschluß dieses Kapitels bildet eine einfache Methode zur Berechnung des globalen Windfeldes aus dem Geopotentialfeld. Zunächst müssen die Bewegungsgleichungen in exakter Vektordarstellung geschrieben werden. Für die totale Ableitung des Windvektors \mathcal{W} nach der Zeit t erhält man unter Fortlassung der Argumente φ, λ :

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} \mathcal{W} \cdot \mathcal{W} \right) - \mathcal{W} \times \text{rot}_R \mathcal{W} .$$

In Äquatornähe verschwindet der Coriolisterm; dort läßt sich das Horizontalwindfeld linear nur durch einen Bodenreibungsansatz balancieren. Der darin auftretende Bodenreibungsfaktor B kann auch vom Ort, z.B. von der Land-Meerverteilung abhängen. Im einfachsten Fall wird man B konstant ansetzen. Für die Horizontalreibung führt ein Diffusionsansatz mit der Diffusionskonstanten H auf den Ausdruck $H \cdot \left(-\frac{2}{R^2} \mathcal{W} + \Delta \mathcal{W} \right)$.

Darin tritt - wie zu erwarten - der vektorielle Laplace-Operator auf, der durch die Formeln (11) und (12) definiert wurde.

Außerdem erhält man noch einen Anteil von der Form eines linearen Bodenreibungsterms; er ist sehr klein, da in seinem Nenner das Quadrat des Erdradius R steht. Insgesamt erhält man folgende horizontale Bewegungsgleichung (unter Verwendung des auf S. 11 definierten \times -Produkts):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} \mathcal{W} \cdot \mathcal{W} \right) - \mathcal{W} \times \text{rot}_R \mathcal{W} - f \times \mathcal{W} - \\ - \text{grad} \Phi - B \mathcal{W} + H \cdot \left(-\frac{2}{R^2} \mathcal{W} + \Delta \mathcal{W} \right) = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Vernachlässigt man die Beschleunigung und die Horizontalreibung, so kann man diese Gleichung nach \mathcal{W} auflösen:

$$\mathcal{W} = (-B \operatorname{grad} \bar{\Phi} + f \times \operatorname{grad} \bar{\Phi}) / (B^2 + f^2) \quad (70).$$

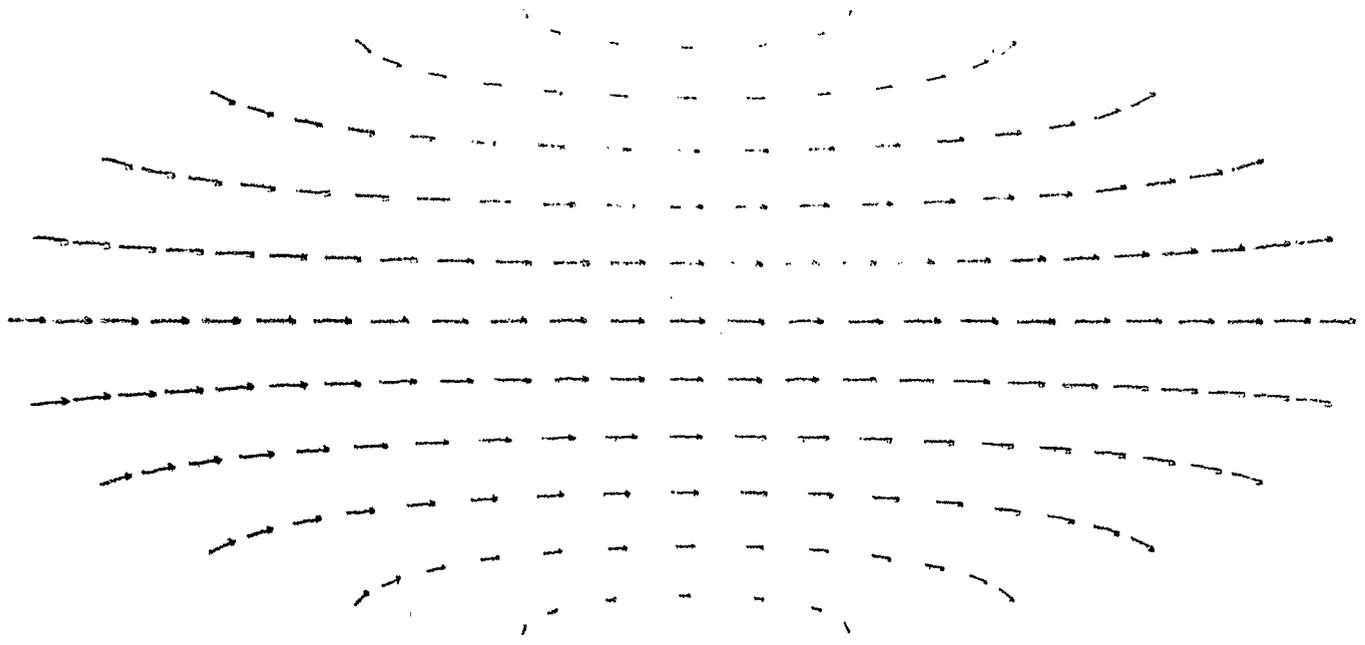
Der Nenner verschwindet dabei nirgends. Somit ist dies die einfachste Formel, um aus einem Geopotentialfeld $\bar{\Phi}$ ein Windfeld \mathcal{W} zu berechnen. Eine iterative Verbesserung dieses Feldes mit Hilfe der übrigen in (69) angegebenen Terme der Bewegungsgleichung ist möglich.

Eine interessante Aufgabe besteht dabei darin, diejenigen Werte von B und H zu finden, durch die das damit berechnete Windfeld der Wirklichkeit am nächsten kommt.

Literaturverzeichnis

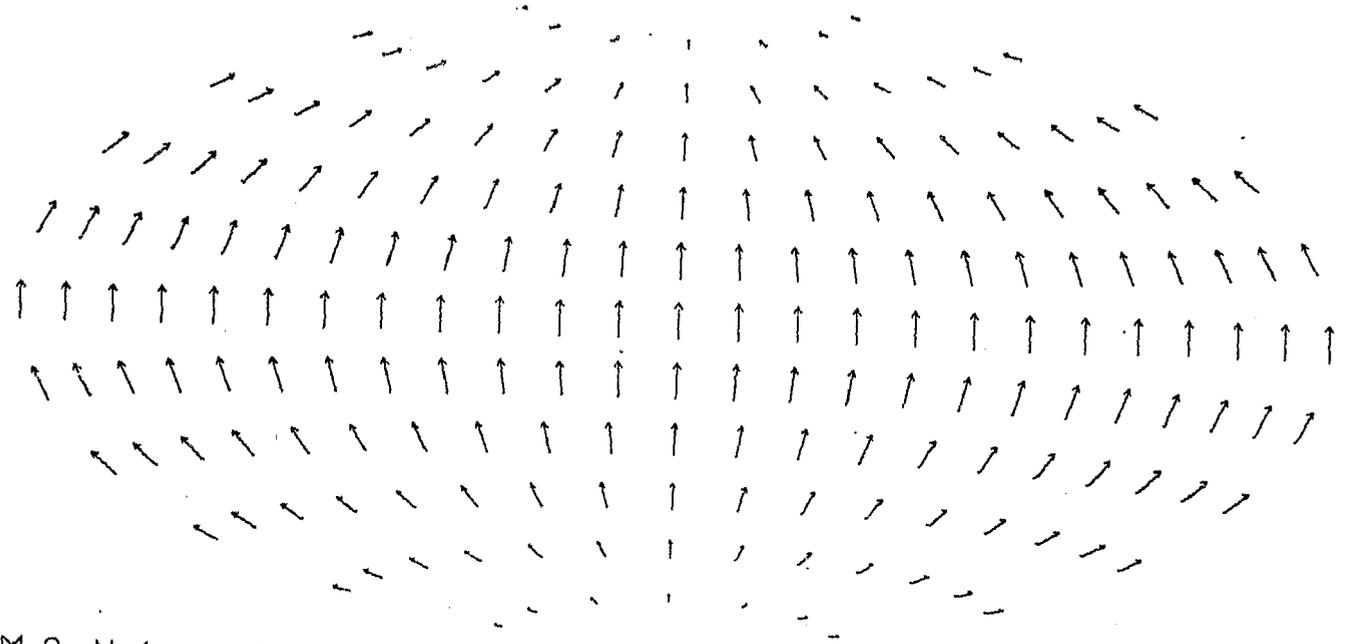
1. Kubota, S.: Surface Spherical Harmonic Representations of the System of Equations for Analysis, in Papers in Met. and Geophysics 9 (1958-1959), 3-4, S. 145-166
2. Eliassen E. und Machenhauer, B.: On the observed large-scale atmospheric wave motion, in Tellus 21 (1969), 2, S. 149-166.
3. Eliassen, E., Machenhauer, B. und Rasmussen, E.: On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields. Kopenhavns Universitet, Inst. for Theoretisk Meteorologi, Report No. 2 (1970).
4. Efimov, V.A.: (Eine spektrale Form der Gleichungen der Dynamik der Atmosphäre für das System der verallgemeinerten sphärischen Funktionen) Original in russisch. Meteorologija i Gidrologija 8 (1968), S. 15-29.
5. Ralston, A. und Wilf, H.S.: Mathematische Methoden für Digitalrechner. München-Wien 1967, S. 462 ff.
6. Magnus, W., Oberhettinger, F. und Soni R.P.: Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Functions. Third Edition, Berlin, Heidelberg, New York 1966.
7. Platzman, G.W.: The spectral form of the vorticity equation J. of Meteorology 17 (1960), 6, S. 635-644
8. Robert, A.: The Behaviour of Planetary Waves in an Atmospheric Model based on Spherical Harmonics. Publication in Meteorology No. 77, June 1965 CFSTI, Springfield, Virginia.
9. Speth, P.: Die Anwendung von orthogonalen Vektorfunktionen auf die Analyse meteorologischer Felder, Meteorologische Rundschau 1974 (im Druck).
10. Silberman, J.: Planetary waves in the Atmosphere, J. of Met. 11 (1954), 1, S. 27-34.

11. Tricomi, F.G.: Vorlesungen über Orthogonalreihen
12. Edmonds, A.R.: Angular Momentum in Quantum Mechanics, S. 49, 1957.
13. Wittaker und Watson: A Course of Modern Analysis,
Cambridge 1963.
14. Bieberbach, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen,
Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953.



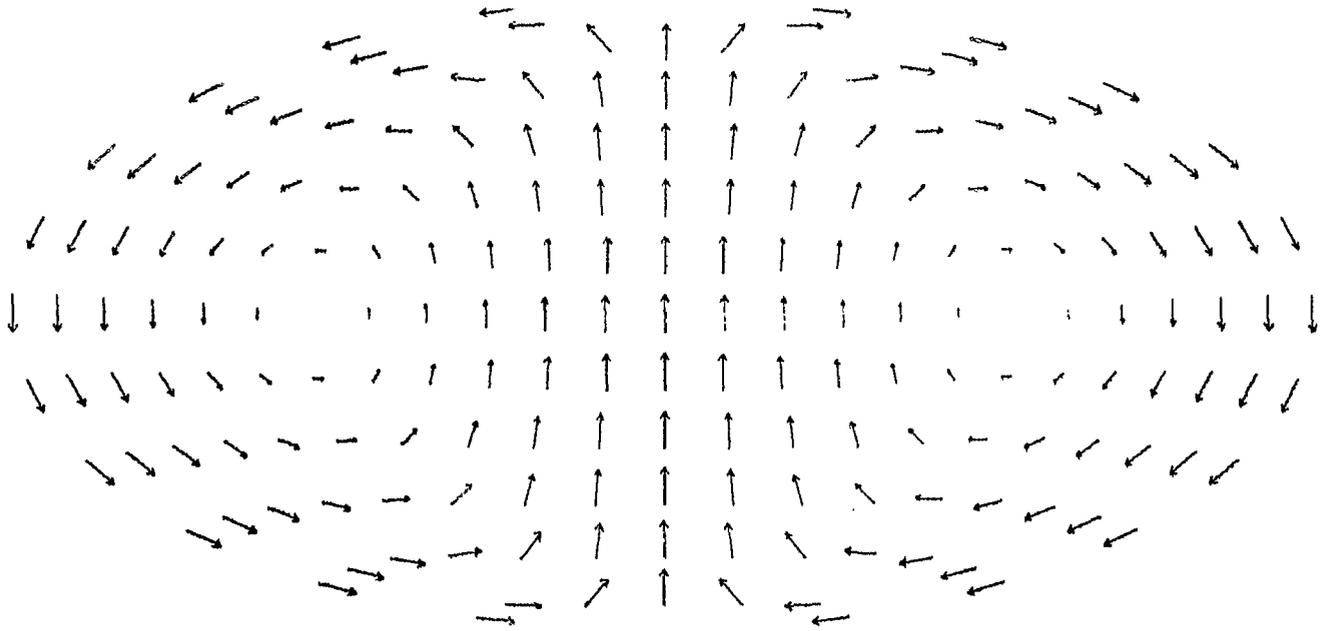
M:0 N:1 s:1 $\sigma:0$
DIVERGENZFREI Gespiegelt

ABB. 1



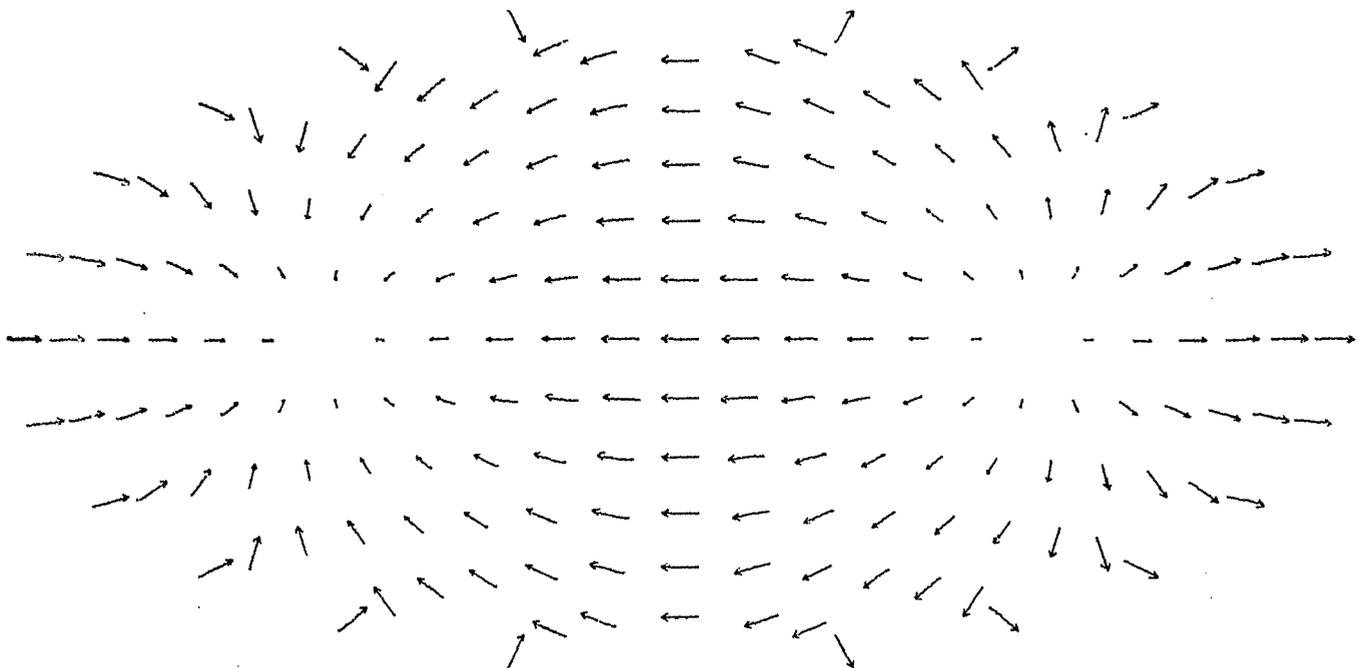
M:0 N:1 s:0 $\sigma:0$
ROTATIONSFREI

ABB. 2



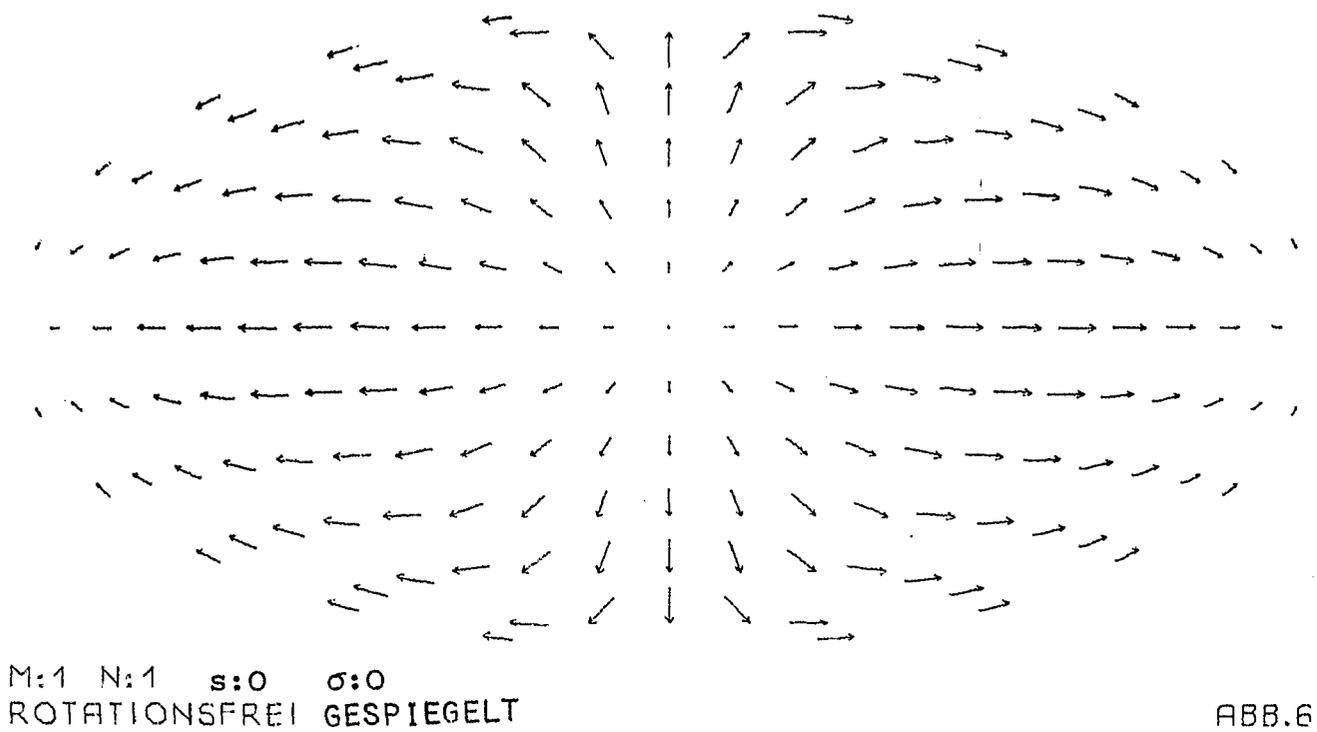
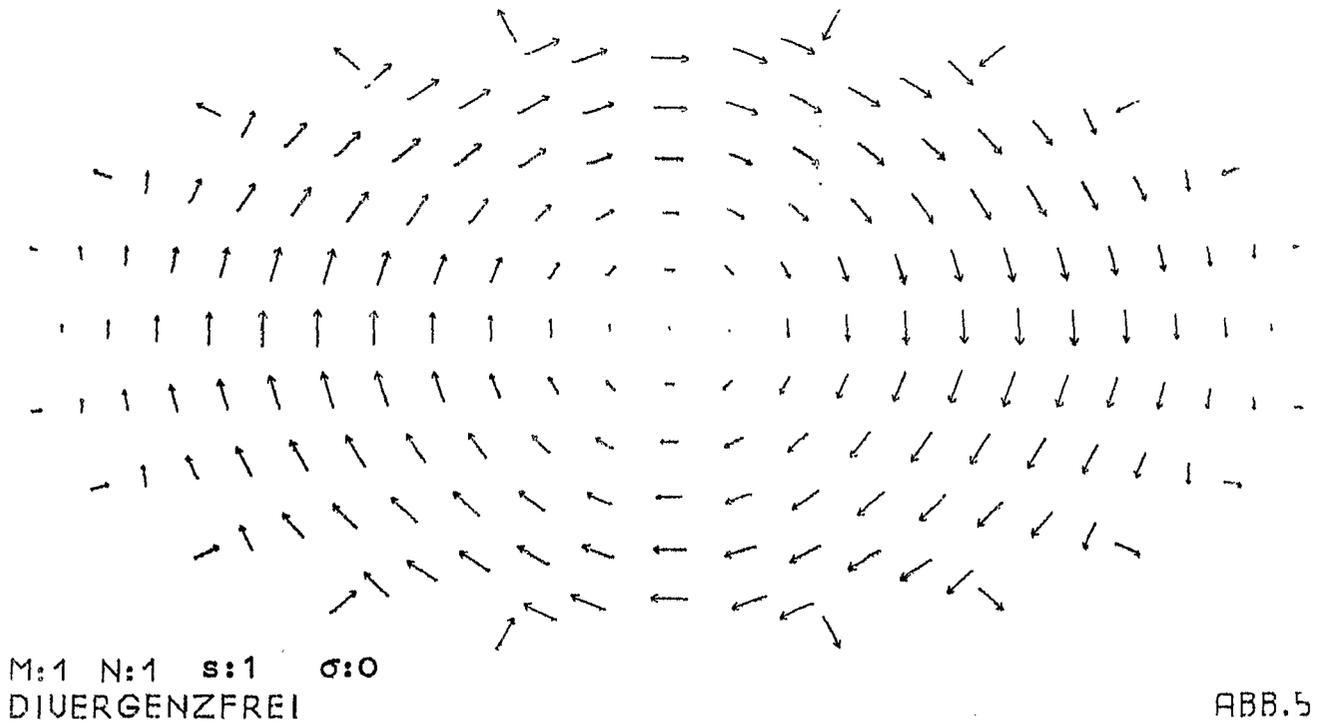
M:1 N:1 s:1 σ :1
DIURGENZFREI

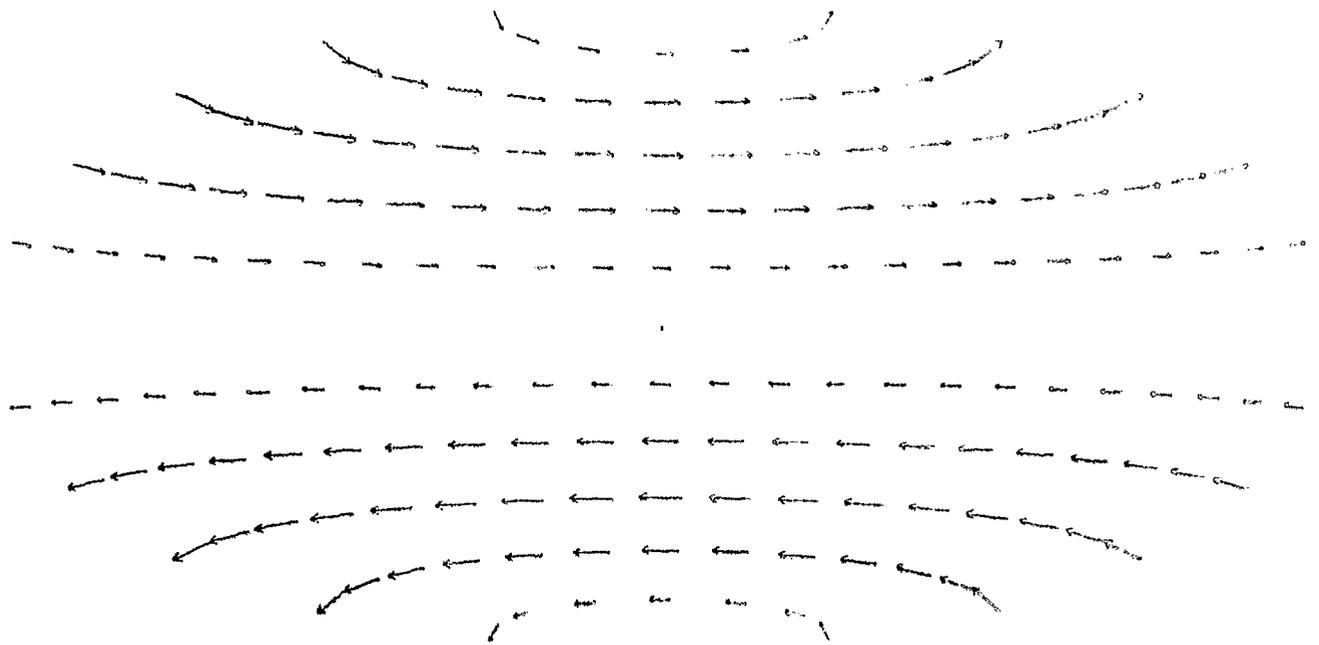
ABB.3



M:1 N:1 s:0 σ :1
ROTATIONSFREI GESPIEGELT

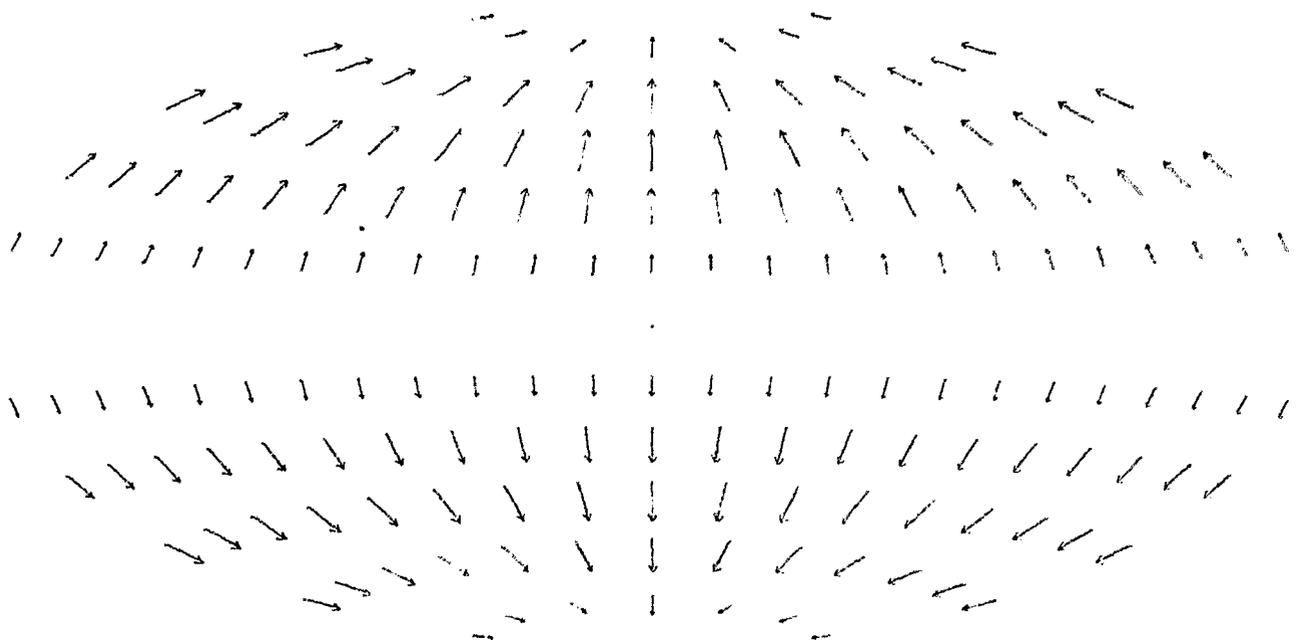
ABB.4





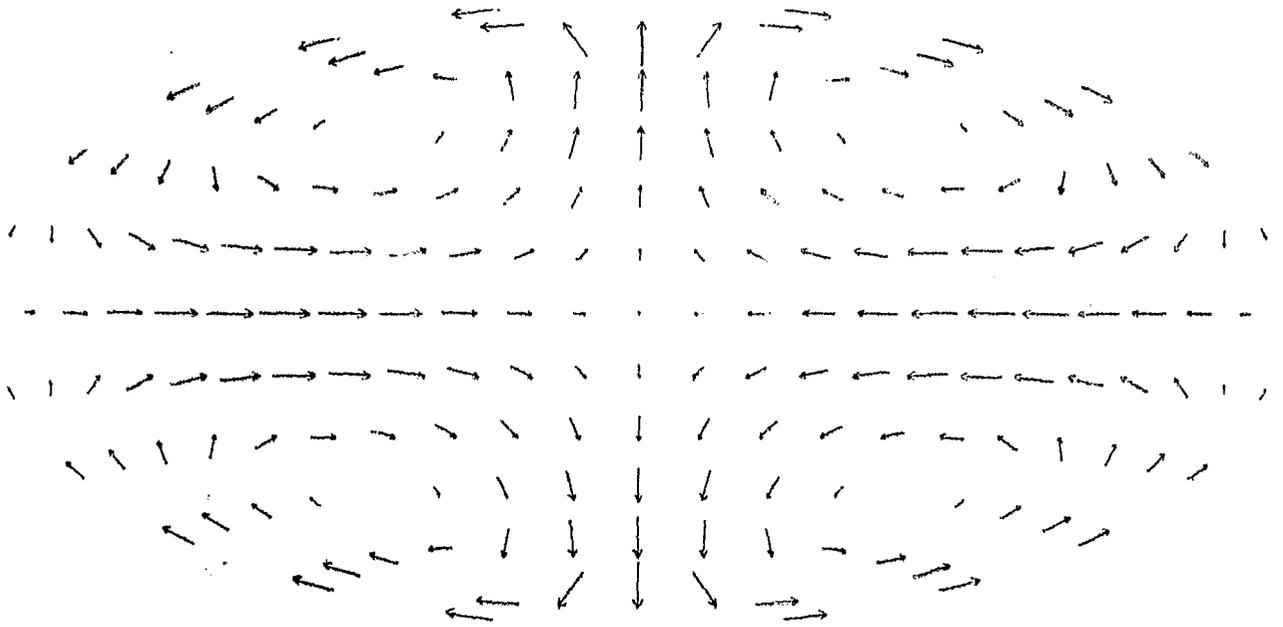
M:0 N:2 s:1 $\sigma:0$
DIVERGENZFREI

ABB.7



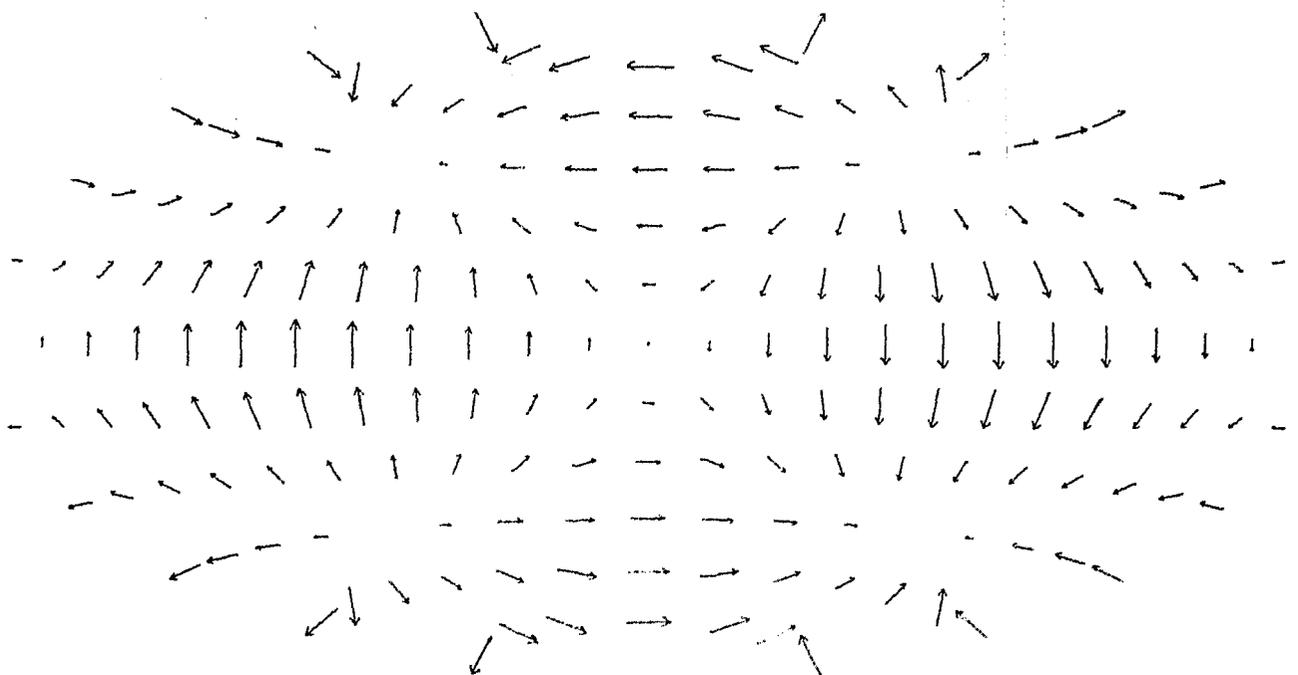
M:0 N:2 s:0 $\sigma:0$
ROTATIONSFREI GESPIEGELT

ABB.8



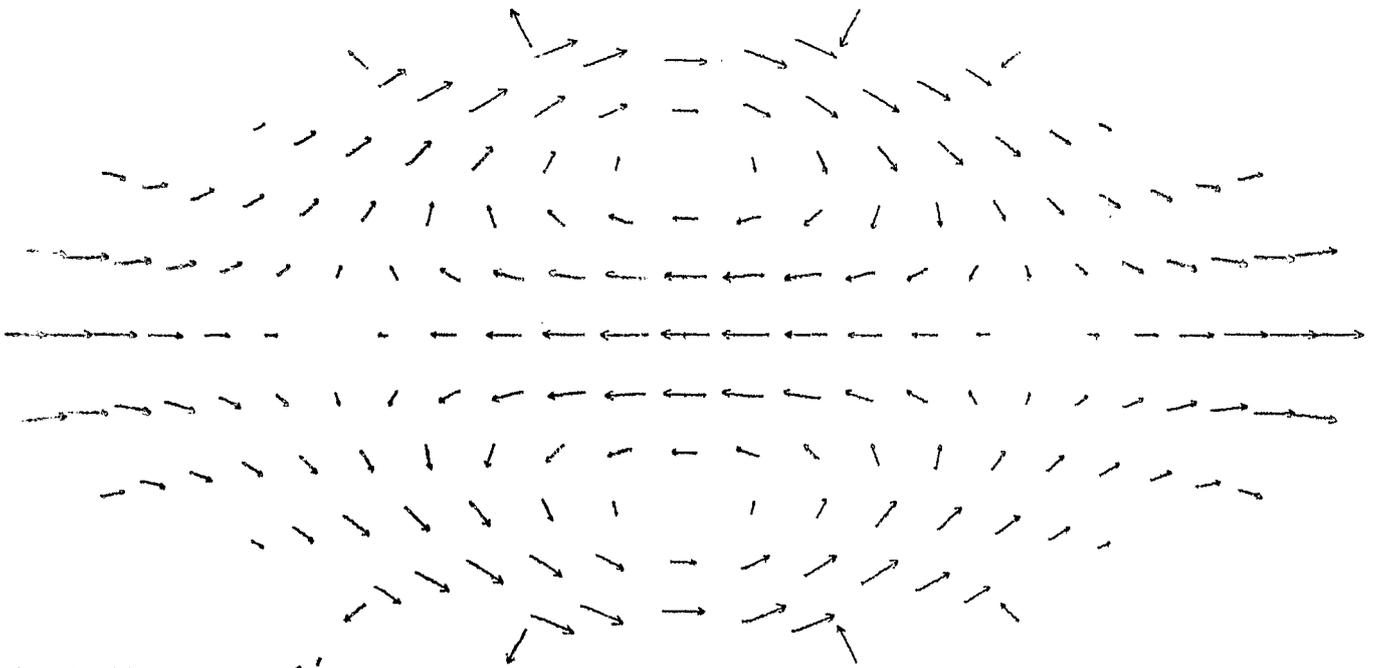
M:1 N:2 s:1 σ :1
DIVERGENZFREI GESPIEGELT

ABB.9



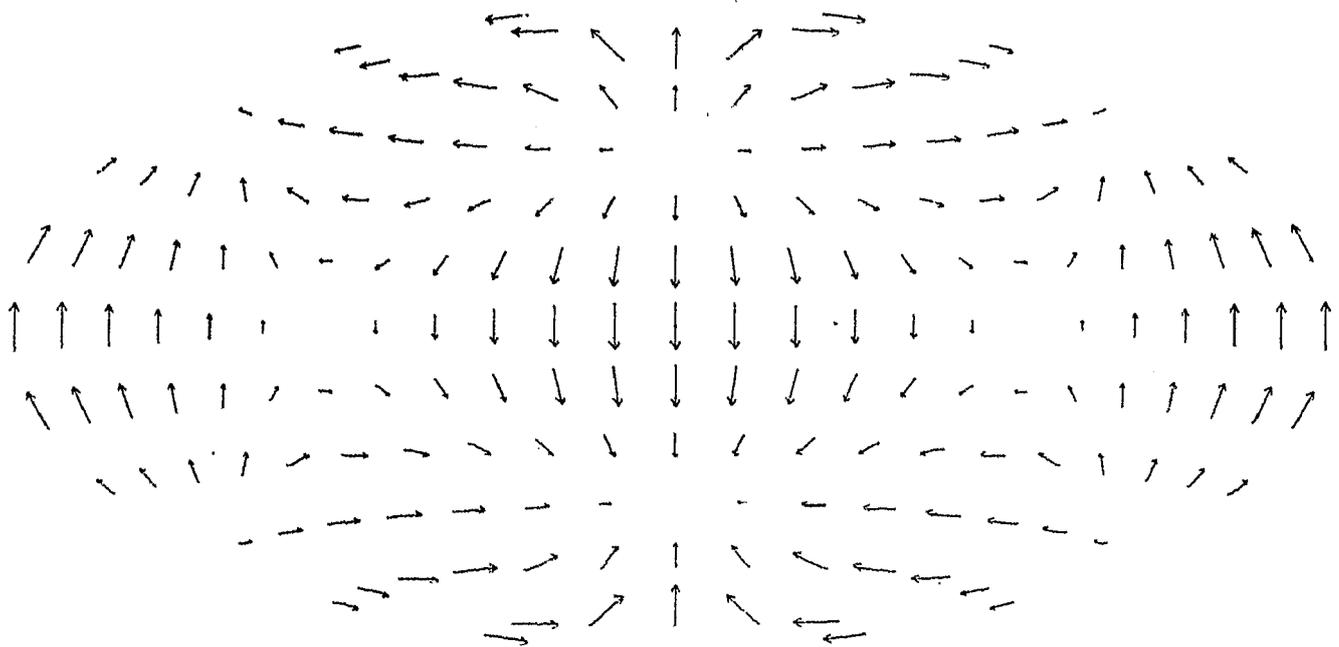
M:1 N:2 s:0 σ :1
ROTATIONSFREI

ABB.10



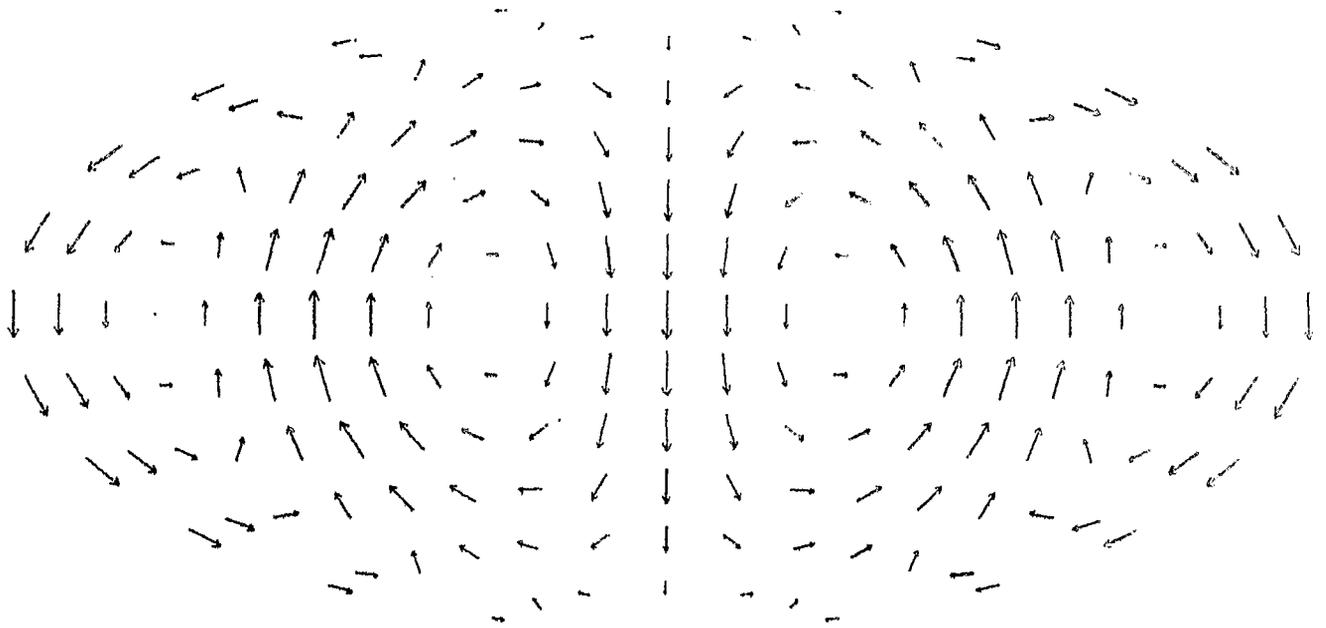
M:1 N:2 s:1 $\sigma:0$
DIURGENZFREI GESPIEGELT

ABB.11



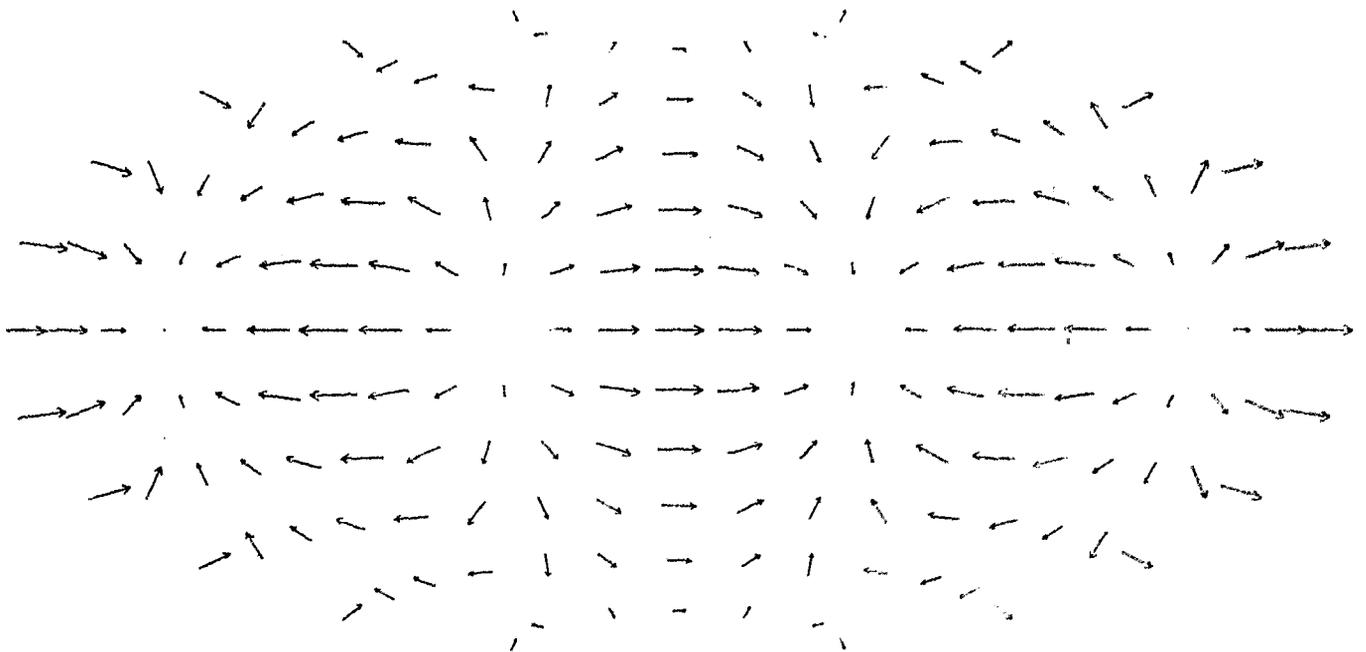
M:1 N:2 s:0 $\sigma:0$
ROTATIONSFREI

ABB.12



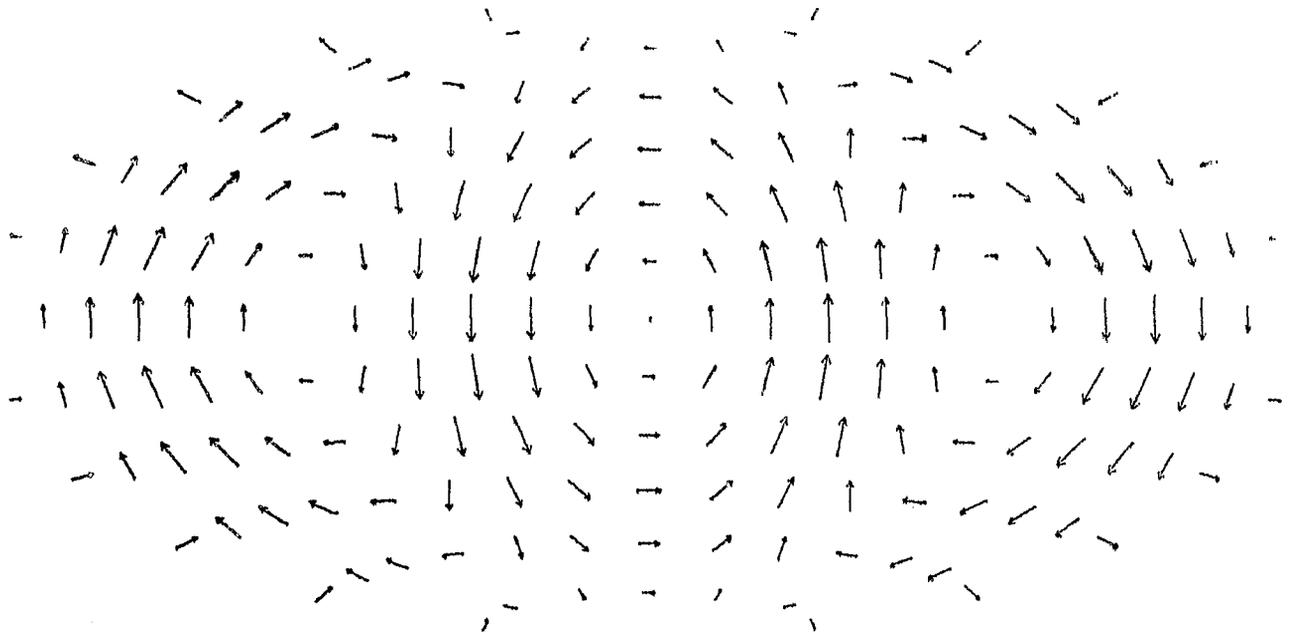
M:2 N:2 s:1 σ :1
DIVERGENZFREI

ABB.13



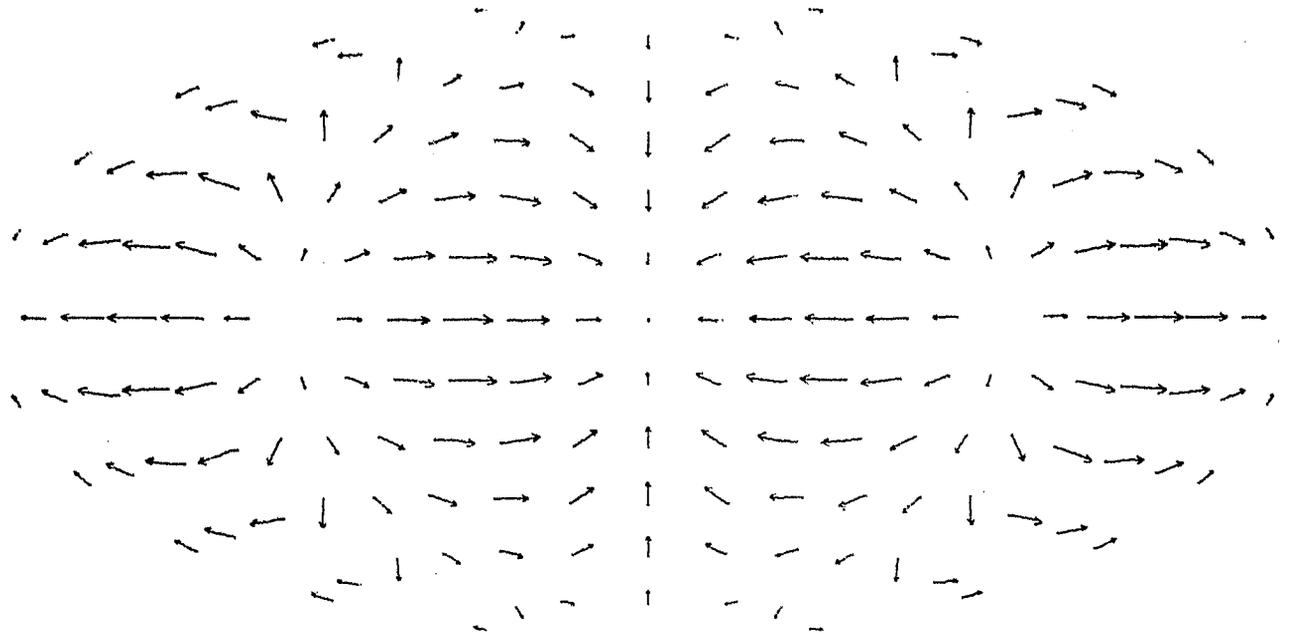
M:2 N:2 s:0 σ :1
ROTATIONSFREI GESPIEGELT

ABB.14



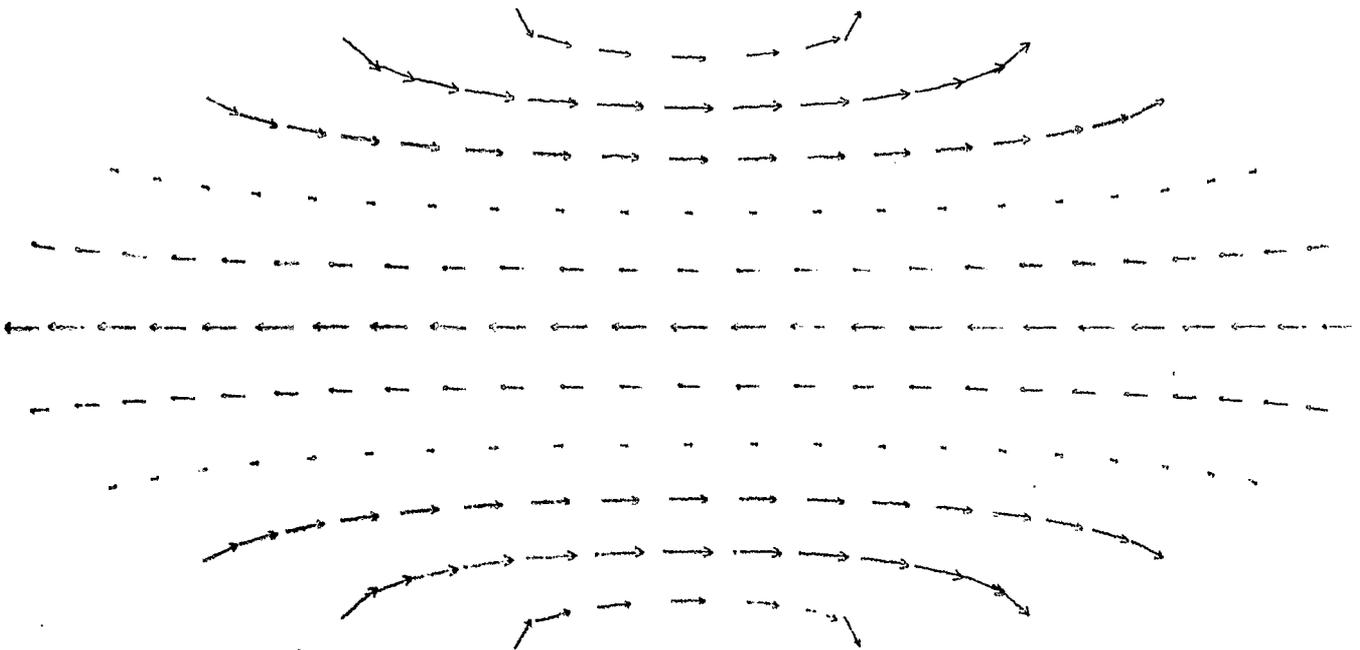
M:2 N:2 s:1 $\sigma:0$
DIURGENZFREI

ABB.15



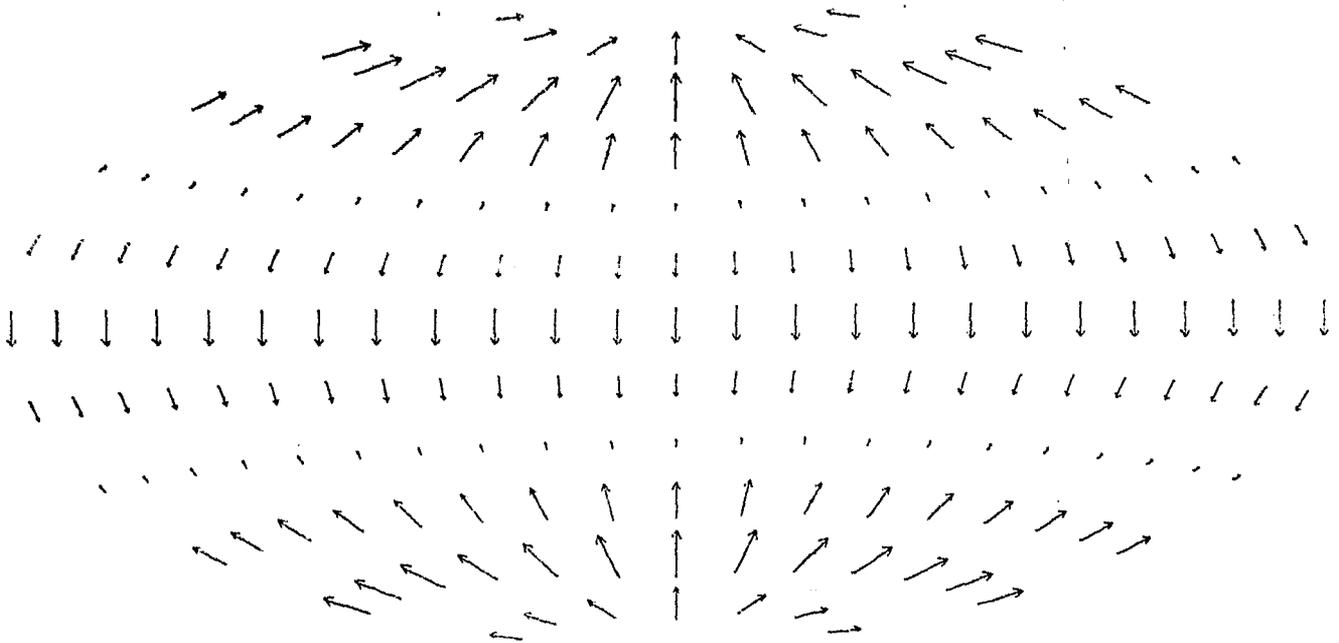
M:2 N:2 s:0 $\sigma:0$
ROTATIONSFREI GESPIEGELT

ABB.16



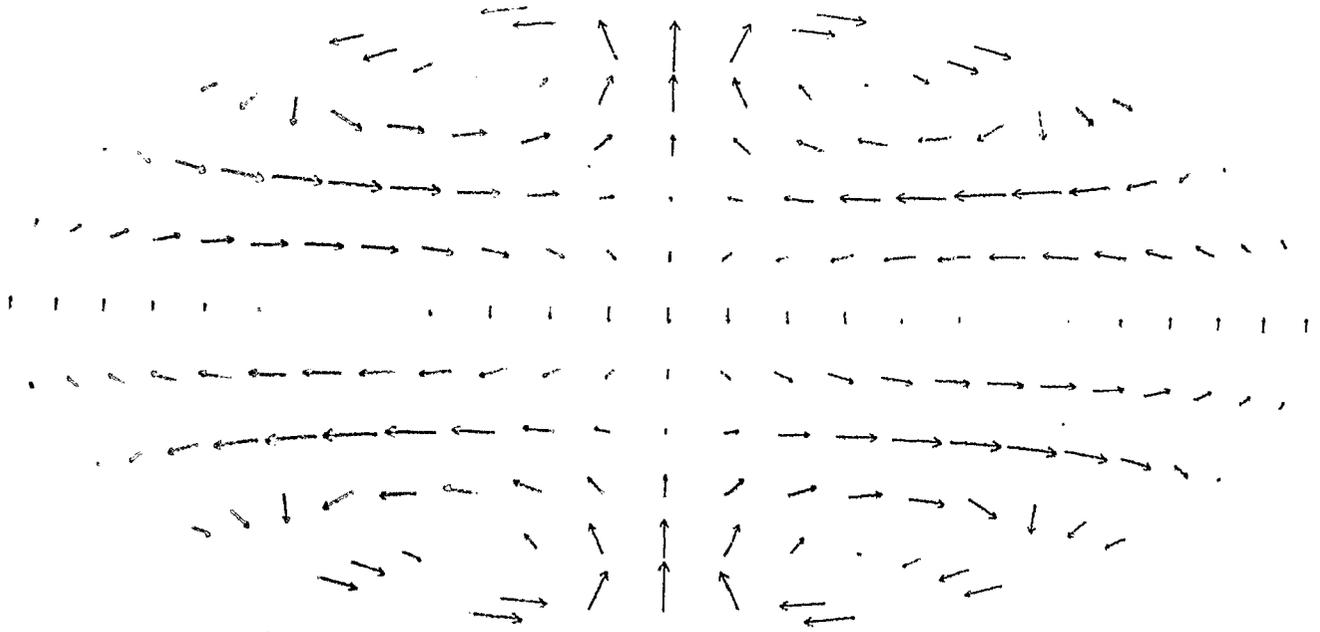
M:0 N:3 s:1 $\sigma:0$
DIURGENZFREI GESPIEGELT

ABB.17



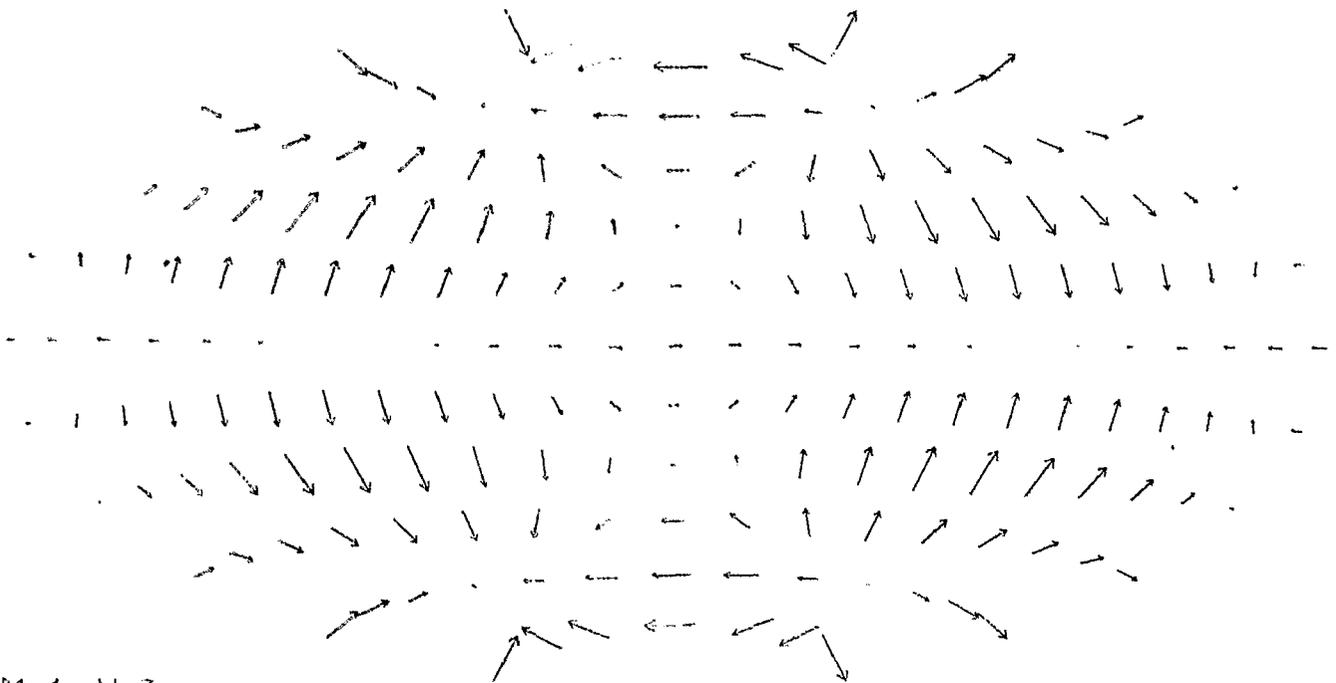
M:0 N:3 s:0 $\sigma:0$
ROTATIONSFREI

ABB.16



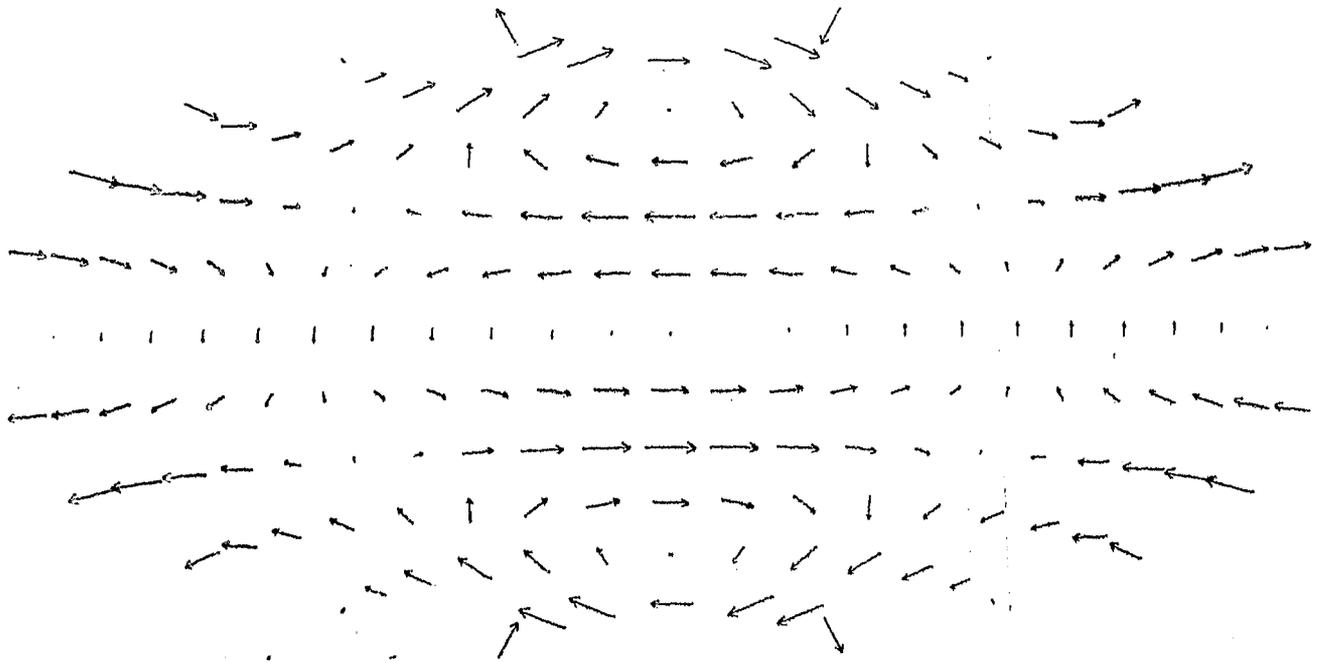
M:1 N:3 s:1 σ :1
DIVERGENZFREI

ABB.19



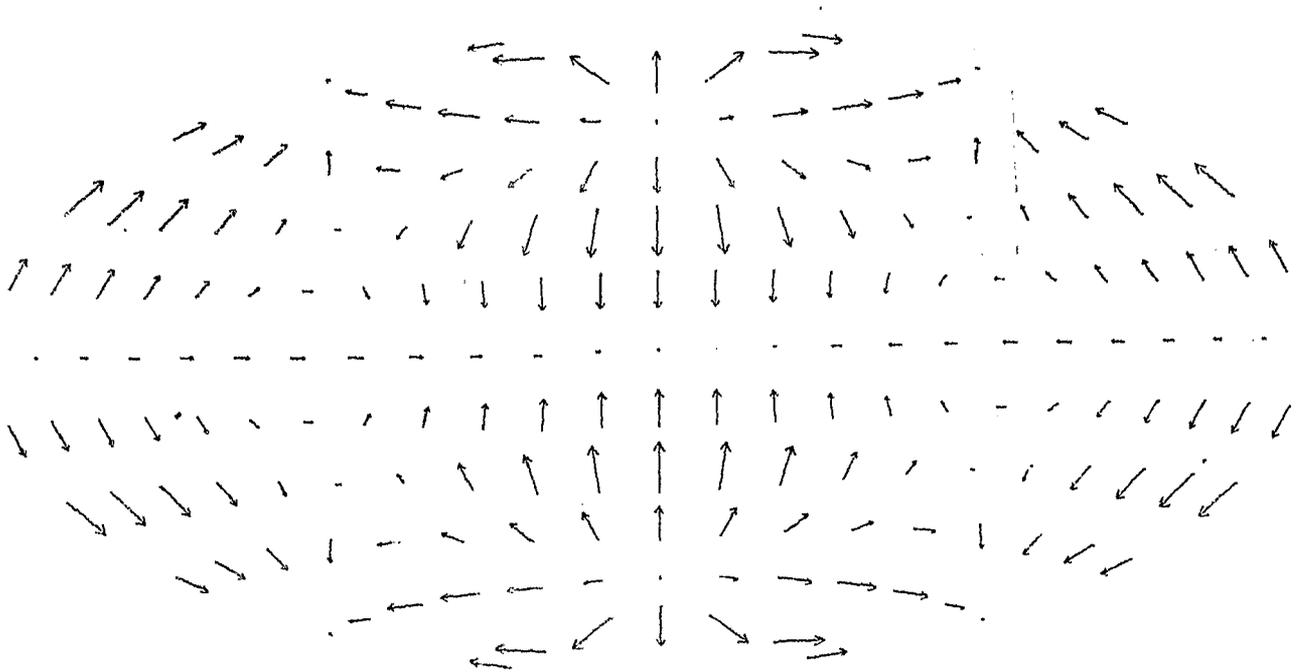
M:1 N:3 s:0 σ :1
ROTATIONSFREI GESPIEGELT

ABB.20



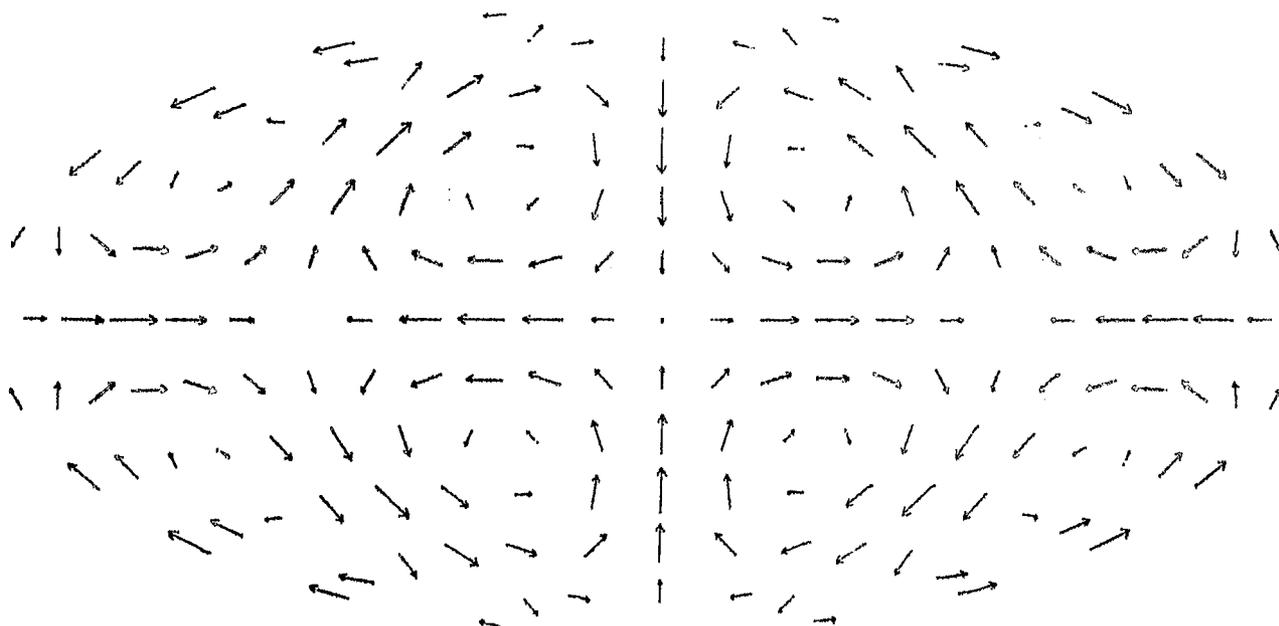
M:1 N:3 s:1 $\sigma:0$
DIURGENZFREI

ABB.21



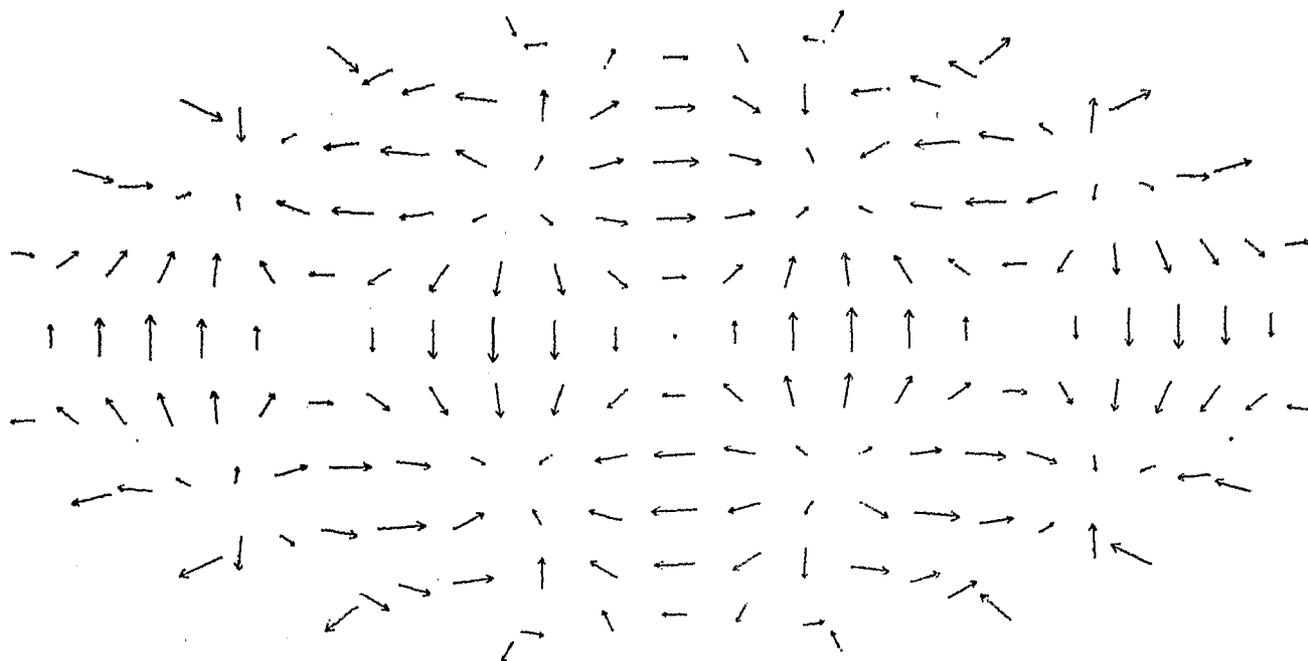
M:1 N:3 s:0 $\sigma:0$
ROTATIONSFREI GESPIEGELT

ABB.22



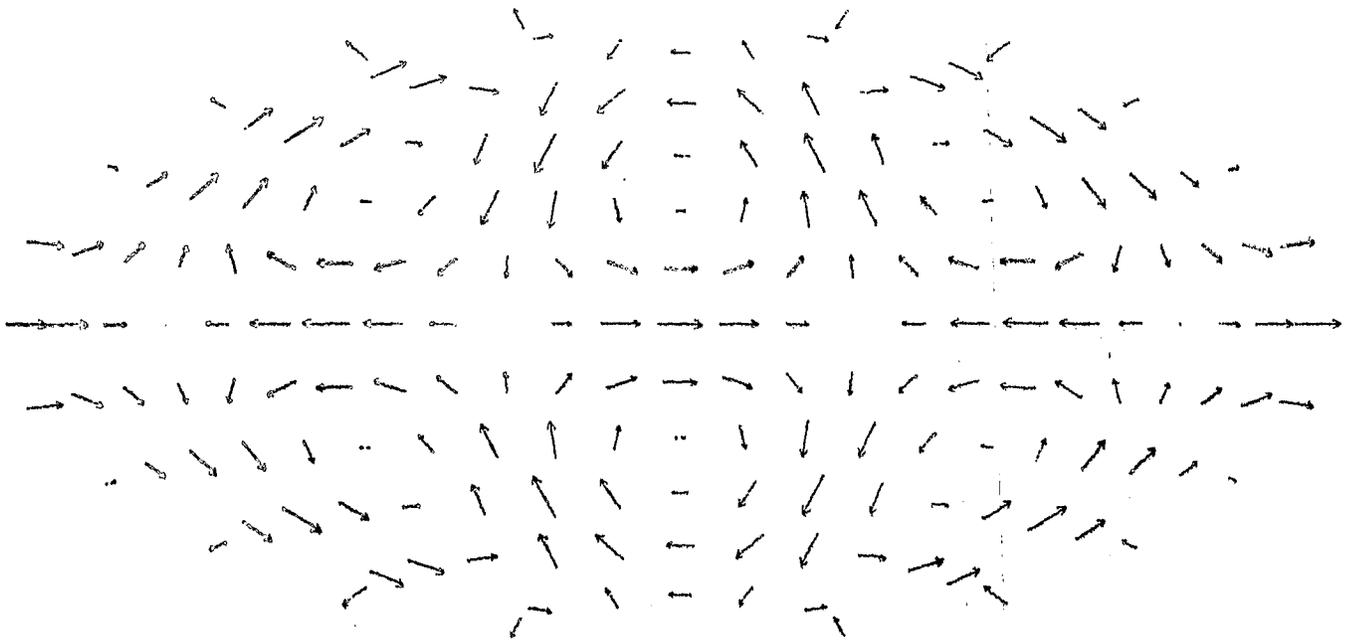
M:2 N:3 s:1 σ :1
DIURGENZFREI GESPIEGELT

ABB.23



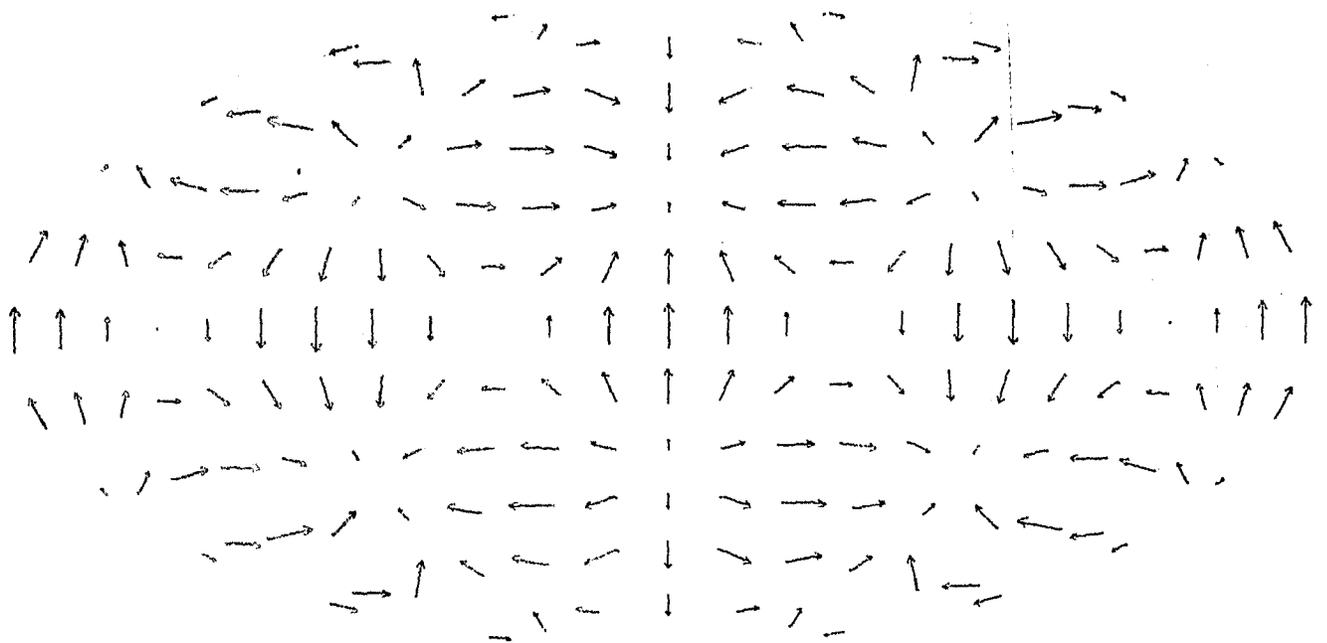
M:2 N:3 s:0 σ :1
ROTATIONSFREI

ABB.24



M:2 N:3 s:1 $\sigma:0$
DIURGENZFREI GESPIEGELT

BB.25



M:2 N:3 s:0 $\sigma:0$
ROTATIONSFREI

ABB.26

Danksagung

Diese Arbeit wurde im Rahmen eines Forschungs-Projekts über "Energiehaushalt und Zirkulation der Atmosphäre" durchgeführt und aus Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell unterstützt.

Alle Formeln wurden am Rechenzentrum der Kieler Universität an Hand von Beispielen durchgerechnet.

Allen Institutionen sei dafür gedankt.