

Diese Arbeit widme ich meinem Vater,

Prof. Dr. Albert D e f a n t,

und beglückwünsche Ihn zur Erreichung des hohen Alters von 90 Jahren. Ich wünsche Ihm noch viele weitere Jahre in geistiger und körperlicher Frische so, wie sie Ihm bisher vergönnt war.

Auch danke ich ihm damit für die verständnisvolle Fürsorge an meinem Fortkommen und dafür, daß er mir neben einem lieben Vater, auch ein guter Lehrer, ein steter Berater bei meiner wissenschaftlichen Arbeit und auch ein Richtungsweiser für wissenschaftliche Qualität war. Glücklicherweise war ich immer, mit ihm zusammenarbeiten zu dürfen, um von seinem großen Talent zu lernen, wenn auch der Standard, den er gesetzt hat, schwer erreichbar ist.

Mit Dankbarkeit und Liebe zum 12. Juli 1974

überreicht von

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Fritz Defant'. The signature is written in a cursive, slightly slanted style with a long horizontal stroke at the end.

Berichte
aus dem
Institut für Meereskunde
an der
Christian-Albrechts-Universität Kiel
(Abt. Meteorologie)

Nr. 4

DOI 10.3288/IFM_BER_4

DAS ANFANGSSTADIUM DER ENTWICKLUNG EINER BAROKLINEN
WELLENSTÖRUNG IN EINEM BAROKLINEN GRUNDSTROM

(Eine mathematisch-physikalische Diagnose)

von

FRIEDRICH DEFANT

Bezieher können Kopien dieser Arbeit erhalten von:
Requesters may obtain copies of this paper from:

Prof. Dr. Fr. Defant
Institut für Meereskunde
Direktor der Abt. Meteorologie

D 2300 Kiel 1
Düsternbrocker Weg 22

BRD

INHALTSVERZEICHNIS

Zusammenfassung

- I. Einleitung, Problemstellung
- II. Die theoretischen Grundlagen zur Diagnose barokliner Wellenstörungen
 - II.1. Die fundamentalen Gesetze
 - II.2. Zusammenfassung der Fundamental-Gesetze zu zwei diagnostischen Gleichungen, weitere Approximationen
 - 2.1. Die geostrophische geopotentielle Dicke Gleichung
 - 2.2. Die quasi-geostrophische Vorticity Gleichung
 - II.3. Die Ableitung der Geopotentiellen Tendenz Gleichung und der ω -Gleichung
(Das quasi-geostrophische System)
- III. Die Konstruktion eines realistischen analytischen Modells einer baroklinen Welle im anfänglichen Entwicklungsstadium
 - III.1. Die Wellenstörung und ihr vertikaler Aufbau
 - 1.1. Vier Beispiele als Richtschnur für die Modellgestaltung
 - 1.2. Das Modell
- IV. Der Grundstrom
- V. Analytische Ausdrücke zum Zweck einer Diagnose des baroklinen Systems
(Grundstrom plus überlagerter Wellenstörung)
- VI. Die Anwendung des quasi-geostrophischen Systems auf eine einem baroklinen Grundstrom überlagerte barokline Wellenstörung
 - VI.1. Das Vertikalgeschwindigkeitsfeld, Lösung der ω -Gleichung
 - 1.1. Eine diagnostische Regel
 - VI.2. Die Ergebnisse der Lösung der ω -Gleichung und ihre synoptische Interpretation
 - 2.1. Das ω_I -Feld als Folge absoluter Vorticity-Advektion
 - 2.2. Das ω_{II} -Feld als Folge von Temperatur-Advektion
 - 2.3. Das totale ω -Feld als Folge beider Antriebs-effekte (absolute Vorticity Advektion und horizontale Temperatur Advektion) und das Feld der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz
 - 2.4. Die Größe der Vertikalgeschwindigkeit und der horizontalen Divergenz
- VII. Die lokalzeitlichen Änderungen der relativen Vorticity ξ_g und der geopotentiellen Höhe ϕ (Tendenz)
- VIII. Die erzwungene Sekundär Zirkulation

Literaturverzeichnis

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer Diagnose einer sich im jungen Entwicklungsstadium befindlichen baroklinen Wellenstörung in einem baroklinen westlichen Grundstrom und den aus ihr zu ziehenden Folgerungen für seine zeitliche Fortentwicklung (barokline Instabilität).

Die Diagnose beruht auf der Anwendung aller wichtigen dynamischen sowie thermodynamischen Gleichungen in nur leicht approximierter Form, die zuerst zu zwei Fundamentalsgesetzen (quasi-geostrophisches System) zusammengefaßt werden.

Nach der Erstellung eines analytischen naturnahen und hydrostatisch balancierten Modells für eine solche Wellenstörung kurzer Wellenlänge (etwa 3200 km) und der damit möglichen Verfügbarmachung analytischer Ausdrücke für individuelle meteorologische Elemente und verschiedene horizontale Advektionsprozesse, werden letztere als Antriebsfunktionen für die Ermittlung der erzwungenen Vertikalbewegung verwendet.

Die ω -Gleichung wird unter verschiedenem solchen Antrieb gelöst, zuerst als Konsequenz der Wirkung der vertikalen Variation der horizontalen Advektion absoluter Vorticity, dann als Folge der horizontalen Temperatur-Advektion.

Schließlich wird das totale Vertikalgeschwindigkeitsfeld in einem solchen System als Folge der Summe beider Antriebe ermittelt und daraus die horizontale Divergenz-Verteilung bestimmt, zusammen mit den sich einstellenden lokalzeit-

lichen Änderungen der relativen Vorticity und der geopotentiellen Höhe.

Schließlich wird die Sekundärzirkulation, die in einem solchen jungen System operiert, zusammen mit jenen Prozessen, die sie erzeugt, besprochen.

Man kommt zum Schluß, daß solche Systeme erst der horizontalen Vorticity Advektion ihre Weiterentwicklung und Fortpflanzung nach Osten verdanken, bald nach dem Jungstadium aber die horizontale Temperatur Advektion gleichrangig wird und für die weitere Amplitudenvergrößerung der Störung maßgeblich Einfluß nimmt. Es bestätigt sich die synoptische Erfahrung, daß hohe Jetwinde über der Störung benötigt werden (hohe Baroklinität des Massenfeldes quer zum Grundstrom) um jene Größenordnung im Vertikalgeschwindigkeitsfeld auszulösen, die die Erfahrung erkennen gelehrt hat (nahes Zusammentreten von Polar- und Subtropenjet). Auch die Verringerung der vertikalen Stabilität erweist sich als wichtig.

Summary

This paper is concerned with a diagnosis of a baroclinic wave disturbance in the nascent stage of its life history embedded in a baroclinic westerly basic current and is concerned with the consequences of the diagnosis for the development in time (baroclinic instability).

The diagnosis rests upon the application of all important dynamic, as well as thermodynamic equations in only slightly approximated form, which are condensed into two fundamental laws (quasi-geostrophic system).

After construction of an analytic and hydrostatically balanced model of such a wave disturbance of short wave length (ca. 3200 km) according to synoptic experience, analytic expressions are thus available for individual meteorological elements and various horizontal advection-processes which can be used as forcing functions for the determination of the forced vertical motion.

The ω -equation is solved for different forcing terms of this kind; firstly as a consequence of the action of the vertical variation of absolute vorticity advection and secondly as a consequence of horizontal temperature advection. Further the total vertical motion field in such a system is obtained due to the sum of the above mentioned processes and from that the horizontal divergence field can be derived together with the local changes of relative vorticity and geopotential height.

Finally the "secondary circulation" operating inside such a nascent system is discussed together with those processes, which are responsible for it.

One arrives at the conclusion, that such systems owe their further development and their propagation towards east at first to the horizontal advection of absolute vorticity. But soon after the nascent stage horizontal temperature advection plays an equal role and will be responsible for the amplitude growth of the disturbance. It is seen that top velocity jet winds above the disturbance are required (t.i. large baroclinicity in the massfield cross current) in order to obtain an order of magnitude in the vertical motion which is in accordance with experience. Synoptic evidence shows that the development is particularly intense, when polar and subtropical jet are closely distant above such a nascent disturbance. Also the decrease (increase) of the vertical stability seems of rather important influence.

I. Einleitung, Problemstellung

In der Strömungsdynamik ist es eine bekannte Tatsache, daß Strömungen mit jet-artigem Geschwindigkeitsprofil und daher mit starken Stromscherungen beiderseits sowie oberhalb und unterhalb der Jet-Achse mit Hinsicht auf überlagerte kleine Wellenstörungen instabil werden können. Man meint damit den Umstand, daß jede solche Störung, die man einer solchen jet-artigen Grundströmung aufprägt, dazu neigt, ihre Amplitude zu vergrößern, während sie im Verlaufe ihres Wachstums dem Grundstrom Energie entzieht.

Dies trifft in gleicher Weise auch für die atmosphärische Westwinddrift (Polarfrontjet) über den gemäßigten und höheren Breiten der Erde zu, da in ihr eingebettete Systeme von synoptisch beobachtbarer Größe sich als ein Resultat von Instabilität der atmosphärischen Jet-Störung zu entwickeln pflegen. Diese sogenannte "barokline Instabilität" hängt primär von der vertikalen Windscherung der Jet-Grundströmung ab, d.h. sie hängt entsprechend der thermischen Windgleichung vom meridionalen Temperaturgefälle ab und wird daher primär in der Region der Polarfront-Zone auftreten. Diese Art von Instabilität ist jedoch nicht identisch mit der sogenannten frontalen Instabilität.

Von jahrelang durchgeführten synoptischen Studien und synoptischen Routine Analysen in den Wetterdiensten aller Länder weiß man, daß Zyklonen der gemäßigten und höheren Breiten sich entlang der Polarfront als eine Konsequenz barokliner Instabilität zu entwickeln pflegen. Man weiß auch, daß sie

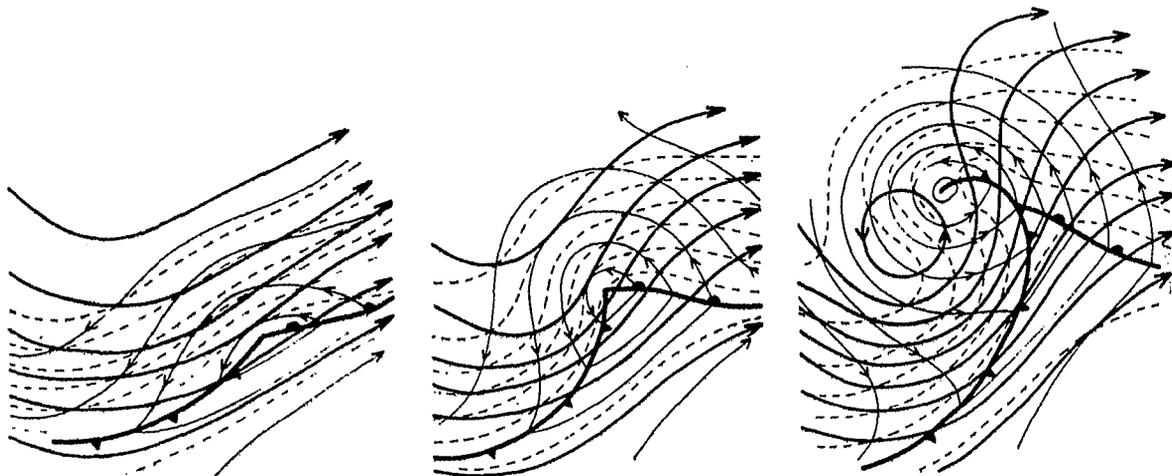


Fig. 1 Drei Zeitmomente aus der Lebensgeschichte einer sich entwickelnden Zyklone der gemäßigten Breiten (schematisch).

Links: Wellenstadium

mitte: Idealstadium

rechts: schon okkludiertes Wirbelstadium

*Dick ausgezogene Linien: Geopotentialfeld der 500 mb-
Fläche*

dünn ausgezogene Linien: Bodenisobaren

*gestrichelte Linien: relative Topographie Boden-500mb,
(geopot. Schichtdicke oder Mittel-
temperatur)*

repräsentiert ist, erscheint der Umstand besonders wichtig, daß im Anfangsstadium (nascent stage) das Zentrum der Störung warm, die Rückseite kalt ist, daß also in den tiefen Niveaus das Druck- und Temperaturfeld um nahezu 180° außer Phase sind. Mit wachsender Höhe und damit allmählichem Eintreten in die darüber sich befindliche kurze obere Wellenstörung richtet sich das Temperaturfeld weitgehend in Phase auf das Druckfeld ein, so daß der Wellentrog kalt, der Wellenrücken warm sind. Dies heißt dann, daß sich die Achse mit größter Druckerniedrigung nach oben hin westwärts neigt, während sich die Achse wärmster Luft nach oben hin vorwärts oder ostwärts neigt, also eine umgekehrte Neigung (tilt) aufweist.

Dieses "out of phase" Verhalten eines jungen baroklinen Systems ist enorm wichtig für den Ablauf energetischer Umsetzungen und für seine weitere Fortentwicklung zu einem intensiven zyklonischen und hochreichenden Wirbel, welcher sich im Endstadium durch eine fast vertikale Achsenlage (oder sogar nach vorne, also ostwärts, geneigten) auszeichnet, [5], [7], [8], [10], [11], [20].

Wie man bald erkannt hat, wird die in der näheren Umgebung der Polarfront als Luftmassengegensatz gespeicherte potentielle Energie durch Hebung von warmer und Senken von kalter Luft im sich entwickelnden Vertikalgeschwindigkeitsfeld freigemacht und in kinetische Energie umgesetzt (Sturmerzeugung nach M. Margules oder E. Lorenz), [15], [14].

Den physikalisch-dynamischen Gegebenheiten innerhalb eines solchen baroklinen zusammengesetzten atmosphärischen Systems und den sich daraus zwangsläufig ergebenden wichtigen Konsequenzen für seine instabile Entwicklung kommt daher hohe

Bedeutung zu.

Zur völligen Klarstellung des Gegenstandes, mit dem sich die nachfolgende Arbeit befaßt, soll noch ein Beispiel (siehe Fig. 2) eines derartigen Vorgangs, der sich immer und immer wieder innerhalb der atmosphärischen Westwinddrift vollzieht, präsentiert werden. Es handelt sich um eine intensive Zyklognese beginnend westlich von England am 11. Februar 1970, 00 GMT (Wellenstörung, nascent stage) aus der sich im Verlaufe von nur 36 Stunden bis zum 12. Februar 1970, 12 GMT ein schon okkludierter Sturmwirbel mit einem Kerndruck von 969 mb über dem englischen Kanal entwickelt. Das Idealstadium liegt irgendwo zwischen dem 11. und 12. II, 00 GMT, wurde also rasch durchlaufen. Nach der extremsten Wirbelphase mit tiefstem Kerndruck füllt sich der Wirbel bei weiterer Okklusion erst rasch, dann etwas verlangsamt auf, während er sich bis zur östlichen Ostsee ENE-wärts fortbewegt.

Der in der Fig. 2 eingerahmte Geburtszustand (siehe linke Bildseite) zeigt nun eine wellenhafte Bodenstörung (Kerndruck 1007,5 mb) gefolgt von einem Bodenhoch östlich von Neufundland (> 1030 mb) überlagert von einer oberen Wellenstörung relativ kurzer Wellenlänge in den höheren Druckniveaus der Troposphäre, repräsentiert durch die gestrichelt gezeichneten Linien (= Geopotentialfeld der 500 mb Fläche). Diese Wellenlänge beträgt in 50°N etwa 40 bis 45 Längengrade, d.h. etwa 9 oder 8 solche Wellen auf dem gesamten Breitenkreis rund um die Erde. Vom Bodentief angefangen neigt sich also die Achse tiefen Drucks deutlich bis zum oberen Trog mit wachsender Höhe

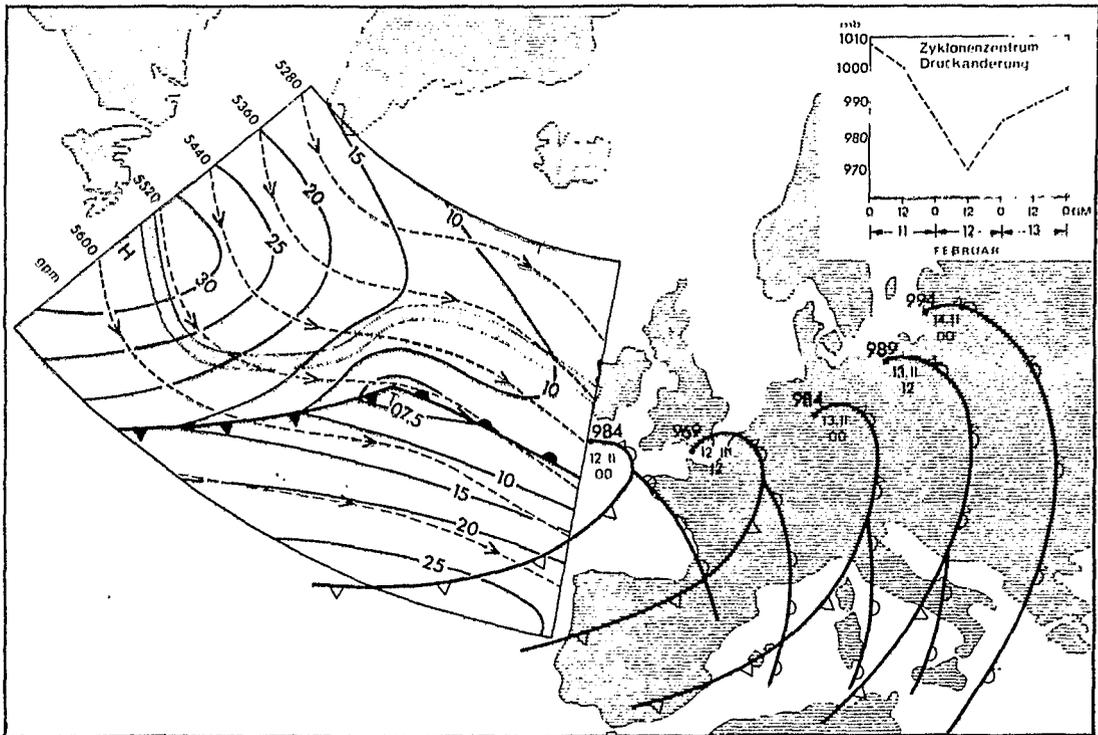


Fig. 2 Tatsächlicher Fall einer Zyklonenentwicklung über dem östlichen Atlantik und Westeuropa vom 11. Februar 1970, 00 GMT (Wellenstadium) bis zum 14. Februar 1970, 00 GMT

westwärts (Achsenneigung etwa 1:171).

Was das Temperaturfeld angeht, so ist der weit offene Warmsektor der Bodenstörung von warmer Meeresluft mit Temperaturen zwischen 12 und 15°C (oo GMT) erfüllt, während westlich der Kaltfront kalte Polarluft (3 bis 7°C) im Bereich bis zum Bodenhoch mit NNEwinden südwärts strömt. Das Temperaturfeld am Boden ist also mit dem Bodendruckfeld um fast 180° außer Phase. Das Temperaturfeld in der Höhe ist durch das wellenförmige schattierte Band in Fig. 2 repräsentiert, welches die Polarfront in 500 mb symbolisiert. Innerhalb dieses Bandes sind in charakteristischer Weise die Isothermen von -27° bis etwa -33°C konzentriert, so daß nördlich der Polarfront die kalten Massen (-33° bis -39°C) und südlich von ihr die recht warmen z.T. tropischen Massen (-27 bis -17°C) in der 500 mb Fläche beobachtet sind. Dadurch wird offenbar, daß sich die Achse maximaler Temperatur aufwärts etwas nach Osten neigt und sich das obere Temperaturfeld in 500 mb mit dem Geopotentialfeld schon weitgehend in Phase befindet (kalter Trog versus warmer Rücken).

In der 300 bzw. 200 mb Fläche wird dieses Störungssystem von intensivsten Jet-Winden überweht (siehe Täglichen Wetterbericht, Deutscher Wetterdienst, Jahrgang 95, Nr. 42, Seite 7), wobei neben den Radiosondenstationen Winde während eines Fluges von Neufundland nach England direkt über der Störung von einer Stärke von 115 Knoten = 59 m/sec = 213 km/Std. beobachtet wurden. Auch Camborne, Valentia und Belmullet melden in diesen Höhen durchwegs Winde >100 Knoten.

Das Wolken- bzw. Strömungsfeld dieser Störung soll noch eine

Satellitenaufnahme verdeutlichen (siehe Fig. 3) (siehe FORTAK [9] , Titelbild und S. 32). Das Satellitenbild bezieht sich etwa auf eine Zeit zwischen 11. II., 00 GMT und 12. II., 00 GMT, also das Zeitstadium der Idealzyklone oder etwas früher. Deutlich erkennt man den As bzw. N_s -Schirm an der Vorderseite (Warmfront Aufgleitvorgang) sowie die bandartige Struktur des Kaltfront-Wolkenfeldes sowie in ihrer Rückseite vorhandene offene Zellen von Zellular-Konvektionswolken verschiedenster Größe und bandartige Konvektions-Wolken, aus deren Verlauf man deutlich den Zustrom der polaren Kaltluft erkennen kann.

Einer detaillierten Analyse und Diagnose eines solchen Anfangszustandes unter Zuhilfenahme der gültigen mathem.-physikalischen Gesetze und den daraus sich ergebenden Folgerungen für die weitere instabile Zyklonenentwicklung hinsichtlich des Antriebs und der sich einstellenden Vertikalbewegung, die maßgeblich das Wolken- und Niederschlagsfeld verursacht, sowie der Einrichtung von typischen sekundären Zirkulationen ist die nachfolgende Arbeit gewidmet.

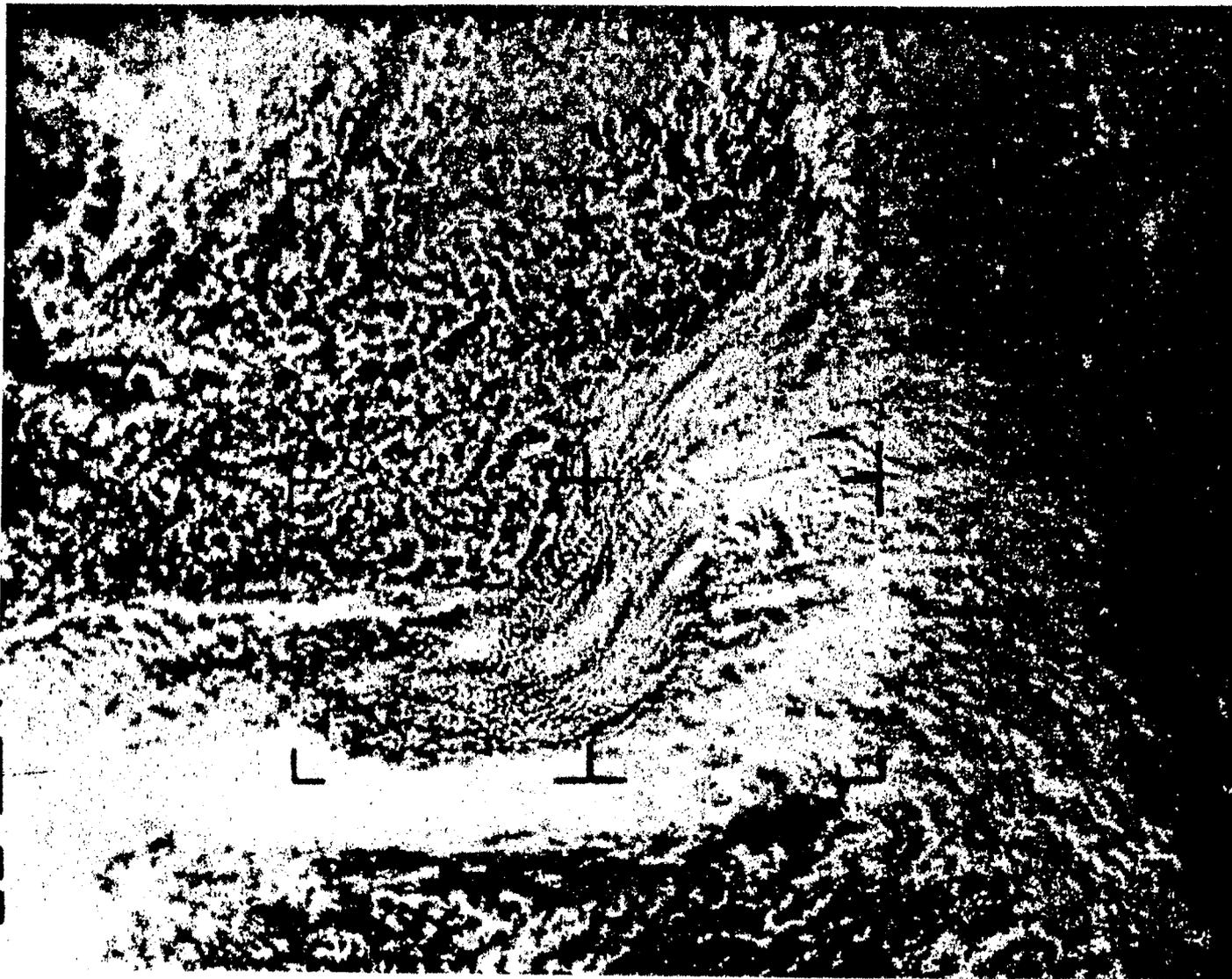


Fig. 3 Satellitenaufnahme der Wellenzyklone vom 11. Februar 1970 westlich von Irland (aus H. FORTAK, Meteorologie, Deutsche Buch-Gem., 1971, Titelbild und Seite 32)

II. Die theoretischen Grundlagen zur Diagnose barokliner Wellenstörungen

II.1. Die fundamentalen Gesetze

Um die beobachtete Struktur barokliner Wellenstörungen diagnostizieren zu können und Konsequenzen, die sich aus ihrem physikalischen Aufbau und ihrer internen Struktur ergeben, analysieren und ableiten zu können, ist es nötig,

(A) alle auf die atmosphärische Bewegung anwendbaren fundamentalen Gesetze hydrodynamischer und thermodynamischer Art heranzuziehen und sie in mathematischer Form darzulegen. Da sich die meteorologischen Beobachtungen in der freien Atmosphäre nach internationaler Übereinkunft auf Flächen konstanten Drucks beziehen, ist es angebracht, die Gesetze auf ein mit der Erde mitrotierendes (relatives) Koordinatensystem zu beziehen (die beiden horizontalen Koordinaten x , y weisen positiv nach Osten bzw. nach Norden und als vertikale Koordinate, die zum lokalen Zenith weist, wird der Luftdruck p gewählt, der nach unten zunimmt (nach oben abnimmt); das bedeutet die Wahl eines sogenannten isobaren Koordinaten-Systems oder kurz p -Systems. Weiterhin erscheint es notwendig,

(B) diese Gesetze zu einem etwas vereinfachten Gleichungssatz zusammenzufassen, weil sie sich in ursprünglicher Form wenig für eine Diagnose schwierig aufgebauter Störungen eignen, obwohl sie einzeln für sich streng anwendbar sind. Auch läuft man bei Einzelanwendung Gefahr, Konsequenzen aus einem ebenso gültigen Nachbargesetz zu negieren und schließlich wird zu zeigen sein,

(C) daß geleitet durch sogenannte "scale" Analysis (Analyse der Größenskala einzelner Terme) angewandt auf diese Gleichungen schließlich Beziehungen resultieren, die es erlauben, wichtige physikalische Vorgänge innerhalb barokliner Störungen, welche sich allein durch die räumliche Verteilung des Geopotentials $\phi = gz$ beschreiben lassen, mit den Feldern der lokalzeitlichen Veränderung des Geopotentials ϕ (Druckänderung) und der zu einem Gleichgewicht nötigen Vertikalgeschwindigkeit $\omega = dp/dt$ in Verbindung zu bringen.

Um diese gesteckten Ziele (A), (B), (C) zu realisieren, beginnt man am zweckmäßigsten mit den Gesetzen selbst:

Für Störungen im synoptisch beobachtbaren "scale" gelten für die horizontal (entlang im Raum gewellter Druckflächen) ablaufende Bewegung, die nach dem 2. Newton'schen Gesetz für das relative Koordinatensystem gültigen beiden Bewegungsgleichungen:

$\frac{du}{dt} - fv = - \frac{\partial \phi}{\partial x}$	(1)	Horizontale Komponentengleichungen der relativen Bewegung
$\frac{dv}{dt} + fu = - \frac{\partial \phi}{\partial y}$	(2)	gung

wobei $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ die totalen, individuellen Beschleunigungen der Luft mit $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p}$ und $-fv$, fu die entsprechenden Coriolis Beschleunigungen in der x - bzw. y -Richtung bezeichnen mit $f = 2 \Omega \sin \phi$, $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$. Die Glieder $-\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $-\frac{\partial \phi}{\partial y}$ sind die jeweiligen Komponenten der Druckkraft pro Masseneinheit mit $\phi = gz = \text{Geopotential}$ und $g = \text{Schwerebeschleunigung}$. Hier und im folgenden gilt wegen des gewählten p -Systems, daß alle partiellen Ableitungen auf isobaren Flächen und nicht auf

Flächen konstanter Höhe zu nehmen und zu deuten sind.

$\omega = \frac{dp}{dt}$ ist die "generalisierte" Vertikalgeschwindigkeit im p-System.

Keine Berücksichtigung erfährt dabei die Reibung, deren Einflußnahme auf die Bewegung durch den Einbau von Komponenten einer Reibungskraft in Gleich. (1) und (2) erfolgen müßte. Obwohl grundsätzlich in verschiedenster Weise möglich, soll hier Reibungseinfluß noch unberücksichtigt bleiben.

Die dritte Komponentengleichung der Bewegung reduziert sich durch "Scale-Analyse" mit größter Näherung auf das hydrostatische Gleichgewicht, welches im p-System durch die allbekannte Beziehung:

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial p} = - \alpha = - \frac{1}{\rho}} \quad (3) \quad \text{Hydrostatische Grundgleichung}$$

seinen Ausdruck findet, wobei $\alpha = \frac{1}{\rho}$ das spez. Volumen und ρ die Dichte der Luft bezeichnen. Die Beziehung (3) kann mit Hinzunahme der Zustandsgleichung für feuchte Luft modifiziert werden. Letztere lautet:

$$\boxed{p\alpha = R_d T_v \stackrel{\sim}{=} R_d T} \quad (4) \quad \text{Zustandsgleichung feuchter Luft}$$

worin $T_v = T(1+0,61 q)$ die virtuelle Temperatur und R_d die Gas-konstante der trockenen Luft bezeichnen. Der virtuelle Temperaturzuschlag $0,61 qT$ enthält die spez. Feuchte q [10^{-3} gr Wasserdampf/ gr feuchter Luft] und ist nur in tieferen Niveaus von solcher Größe, das T_v sich wesentlich von T unterscheidet.

Kombination von Gleich. (4) und (3) ergibt daher die Beziehung:

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial p} = - \left(\frac{R_d}{p} \right) T} \quad (3a)$$

und ihre Integration über eine Schichte kleiner Dicke (Obergrenze b, Untergrenze a) liefert die bei der Auswertung eines Radiosondenaufstiegs erforderliche "barometrische Höhenformel":

$$\phi_b - \phi_a = \Delta\phi = - R_d \int_a^b T_v \delta(\ln p) = \frac{R_d}{9,8} \bar{T}_v \ln \frac{p_a}{p_b} \quad (3b)$$

die eine eindeutige Zuordnung des Geopotentials (oder der geopotentiellen Höhe einer Druckfläche) zu gemessenen Druck-, Temperatur- sowie Feuchtwerten in der Vertikalen ermöglicht. (Siehe auch INT. METEOROL. TABLES, WMO No. 188.TP.94 3.2/3/4, Genf 1966).

Ein weiteres wichtiges Gesetz ist jenes von der Erhaltung der Masse, das für das p-Koordinatensystem die einfache Form:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (5) \text{ Kontinuitätsgleichung}$$

annimmt. Sie ist dem Bau nach ähnlich der Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Medium $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ gültig für ein z-System, unterscheidet sich aber neben den unterschiedlichen Ableitungen auf p- oder z-Flächen im dritten Gliede auf der linken Seite $\left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)$, wobei $\omega = \frac{dp}{dt}$ die sogenannte "generalisierte" Vertikalgeschwindigkeit bezeichnet. Ihre Verknüpfung mit der Vertikalgeschwindigkeit w ist etwas schwierig:

$$\omega = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z}, \text{ also } w = -\frac{1}{g\rho} \left\{ \omega - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_h \cdot \nabla_h p \right) \right\}$$

und nur in erster Näherung gilt $w \approx -\frac{\omega}{g\rho}$.

Ein weiteres Gesetz ist der erste Hauptsatz der Wärmelehre oder die thermodynamische Energiegleichung, wie man sagt.

In Entropieform lautet sie:

$$\frac{Q}{T} = \frac{dS}{dt} = c_p \frac{d \ln T}{dt} - R \frac{d \ln p}{dt} = c_p \frac{d \ln \theta}{dt} \quad (6) \quad \begin{array}{l} \text{Thermodynam.} \\ \text{Energiegleichung} \end{array}$$

worin Q das Ausmaß an externer nicht-adiabatischer Wärmezufuhr pro Masseneinheit, S die Entropie, c_p die spez. Wärme bei konstantem Druck und θ die potentielle Temperatur kennzeichnen.

Letztere ist definiert als:

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/c_p} = \frac{p \alpha}{R} \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/c_p} \quad (7) \quad \begin{array}{l} \text{Definitionsgleichung} \\ \text{der pot. Tempera-} \\ \text{tur} \end{array}$$

Die Beziehungen zwischen den abhängigen Variablen $u, v, \omega, \phi, \alpha, \theta$ (T) sind durch den Satz fundamentaler Gleichungen (1) bis (7) vollständig spezifiziert. Natürlich ist dieser Gleichungssatz seit langem ein wohlbekanntes Gut meteorologischer Lehre und in jedem kompetenten Textbuch nachlesbar z.B. [10], [11], [12], [14].

II.2. Zusammenfassung der Fundamental-Gesetze zu zwei diagnostischen Gleichungen, weitere Approximationen

Obwohl schon etwas vereinfacht erscheint die simultane Verwendung aller in II.1. dargelegten Gesetze schwierig. Zum Zwecke der Diagnose synoptischer Störungen empfiehlt es sich daher zu versuchen, wenn möglich, fast alles in Termen des Geopotentials ϕ auszudrücken und weitere Näherungen nur insoweit zuzulassen, wenn sie mit synoptischer Erfahrung im Einklang sind und wenn sie mit theoretischer "scale" Begründung und anderen logischen Argumenten vertretbar erscheinen.

2.1. Die geostrophische geopotentielle Dicke Gleichung

Hier beginnt man am sinnvollsten mit Gleich. (6). Sie lautet in entwickelter Form:

$$\frac{dS}{dt} = c_p \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\ln \theta) + u \frac{\partial}{\partial x} (\ln \theta) + v \frac{\partial}{\partial y} (\ln \theta) + \omega \frac{\partial}{\partial p} (\ln \theta) \right\} \quad (6a)$$

Aus Gleich. (7) folgt durch logarithmieren:

$$\ln \theta = \ln \alpha - \frac{c_p}{c_p} \ln p + \text{Konst} \quad (7a) \quad \text{und daraus}$$

ergibt sich, daß p keine abhängige Variable ist ($p = \text{Konst}$ auf jeder Druckfläche):

$$u \frac{\partial}{\partial x} (\ln \theta) = u \frac{\partial}{\partial x} (\ln \alpha) = \frac{u}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial t} (\ln \theta) = \frac{\partial}{\partial t} (\ln \alpha) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

$$v \frac{\partial}{\partial y} (\ln \theta) = v \frac{\partial}{\partial y} (\ln \alpha) = \frac{v}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

Verwendet man jetzt noch die hydrostatische Gleich. (3), so gilt $\alpha = -\frac{\partial \phi}{\partial p}$. Dann ist leicht einzusehen, daß sich Gleich. (6a) umschreiben läßt in:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \sigma \omega = \frac{\alpha}{c_p} \frac{dS}{dt} = \frac{\alpha}{c_p T} Q \quad (6b)$$

mit $\sigma \equiv -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$, was einem "statischen Stabilitätsparameter" entspricht.

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial p} < 0, \sigma > 0 \text{ stabil}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial p} > 0, \sigma < 0 \text{ labil}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial p} = 0, \sigma = 0 \text{ indifferent} \right)$$

Im ersten Fall, wo θ mit dem Druck abnimmt (mit der Höhe zunimmt), wird ein sich von einem beliebigen Niveau aus adiabatisch, d.h. mit konstantem θ , auf- bzw. absteigendes Luftteilchen mit einer niedrigeren bzw. höheren pot. Temperatur, als sie die Umgebung besitzt, ausgezeichnet sein und das Teil-

chen wird einem Absinken bzw. Auftrieb unterworfen und stets zum Ausgangsniveau zurückkehren. Es zeigt also stabiles Verhalten. Im zweiten Fall ist es so, daß es sich stets weiter von der Ausgangslage entfernt (labiles Verhalten). Im letzten Fall behält es, wie immer das Teilchen auch verschoben wird, gleiches θ wie die Umgebung und verhält sich somit neutral (indifferent).

Bis auf eine näherungsweise Konstanz des Parameters σ , die angenommen wird, und zwar mit guter Rechtfertigung, sind bisher keine Approximationen erfolgt. Nun soll aber die Gleich. (6b) durch Annahme eines geostrophisch balancierten Windes noch weiter abgewandelt werden, d.h. es entfallen in den Gleich. (1) und (2) die totalen Beschleunigungsglieder $\frac{du}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ und sie lauten dann:

$-f_o v_g = - \frac{\partial \phi}{\partial x}$	(1a)
$f_o u_g = - \frac{\partial \phi}{\partial y}$	(2a)

oder in Vektor-Notation:

$\nabla_g = i u_g + j v_g = \frac{\mathbb{K} \times \nabla \phi}{f_o}$
--

worin ∇ den horizontalen del-Operator der Vektorrechnung bezeichnet. Die Annahme eines in erster Näherung geostrophisch balancierten Horizontalwindes ist deshalb nicht zu einschränkend, weil die vernachlässigten Beschleunigungen entsprechend einer "Scale Analyse" eine ganze Größenordnung (10^{-2} cm sec $^{-2}$) kleiner sind als die verbleibenden Glieder (10^{-1} cm sec $^{-2}$).

Schließlich vernachlässigen wir noch die nicht-adiabatische Erwärmung in Gleich. (6b), d.h. Q oder $\frac{dS}{dt} \equiv 0$, da für so kurze Zeiträume, die während der Entwicklung einer jungen baroklinen

Welle verstreichen z.B. die Strahlungseinwirkung keinesfalls den Effekt anderer beibehaltener Entflüsse erreicht und z.B. die Zufuhr latenter Kondensationswärme bei noch nicht voller zyklonaler Entwicklungsphase ebenfalls zurücktritt. Für Zeitspannen von mehreren Tagen jedoch sollte die diabatische Erwärmung stets berücksichtigt werden.

Mit diesen beiden Näherungen wird dann die Gleich. (6b):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = - v_g \cdot \nabla \left(- \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \sigma \omega} \quad (8)$$

Da in dieser Gleichung sowohl v_g als auch

$\sigma = - \frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} - \frac{1}{p} \frac{\partial \phi}{\partial p} \left(\frac{R}{c_p} - 1 \right)$ reine Funktionen von ϕ sind, sind in ihr nur zwei abhängige Variable, nämlich ϕ und ω enthalten.

Sie entstand, um es noch einmal klar zu sagen, aus der thermodynamischen Energiegleichung (6) mit Verwendung der Definitionsbeziehung für die pot. Temperatur (7) sowie der hydrostatischen Grundgleichung (3) und den geostrophisch approximierten Bewegungsgleichungen (1a, 2a). Die nicht-adiabatische Erwärmung wurde vernachlässigt.

Dies ist nun eine der gesuchten Diagnose-Gleichungen und es erscheint angebracht, nacheinander die in ihr enthaltenen Glieder physikalisch zu interpretieren:

Das Glied auf der linken Seite von (8): ist die lokalzeitliche Änderung an feststehendem Ort der sogenannten "geopotentiellen Schichtdicke $-\frac{\partial \phi}{\partial p}$ ". Diese wiederum ist durch die hydrostatische Grundgleichung (3a) direkt proportional der Temperatur T. Der Proportionalitätsfaktor $\left(\frac{R_d}{p} \right)$ ist für jedes Druckniveau konstant. Also bedeutet dieses Glied nichts anderes als die lokalzeitliche Änderung der Temperatur in jeder isobaren Fläche gewichtet mit

dem Faktor $\left(\frac{R_d}{p}\right)$.

Das erste Glied auf der rechten Seite von (8): kann als die "horizontale Dicke-Advektion $v_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)$ " bezeichnet werden, oder als die horizontale Temperatur-Advektion $v_g \cdot \nabla T$ " interpretiert werden, gewichtet mit dem von Fläche zu Fläche unterschiedlichen Faktor $\left(\frac{R_d}{p}\right)$.

Und schließlich bedeutet das zweite Glied auf der rechten Seite von (8) physikalisch ein "adiabatisches Erwärmungs-(Abkühlungs-) Glied" und bringt jene Temperaturänderungen (Dicke-Änderungen) zum Ausdruck, die sich durch Aufsteigen und Expansion oder Absinken und Kompression von Luftteilchen in einer stabil geschichteten Umgebung einstellen.

Hat man aber keine unendlich dünnen Schichten, sondern Schichten von endlichem Druckintervall Δp mit einer Mitteltemperatur \bar{T} , so entspricht diesem ein endliches geopotentielle Dicke-Intervall $(-\Delta\phi)$. [Da der Druck abwärts zunimmt (vertikale Koordinate) wird $\Delta\phi$ stets negativ, $-\Delta\phi$ also stets positiv sein, da ϕ mit dem Druck abnimmt!] Die Gleichung (8) kann dann in einer der beiden nachfolgenden äquivalenten Formen umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{T} = - (v_g \cdot \nabla \bar{T}) + \left(\frac{\bar{p}}{R} \sigma\right) \omega \quad (8a) \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\Delta\phi) = - (v_g \cdot \nabla (-\Delta\phi)) + (\sigma \Delta p) \omega \quad (8b)$$

Mit Hilfe der Gleich. (8a und b) kann der physikalische operative Mechanismus von Gleich. (8) bestens dargelegt werden:

Hat man eine horizontale Zufuhr warmer Luft, also Warmluft-Advektion oder eine Advektion größerer geopot. Dicke,

so ist: $w_g \cdot \nabla \bar{T} < 0$
 $w_g \cdot \nabla (-\Delta\phi) < 0$ } und daraus folgt eine lokalzeitliche
 Zunahme der Temperatur $\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} > 0\right)$
 oder der geopot. Dicke $(\partial(-\Delta\phi)/\partial t > 0)$

Hat man hingegen eine horizontale Zufuhr kalter Luft, also eine Kaltluft-Advektion oder eine Advektion kleinerer geopot. Dicke,

so ist: $w_g \cdot \nabla \bar{T} > 0$
 $w_g \cdot \nabla (-\Delta\phi) > 0$ } und daraus folgt eine lokalzeitliche
 Abnahme der Temperatur $\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} < 0\right)$
 oder der geopot. Dicke $(\partial(-\Delta\phi)/\partial t < 0)$

Andererseits hat man aufsteigende Luft mit adiabatischer Abkühlung,

so ist: $\omega < 0$ oder $\left(\frac{p}{R} \sigma\right) \omega < 0$
 $(\sigma \Delta p) \omega < 0$ } so folgt daraus stets eine lokalzeitliche
 Abnahme der Temperatur $\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} < 0\right)$
 oder der geopot. Dicke $(\partial(-\Delta\phi)/\partial t)$

Hat man hingegen absinkende Luft mit adiabatischer Erwärmung,

so ist: $\omega > 0$ oder $\left(\frac{p}{R} \sigma\right) \omega > 0$
 $(\sigma \Delta p) \omega > 0$ } so folgt eine lokalzeitliche
 Zunahme der Temperatur $\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} > 0\right)$
 oder der geopot. Dicke $(\partial(-\Delta\phi)/\partial t > 0)$

Um einen noch tieferen quantitativen Einblick zu gewinnen, soll ein numerisches Beispiel präsentiert werden. Im Niveau von 550 mb (siehe Fig. 4, linkes Bild) erfolgt mit einem gleichförmigen Westwind $u = 10$ m/sec eine Warmluftadvektion im Punkte A. Drei genau S-N orientierte Isothermen repräsentieren das Temperaturfeld. Ihr horizontaler Abstand voneinander beträgt 500 km. Die rechte Seite der Fig. (4) zeigt einen vertikalen Querschnitt entlang der Linie BAC und enthält in der Mitte durch A eine vertikale Druckschicht von 100 mb zwischen D und E.

Die im Punkte A bestimmbare Warmluftadvektion $w_g \cdot \nabla T = u \Delta T / \Delta x$ be-

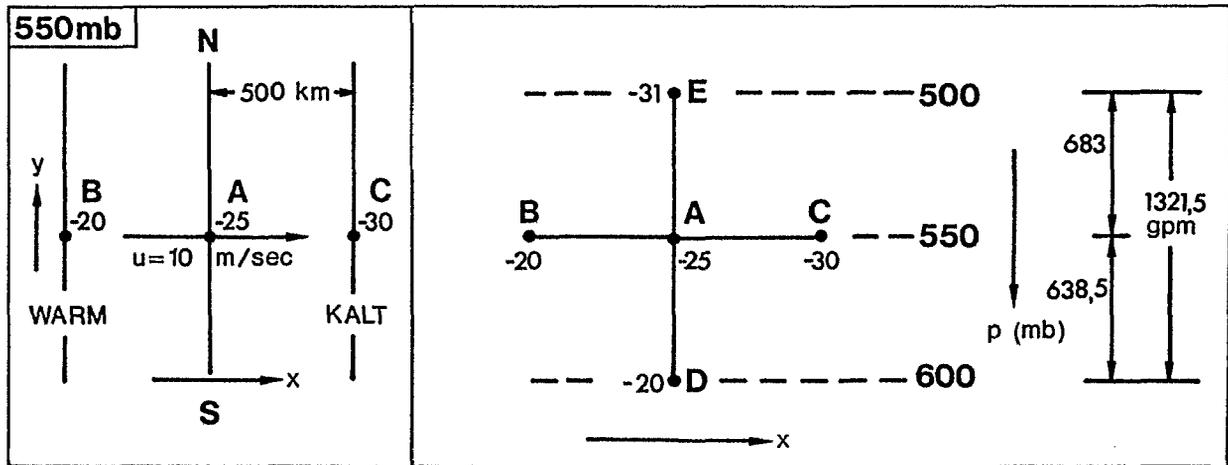


Fig. 4 Skizze zur Erklärung der Wirkungsweise horizontaler Temperaturadvektion

trägt dann -10^{-4} grad/sec und dies führt entsprechend (8a bzw. 8b) dann zu einer lokalzeitlichen Zunahme der Temperatur in A von $8,64^{\circ}\text{C}/\text{Tag}$ oder einer Erweiterung der Schichtdicke um $46 \text{ gpm}/\text{Tag}$ (von $1321,5$ auf $1367,5 \text{ gpm}$). Der Effekt der Advektion warmer Luft in die 100 mb -Schicht (ED) hinein ist also beträchtlich. Nimmt man jetzt an, daß die Mitteltemperatur ($\bar{T} = -25^{\circ}\text{C}$) im Punkt A oder die Schichtdicke (ED) von $1321,5 \text{ gpm}$ lokalzeitlich trotz der Warmluft-Advektion erhalten bleiben sollen

$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \equiv \partial (-\Delta\phi)/\partial t \equiv 0\right)$, so folgt zwangsläufig, daß zur Aufrechterhaltung der Stationarität in Gleich. (8a und b) das Vertikalgeschwindigkeitsglied wirksam werden muß. Die durch horizontale Advektion resultierende Temperatur- oder Dicke-Steigerung muß durch eine Abkühlung kompensiert werden, wozu adiabatisches Aufsteigen der Luft zu fordern ist. Die Durchrechnung ergibt, daß dieses Gleichgewicht durch ein ω von der Größe $-3,48 \cdot 10^{-3} \text{ mb}/\text{sec}$ (was etwa $w \approx 4,60 \text{ cm}/\text{sec}$ entspricht) erreicht werden kann.

2.2. Die quasi-geostrophische Vorticity Gleichung

Nun suchen wir nach einer zweiten Beziehung, die wiederum nur ϕ und ω enthält und aus mehreren der Fundamentalgesetze herzuleiten wäre. Dabei geht man jetzt von den bis auf den Reibungsfluß vollständigen beiden Komponentengleichungen (1) und (2) für die relative Luftbewegung aus, wendet auf (1) den Operator $\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)$ und auf (2) den Operator $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ an und addiert. Dann gelangt man als Zusammenfassung auf die jedem modernen Textbuch der Meteorologie entnehmbare Vorticity-Gleichung:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(\eta)} + (\eta) \operatorname{div} w + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \xi}{\partial p} + \beta v + (\xi+f) \operatorname{div} w + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) = 0 \quad (9)$$

worin die relative Vorticity $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ der bewegten Luft (eigentlich als vertikale Komponente des dreidimensionalen rot oder curl Vektors anzusprechen) und die absolute vorticity $\eta = \xi + f$, die Summe der relativen Vorticity der atm. Luft plus der Vorticity der sich drehenden Erde $f = 2 \Omega \sin \phi$, bezeichnen. $\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\Omega}{a} \cos \phi$ ist ein Parameter, der die Veränderlichkeit von f mit der geogr. Breite kennzeichnet und $\operatorname{div} w$ ist die reine Horizontaldivergenz.

Die Gleichung (9) wird nun in mehrfacher, aber wohl begründeter Hinsicht vereinfacht, wie folgt:

(a) "Scale Analyse" und Erfahrung zeigen, daß die Glieder:

$\omega \frac{\partial \xi}{\partial p}$, die vertikale Vorticity-Advektion, und $\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p}$, das sogenannte Vertikaldrehungs- oder Twisting-Glied, klein (10^{-11}) verglichen mit anderen Gliedern der Gleich. (9) (10^{-10}) sind. Sie werden daher vernachlässigt.

(b) Im Divergenz-Glied $(\xi_g + f) \operatorname{div} w$ zeigt die "Scale analysis", daß ξ die Größe 10^{-5} , f die Größe 10^{-4} und $\operatorname{div} w$ die Größe 10^{-6} besitzt für mittelgroße synoptische Systeme. Hier wird daher ξ_g gegenüber f vernachlässigt. Das Glied lautet dann $f \operatorname{div} w$.

(c) Der Coriolis-Parameter f kann in eine Taylor-Reihe entwickelt werden mit Bezug auf eine Breite $\phi = \phi_0$. Dabei werden Glieder höherer Ordnung vernachlässigt:

$$f = f_0 + \left(\frac{df}{dy} \right)_{\phi_0} \cdot y \text{ mit } \left(\frac{df}{dy} \right)_{\phi_0} \equiv \beta \text{ und } y = 0 \text{ bei } \phi = \phi_0.$$

Die beiden verbleibenden Glieder rechts stehen dann, was ihre Größenordnung angeht im Verhältnis $\frac{\beta L}{f_0} \approx \frac{\cos \phi_0}{\sin \phi_0} \frac{L}{a}$, wenn L die seitliche Ausdehnung der Bewegung bezeichnet. Wenn $L \ll a$ oder $\frac{L}{a} \ll 1$, folgt $f = f_0 = \text{Konst}$, wenn f in undifferenzierter Form auftritt, mit der Ausnahme des Advektionsgliedes βv , wo dann β als konstant behandelt wird (sogenannte β -Ebenen Approximation).

(d) Der Horizontalwind w und die relative Vorticity ξ werden nun geostrophisch approximiert:

$$\left. \begin{aligned} u = u_g &= - \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ v = v_g &= \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \xi = \xi_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{\nabla^2 \phi}{f_0}, \text{ mit der einzigen Ausnahme,}$$

nämlich im Divergenzglied $f_0 \text{ div } w$. Hier wäre eine geostrophische Approximation unsinnig, denn $\text{div } w_g$ wäre in ebenen Koordinaten $\equiv 0$ oder in Polarkoordinaten $= - \frac{v_g}{a} \text{ctg } \phi$, was sicherlich mit der wahren Horizontaldivergenz wenig gemeinsam hat.

Mit allen diesen Näherungen und Vernachlässigungen reduziert sich dann die Vorticity Gleichung (9) auf:

$$\boxed{\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = - w_g \cdot \nabla (\xi_g + f) - f_0 \text{ div } w} \quad (9a)$$

mit $\xi_g = \frac{\nabla^2 \phi}{f_0}$ und $w_g = (\mathbb{K} \times \nabla \phi) / f_0$

Verwendet man jetzt noch im letzten Glied die Kontinuitätsgleichung, so folgt:

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = - \mathbf{w}_g \cdot \nabla \xi_g - \mathbf{w}_g \cdot \nabla f + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (9b) \quad \text{Quasi-geostrophische Vorticity-Gleichung}$$

mit $\mathbf{w}_g \cdot \nabla f \equiv v_g \beta$.

Die lokalzeitliche Änderung der geostr. Vorticity (Glied links) wird daher durch 3 separate Prozesse erzeugt:

- (a) durch horizontale geostr. relative Vorticity-Advektion
($\mathbf{w}_g \cdot \nabla \xi_g$)
- (b) durch meridionale geostr. Advektion planetarischer Vorticity ($\mathbf{w}_g \cdot \nabla f = v_g \beta$)
- (c) durch Horizontaldivergenz oder durch eine vertikale Änderung der Vertikalgeschwindigkeit ω .

Die Gleichung (9b) ist nun eine zweite Gleichung, neben Gleich. (8), die zusammenfassend aus den Fundamentalgesetzen heraus entwickelt wurde und die wieder nur das Geopotential ϕ und die Vertikalgeschwindigkeit ω zum Inhalt hat.

Wieder erscheint es sinnvoll, die Glieder dieser Gleichung physikalisch zu interpretieren, um ihren Arbeitsmechanismus aufzudecken. Zuerst muß festgestellt werden, daß positive bzw. negative relative Vorticity ($\xi_g >$ oder < 0) in der Atmosphäre der Nordhemisphäre zyklonische bzw. antizyklonische relative Vorticity bedeuten, d.h. die Lineargeschwindigkeit des Windes nimmt in der Nordhemisphäre im Falle zyklonischer nach rechts, im Falle antizyklonischer relativer Vorticity nach links von der Bewegungsrichtung zu.

Was das erste Glied rechts in Gleich. (9) betrifft, gilt das Folgende: Weht der geostr. Wind \mathbf{w}_g , wie man sagt, Vorticity-gradient-abwärts, liegt also der Winkel γ zwischen den Vektoren

w_g und $\nabla \xi_g$ irgendwo zwischen 90° über 180° bis 270° , so ist $w_g \cdot \nabla \xi = |w_g| |\nabla \xi_g| \cos \gamma < 0$ wegen $\cos \gamma < 0$. Dann nimmt die geostrophische Vorticity als Folge der horizontalen Vorticity-Advektion lokalzeitlich zu, d.h. entweder wird früher vorhandene antizyklonische Vorticity abgeschwächt und schließlich in zyklonische umgeändert oder früher vorhandene zyklonische Vorticity wird an festem Ort mit der Zeit verstärkt.

Weht hingegen der geostr. Wind w_g Vorticitygradient-aufwärts (ist γ irgendwo zwischen 270° über 0° bis 90° , also $\cos \gamma > 0$), so folgt das Umgekehrte (Abschwächung zyklonischer, Steigerung antizyklonischer relativer Vorticity an festem Ort mit wachsender Zeit als Folge horizontaler Vorticity-Advektion).

Hinsichtlich des zweiten Gliedes rechts in Gleich. (9) gilt: Für einen nach Norden wehenden Meridionalwind ($v_g > 0$), d.h. einen gradient-aufwärts wehenden Wind, da der Gradient der planetarischen Vorticity ($\nabla f \equiv \partial f / \partial y \equiv \beta$) stets positiv (nordwärts gerichtet ist), folgt $w_g \cdot \nabla f > 0$ und daher eine Zunahme antizyklonischer, bzw. eine Abnahme zyklonischer relativer Vorticity mit der Zeit am festen Ort als Folge der planetarischen Vorticity-Advektion ($\partial \xi_g / \partial t < 0$).

Für einen nach Süd wehenden Meridionalwind ($v_g < 0$) ist das entsprechend Gegensätzliche zu folgern.

Die physikalische Wirkungsweise des dritten Gliedes in Gl. (9) ist gebunden an das Vorzeichen der Horizontaldivergenz.

$\text{div } w > 0$ bedeutet wahre Divergenz, $\text{div } w < 0$ hingegen bedeutet Konvergenz des Horizontalwindes.

Im ersteren Fall ($\text{div } \mathbf{w} > 0$, d.h. $\frac{\partial \omega}{\partial p} < 0$) bei divergentem geostrophischen Horizontalwind, stellt sich eine Abnahme der zyklonischen oder eine Zunahme der antizyklonischen relativen Vorticity an festem Ort mit wachsender Zeit ein ($\partial \xi_g / \partial t < 0$).

Hingegen wird bei konvergentem geostrophischen Horizontalwind ($\text{div } \mathbf{w} < 0$, d.h. $\frac{\partial \omega}{\partial p} > 0$), die antizyklonische relative Vorticity abgebaut oder die zyklonische intensiviert. ($\partial \xi_g / \partial t > 0$).

Nachdem nun beide im Abschnitt (II.2.) gewonnenen Gleichungen, nämlich G. (8). bzw. (9b) eine hinreichende Darlegung und Interpretation erfahren haben, verbleibt der letzte angekündigte Schritt (C) zu tun. Die Tatsache, daß beide Gleichungen nur die abhängigen Variablen ϕ und ω enthalten, legt nahe, wechselweise eine der Variablen zu eliminieren. Dies soll im Abschnitt (II.3.) jetzt geschehen.

II.3. Die Ableitung der sogenannten "geopotentiellen Tendenz Gleichung" und der " ω -Gleichung"

Zuerst soll vermerkt werden, daß $\xi_g = \frac{\nabla^2 \phi}{f_0}$ und daher $\partial \xi_g / \partial t = \nabla^2 (\partial \phi / \partial t) / f_0$ ist.

3.1. Das quasi-geostrophische System

Um aus den Gl. (8) und (9b) die Vertikalgeschwindigkeit ω zu eliminieren, multipliziert zuerst die Gl. (8) mit dem Konstanten Faktor f_0^2 / σ und differenziert sie dann gliedweise nach dem Druck ($\frac{\partial}{\partial p}$) und addiert das Resultat zu Gl. (9b). Der Rechenvorgang ist so elementar, daß hier nur das Endergebnis aufgeführt ist:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = - f_0 w_g \cdot \nabla (\xi_g + f) + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(w_g \cdot \nabla - \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \quad (10)$$

Diese Gleich. (10) ist nun von besonderem Interesse, da sie die lokalzeitliche Änderung der geopotentiellen Höhe $\phi = gz$ (die sogenannte "geopotentielle Tendenz") zu der geometrischen Verteilung von ϕ im Raum zu feststehender Zeit in Beziehung setzt, weil die Glieder auf der rechten Seite von (10) alleinige Funktionen von ϕ sind. (w_g , ξ_g , σ sind alle nur von ϕ abhängig). Diese Gleichung ist daher "prognostischer Natur" und man nennt Gleich. (10) verständlicherweise "Geopotentielle Tendenzgleichung".

Ihr physikalischer Arbeitsmechanismus ist nach den voraus gestellten Diskussionen leicht übersehbar. Die Tendenz $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ oder besser der beim ersten Besehen schwierig erscheinende Operator $\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}$ angewendet auf $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ ergibt sich als Folge zweier Prozesse. Das erste Glied rechts ist wieder die horiz. Advektion der absoluten Vorticity, die aus entsprechenden Advektionen der relativen und planetarischen Vorticity zusammengesetzt ist. Das zweite Glied beinhaltet eine vertikale Änderung der horizontalen Temperatur-Advektion ($w_g \cdot \nabla - \frac{\partial \phi}{\partial p} \equiv \frac{R}{p} w_g \cdot \nabla T$).

3.2.

Die Ausgangsgleichungen (8) bzw. (9b) können aber auch in anderer Weise behandelt werden, um $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ zu eliminieren. Dazu wendet man auf jedes Glied der Gleich. (8) den Laplace-Operator ∇^2 an und differenziert die Gleich. (9b) nach dem Druck ($\frac{\partial}{\partial p}$). Subtrahiert man dann das erste vom zweiten Ergebnis, so ist

$\frac{\partial \phi}{\partial t}$ eliminiert und es resultiert eine diagnostische Gleichung für die Vertikalgeschwindigkeit ω als alleinige Funktion der räumlichen Verteilung von ϕ zu feststehender Zeit wie folgt:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \mathbf{w}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) \right\} + \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left\{ \mathbf{w}_g \cdot \nabla \left(- \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right\} \quad (11)$$

Diese Gleichung wird sinnvoll als "ω-Gleichung" bezeichnet.

Auch in dieser Gleichung (11) ergibt sich die linke Seite als Folge zweier separater Einflüsse, die auf der rechten Seite der Gleichung erscheinen. Davon enthält der erste Term wieder die horiz. Advektion absoluter (relativer + planetarischer) Vorticity. Aber jetzt steht deren Veränderlichkeit ($\frac{\partial}{\partial p}$) in der Vertikalen zur Diskussion. Der zweite Term ist geprägt durch die zweifache Ableitung oder Veränderlichkeit (∇^2) der Temperatur-Advektion in horizontaler Richtung.

Abschließend soll nochmals dieses näherungsweise gültige theoretische Grundkonzept bekannt unter dem Namen: "quasi-geostrophisches System" schematisch zusammengefaßt werden (siehe umseitig Fig. 5), [12].

Besonders zu betonen ist noch der Umstand, daß Gleich. (10) und (11) es erlauben, aus einem gegebenen dreidimensionalen Feld des Geopotentials ϕ für eine gegebene Zeit heraus ohne detaillierte Messung des Windfeldes die wichtigen Größen $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ und ω zu ermitteln. Eine solche Diagnose soll nun eingehend an Hand eines analytischen Modells für eine junge barokline Wellenstörung, die einem baroklinen Grundstrom überlagert wird, vorgenommen werden.

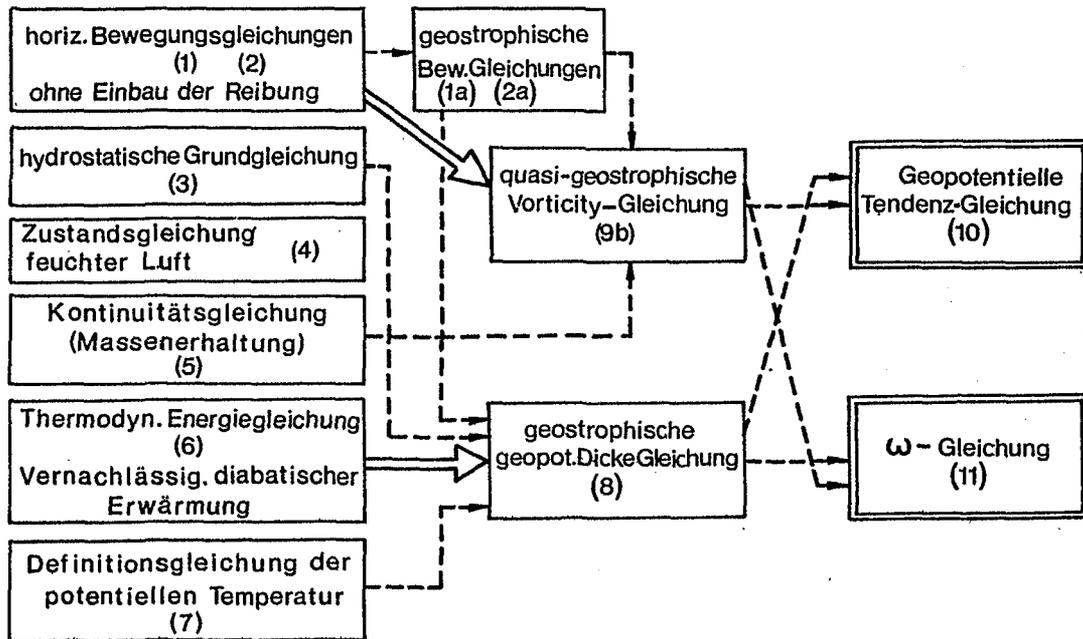


Fig. 5 Schema für den Ablauf der Gewinnung des quasi-geostrophischen Gleichungssystems

III. Die Konstruktion eines realistischen analytischen Modells einer baroklinen Welle im anfänglichen Entwicklungsstadium

III.1. Die Wellenstörung und ihr vertikaler Aufbau

Die einleitende Diskussion über junge barokline Wellenstörungen, die eine große Bereitschaft für eine rasche Fortentwicklung instabiler Art zeigen und sich also vorzugsweise rasch über ein sogenanntes Idealstadium hinaus in ein okkludiertes Wirbelstadium mit gleichzeitiger rascher Vertiefung ihres Kerndrucks entwickeln, hat gezeigt, daß ihr vertikaler Aufbau kompliziert ist. Die synoptische Erfahrung lehrt, daß zwischen Erdboden und Tropopause erhebliche Phasenverschiebungen, sowohl im Druckfeld, als auch im Temperaturfeld feststellbar sind. Es sind also Neigungen der Achsen des Tiefdrucktroges und Hochdruckrückens mit wachsender Höhe nach rückwärts (nach Westen, wenn die Wellenstörung sich ostwärts fortpflanzt) vorhanden, während das sie begleitende Temperaturfeld eine ganz andere Phasenverschiebung mit der Höhe aufweist; vorzugsweise sind die Achsen maximaler oder minimaler Temperatur vorwärts (also ostwärts mit wachsender Höhe) geneigt. Man kann sich also fragen, ob ein so gearteter Vertikalaufbau überhaupt hydrostatisch balanciert ist und welche generellen theoretischen Grundprinzipien erfüllt sein müssen, um eine so schwierige vertikale hydrostatische Koppelung aufwärts bis zur Tropopause (ca. 250 mb oder 10,5 km Höhe), also durch eine mächtige vertikale Schicht hindurch, möglich zu machen.

Um dieser Frage nachzugehen, wird die Störung als eine sinus-

förmige Welle im Geopotentialfeld angenommen, die nur von der horizontalen zonalen Koordinate (x) und der vertikalen (p) abhängig sein soll:

$$\phi_w(p) = A_\phi(p) \sin [kx - \alpha(p)] \quad (12)$$

wobei $k = 2\pi/L$ die Wellenzahl, L die Wellenlänge und $A(p)$ bzw. $\alpha(p)$ die vom Druck (oder Höhe) abhängige Amplitude bzw. Phase bezeichnen. Nunmehr koppeln wir diesen druckabhängigen Wellenvorgang im Geopotentialfeld streng hydrostatisch und erhalten bei Erfüllung der hydrostatischen Grundgleichung (3a) das druckabhängige und zur Geopotentialwelle hydrostatisch passende Temperaturfeld in der Form:

$$T_w(p) = -\frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{p}{R} \left\{ -A' \sin [kx - \alpha] + \alpha' A \cos [kx - \alpha] \right\} \quad (13)$$

wobei R die Gaskonstante der trockenen Luft bedeutet, wenn T als virtuelle Temperatur aufgefaßt wird. $A' = \frac{\partial A}{\partial p}$ bzw. $\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial p}$ bezeichnen die vertikalen Gradienten von A bzw. α mit Hinsicht auf den Druck.

Entwickelt man die beiden Wellen im geschweiften Klammerausdruck von (13) durch Anwendung der bekannten trigonometrischen Additionsformeln, so lassen sie sich zu einer einzigen Welle zusammenfassen:

$$T_w(p) = \left(\frac{p}{R} C(p) \right) \sin [kx - \gamma(p)] = A_T(p) \sin [kx - \gamma(p)] \quad (14)$$

deren druckabhängige Amplitude C bzw. Phase γ mit A, A', α, α' wie folgt verknüpft sind:

$$C(p) = \left[(A')^2 + (\alpha' A)^2 \right]^{1/2} \quad \text{und} \quad \text{tg } \gamma = \frac{-A' \sin \alpha - \alpha' A \cos \alpha}{-A \cos \alpha + \alpha' A \sin \alpha} \quad (15 \text{ a,b})$$

Damit charakterisieren $\frac{p}{R} C(p) \equiv A_T(p)$ und $\gamma(p)$ die Amplitude bzw. Phase des druckabhängigen Temperaturfeldes der Wellenstörung.

Aus $\text{tg } \gamma$ in (15) läßt sich durch Umgruppierung leicht ein interessanter Zusammenhang gewinnen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = \alpha' = - \frac{A'}{A} \text{tg } (\alpha - \gamma) = - \frac{A'}{A} \text{tg } \varepsilon \quad (16)$$

wobei $\alpha - \gamma = \varepsilon$ den Phasenunterschieds-Winkel zwischen Geopotential- und Temperaturfeld bezeichnet. Die Beziehung (16) zeigt, daß die vertikale Änderung der Phase α der Geopotentialwelle mit Hinsicht auf p direkt proportional dem Verhältnis $(\frac{\partial A}{\partial p})/A$ und dem Tangens von ε ist.

Aus (16) ergibt sich dann mit $A'/A = (1/A) \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} (\ln A)$ durch Integration vom beliebigen Druckniveau (p) bis zum Erdboden $p = p_0$ herab:

$$- \int_p^{p_0} \frac{\partial}{\partial p} (\ln A) dp = \int_p^{p_0} \left(\frac{\alpha'}{\text{tg } \varepsilon} \right) dp \quad \text{oder}$$

$$\ln \frac{A_p}{A_{p_0}} = \int_p^{p_0} \left(\frac{\alpha'}{\text{tg } \varepsilon} \right) dp \quad \text{oder} \quad \frac{A_p}{A_{p_0}} = e^{\int_p^{p_0} (\alpha' / \text{tg } \varepsilon) dp} \quad (17)$$

Jede beliebige Wahl des Phasenwinkels α als Funktion von p , d.h. Wahl der Phase der Geopotentialwelle und zusätzliche beliebige Wahl des Phasenwinkels γ , d.h. Wahl der Phase der Temperaturwelle als Funktion von p , eröffnet den Lösungsgang:

$$\begin{array}{l} \alpha(p) \rightarrow \alpha'(p) \\ \gamma(p) \rightarrow \varepsilon(p) \rightarrow \text{tg } \varepsilon \end{array} \rightarrow \frac{\alpha'}{\text{tg } \varepsilon}(p) \xrightarrow{(17)} \frac{A_p}{A_{p_0}} \quad \text{mit Wahl } A_{p_0} \rightarrow A(p) \rightarrow A'(p) \begin{array}{l} \rightarrow C(p) \\ \rightarrow A_T(p) \end{array} \quad (17a)$$

Auch ist es möglich, die Amplitude A und die Phase α als Funktionen von (p) vorzugeben, dann ist der Aufbau des Geopotentialfeldes bekannt und der weitere Bestimmungsweg ist, wie folgt:

$$\begin{array}{l}
 A(p) \longrightarrow A' \\
 \alpha(p) \longrightarrow \alpha'
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow \\
 \searrow
 \end{array}
 (15)
 \begin{array}{l}
 \nearrow C(p) \longrightarrow A_T(p) \\
 \searrow \gamma(p) \longrightarrow \epsilon(p)
 \end{array}
 \quad (17b)$$

Im Prinzip ist es nun (durch Anwendung dieses hydrostatischen Koppelungsmechanismus) möglich, eine solche Wahl der Achsenneigungen der Geopotential- und der Temperaturwelle zu treffen, wie sie die synoptische Erfahrung für junge Wellenstörungen erkennen gelehrt hat. (Andere Neigungen interessieren hier nicht, die Wahl ist aber beliebig frei!)

Wie schon eingangs erwähnt, ist es für das Geopotentialfeld solcher Anfangsstörungen charakteristisch, daß sich die Trogachse nach rückwärts neigt (westwärts mit zunehmender Höhe) und die Achse kältester Temperatur des sie begleitenden Temperaturfeldes nach vorne neigt (ostwärts mit wachsender Höhe), d.h. entsprechend der Form der Beziehungen (12) und (14):

$$\left. \begin{array}{l}
 \alpha > 0 \\
 \gamma < 0
 \end{array} \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial p} = \alpha' \geq 0 \text{ und } \epsilon (\text{Phasenunterschiedswinkel}) = \alpha - \beta > 0$$

Letzteres ist deshalb anzunehmen, da die Neigung im Geopotentialfeld stets und immer größer ist als jene im Temperaturfeld.

Zusätzlich zeigt die synoptische Erfahrung, daß das Geopotentialfeld und Temperaturfeld am Erdboden und in den unteren Niveau's mit 180° oder etwas weniger außer Phase sind, d.h. der Tiefdruckkern in Bodennähe oder die unmittelbare Vorderseite des Tiefs sind warm. Hingegen verschiebt sich dieses Außerphase-

Verhalten mit wachsender Höhe (abnehmendem Druck) bald so, daß in größeren Höhen (etwa oberhalb 500 mb bis zum Tropopausenniveau hinauf (etwa 250 mb)) die geopotentielle und die thermische Welle weitgehend in Phase sind, d.h. der Trog ist kalt, der Rücken warm.

Diese Feststellungen zeigen, daß ϵ unten groß ist (maximal 180°) und mit wachsender Höhe abnimmt (auf minimal 0°), wobei ϵ generell > 0 bleibt. Daraus folgt dann für den Tangens von ϵ , daß er bei $\epsilon = 90^\circ$ in irgendeinem Niveau zwischen Boden und der 250 mb Fläche unendlich groß wird:

	Erdboden		krit.Niveau		250 mb Fläche
ϵ :	180° oder etwas kleiner	$180^\circ < \epsilon < 90^\circ$	$\epsilon = 90^\circ$	$90^\circ < \epsilon < 0^\circ$	0° oder etwas mehr
tg ϵ :	0 oder etwas negativ	negativ (klein) (groß)	tg $\epsilon = \infty$	positiv (groß) (klein)	0 oder etwas mehr

Nun gehen wir zurück auf die Beziehung (16) und diese ergibt, wegen $\alpha' \geq 0$, $A > 0$, im kritischen Niveau $A' = -(\alpha'A)/\infty = 0$ oder die Amplitude A der Geopotentialwelle (in 1000 mb $A = A_{p_0}$) nimmt vom Boden an bis zu diesem kritischen Niveau mit wachsender Höhe ab (mit wachsendem Druck zu). Dort nimmt sie dann einen Minimalwert an und von dort aufwärts nimmt sie wieder zu (mit dem Druck ab).

1.1. Vier Beispiele als Richtschnur für die Modellgestaltung

Vier Beispiele sollen nun die Wirkungsweise der hydrostatischen, vertikalen Koppelung von Geopotential- und Temperaturfeld einer baroklinen Wellenstörung deutlich machen. Dazu dient die Fig.(6). In der obersten Reihe der Figur (6) sind für einen Vertikalschnitt (x horizontal, p vertikal) 4 unterschiedliche Anfangs-

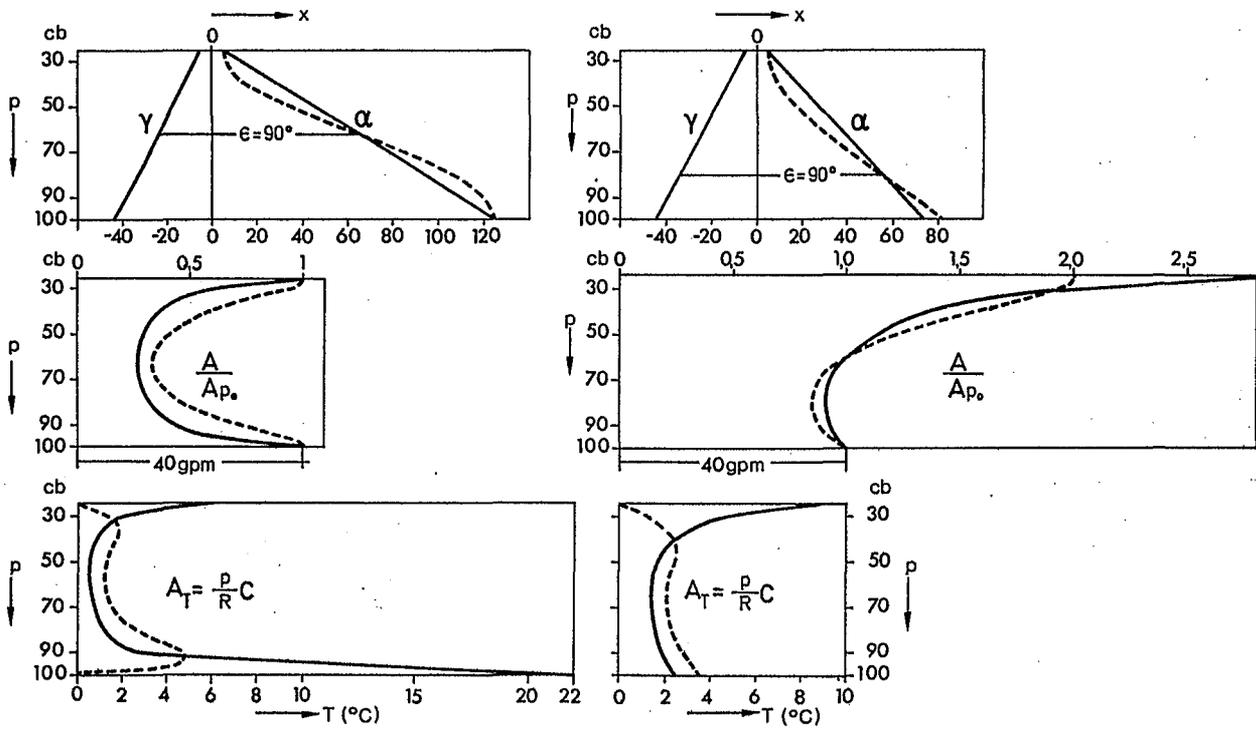


Fig. 6 4 Beispiele für die Struktur einer baroklinen Wellenstörung.

obere Bildreihe: 4 Annahmen über die Phasenwinkel α bzw. γ der Geopotential- bzw. der Temperaturwelle

mittlere Bildreihe: 4 Ergebnisse für das Amplitudenverhältnis $\frac{A}{A_0}$

untere Bildreihe: 4 Ergebnisse für die Amplitude A_T der Temperaturwelle

annahmen für die Phasen α und γ zwischen 250 mb und 1000 mb dargestellt. Im linken Bild ist eine lineare und große Zunahme von α mit wachsendem Druck (Abnahme mit wachsender Höhe) einer sinusförmigen gegenübergestellt. Die Verteilung von γ ist linear und für beide Fälle gleich. $\epsilon = \alpha - \gamma = 90^\circ$ ($\text{tg } \epsilon = \infty$) wird genau zwischen 250 und 1000 mb, also in 625 mb, erreicht. Im rechten Bild ist wieder eine lineare aber viel kleinere Zunahme von α mit zunehmendem Druck gewählt. Die Verteilung ist wieder identisch jener im Bild links. Damit rückt jetzt das kritische Niveau tiefer herab ($\epsilon=90^\circ$, $\text{tg } \epsilon=\infty$ in 800 mb). Eine weitere sinusförmige Verteilung von α wurde so gewählt, daß zwischen 250 mb und einem fiktiv hohen Druck von 1350 mb eine Sinus-Welle von α gewählt wurde mit einem Wendepunkt bei 800 mb. Geht man jetzt den früher dargelegten Lösungsweg (17a), so ergeben sich vertikale Verteilungen $A_\phi(p)$ und $A_T(p)$ (Amplituden der Geopotential- und der Temperaturwelle) für alle 4 Fälle (siehe Bilder links und rechts in Fig. (6), Mitte und entsprechend für A_T in Fig. (6), untere Reihe). A_ϕ in 1000 mb, als A_{p_0} bezeichnet, soll 40 gpm betragen.

In allen 4 Fällen reduziert sich die Amplitude A oder das normierte Verhältnis A/A_{p_0} , wie erwartet, mit wachsender Höhe bis zum kritischen Niveau und dies erfolgt stärker in den beiden Fällen links, weniger ausgeprägt in den beiden Fällen rechts. Weiterhin zeigt sich, daß je tiefer dieses Niveau herabgesetzt ist, desto geringer ist die Reduktion von A . Bei symmetrischer Lage dieses Niveaus (beide Fälle, linkes Bild) sind die Kurven A/A_{p_0} symmetrisch, so daß in 250 mb wieder die Bodenamplitude A_{p_0}

erreicht wird ($A/A_{P_0} = 1$). In den beiden anderen Fällen (rechts) nimmt A oder A/A_{P_0} vom kritischen Niveau (800 mb) an stark mit wachsender Höhe zu (bis auf 2 bis 3 mal A_{P_0}).

Die beiden Bilder in der untersten Reihe der Fig. (6) präsentieren schließlich die mit $A_{P_0} = 40$ gpm berechneten Vertikalverteilungen der Amplitude A_T der Temperaturwelle. Hier zeigen sich nun unangenehme oder unerwünschte Reaktionen von A_T an der oberen Grenze (250 mb) wie auch an der unteren Grenze (1000 mb). Wählt man $\alpha(p)$ als linear, so ist $\alpha' = \text{konstant}$. Dies hat zur Folge, daß sowohl A als auch A_T gegen die Grenzen hin sehr rasch zunimmt, da dort $\text{tg } \epsilon \rightarrow 0$ strebt. Wählt man $\epsilon = 0$ an der oberen Grenze ($\alpha = \beta$) oder $\epsilon = 180^\circ$ an der unteren Begrenzung (1000 mb), so ergeben sich dort A und A_T Werte, die unendlich groß sind. Diese Annahmen sind daher unsinnig. Bei den sinusförmigen Verteilungen von α aber ist α' an den Grenzen $\equiv 0$, also muß bei endlichem ϵ nach Gleich. (16) $A' \equiv 0$ sein, was für A einen Maximalwert bedeutet. Dann geht aber (siehe Bild links) A_T an der Untergrenze (1000 mb) nach Gleich. (15a) zu Null, weil α' und $A' \equiv 0$ sind. Dies ist ebenfalls unerwünscht. An der oberen Grenze aber ist $A_T \equiv 0$ erwünscht und steht mit der synoptischen Erfahrung in Einklang.

Nach Durchrechnung einer Vielzahl möglicher Fälle und geleitet durch die dabei gemachten Erfahrungen kann jetzt an eine Konstruktion eines guten Modells herangegangen werden. Auch bin ich dankbar für den Ausdruck aus der elektronischen Rechenmaschine, den mir Herr Klaus Arpe, einer meiner Mitarbeiter, für junge baroklin aufgebaute Wellenstörungen verfügbar gemacht hat, um eine Orientierung über die Größenordnung von A_ϕ und

A_T , α und γ , sowie ϵ und damit der Größe der Achsenneigungen aus Beobachtungen zu erhalten. Von diesen Daten waren die nachfolgenden Schritte sehr geleitet, um naturnahe zu bleiben.

1.2. Das Modell

An den Anfang stellt man zunächst die folgenden Überlegungen:

Tabelle 1

p(mb)	$\epsilon = \alpha - \gamma$ >0	tg ϵ	α'	A'	A	α	γ
250	10°	>0	0	0	MAX > 0	5°	-5°
250-770	$10^\circ < \epsilon < 90^\circ$	>>0	>0	<0	abnehmend mit p >0	>0	<0
770	90°	∞	MAX > 0	0	MIN > 0	>0	<0
770-1000	$90^\circ < \epsilon < 156^\circ$	<<0	>0	>0	zunehmend mit p >0	>0	<0
1000	156°	<0	>0	>0	MAX = A_{p_0} >0	111°	-45°

Diese Tabelle zeigt eine Vorzeichenwahl, die mit den theoretischen Beziehungen in völligem Einklang steht (Gl. 14 bis 17). Nun wählt man am besten den Lösungsweg (17b) und gibt A sowie α den Beobachtungen entsprechend vor. Für A wurde in 1000 mb eine Amplitude $A_{p_0} = 40$ gpm gewählt. Dies entspricht dann $80 \text{ gpm} = 784 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$ als Höhenunterschied zwischen Bodentief und nachfolgendem Bodenhoch, was mit einer Luftdichte $\rho = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ gr/cm}^3$, einem Druckunterschied von 10,2 mb entspricht. Dies scheint für eine junge Welle vernünftig. Die vertikale Verteilung von A(p) wurde entsprechend der Tabelle 1 so gewählt, daß sich den Beobachtungen angepaßt eine doppelt so große Amplitude in 250 mb (Tropopausenniveau) ergibt, als am Boden, also $A_{250} = 2 A_{p_0} = 80 \text{ gpm}$. Im kritischen Niveau

(770 mb) soll $A_{770} \approx 0,6 A_{p_0}$ erreichen (Minimum). Auf der Suche nach einer analytischen Funktion, die noch zusätzlich $A' \approx 0$ in 250 mb d.h. $A = 2 A_{p_0} = \text{Maximum}$ erfüllt, was nach den Beobachtungen sinnvoll ist, bot sich eine Bessel Funktionsverteilung nullter Ordnung $J_0(x)$ vermehrt um 1, also $J_0(x)+1$ an (Dabei ist $x=0=250$ mb, $x=5,52=1000$ mb, $x=3,8=770$ mb). Damit ist auch $A' = \frac{\partial}{\partial p} (J_0(x)+1)$ vorgegeben.

Als nächstes wurde nun eine vertikale Verteilung des Phasenwinkels $\alpha(p)$, so konstruiert, daß sie die Bedingungen in Tabelle für α und α' erfüllte (Wendepunkt von α und Maximum von α' bei 770 mb, $\alpha = 5^\circ$ und $\alpha' = 0$ in 250 mb), daß sich aber bei weiterer Durchrechnung für die Phase $\gamma(p)$ der Temperaturwelle eine geordnete e-potenzartige Änderung von -45° in 1000 mb bis -5° in 250 mb ergab. Dies konnte nach wenigen Versuchen erreicht werden. Die Fig. (7) zeigt in der oberen Reihe die Verteilungen von $A(p)$, $A'(p)$ sowie von $\alpha(p)$ und $\alpha'(p)$ und im unteren Bild rechts jene von $\gamma(p)$ und $\epsilon(p)$, die sich zwangsläufig daraus ergeben. Die weitere Durchrechnung erlaubt nun auch die Amplitude der Temperaturwelle $A_T = \frac{p}{R} C$ zu bestimmen (siehe $C(p)$ und $A_T(p)$ im Bild unten links in der Fig. (7)). Es ergab sich eine mit den Beobachtungen in bestem Einklang stehende Verteilung, welche Werte A_T zwischen 3° und 4°C bis 500 mb ausweist, darüber erfolgt ein Abfall von A_T bis auf Null in 250 mb

Damit ist nun alles bekannt und das Modell einer baroklinen jungen Welle fertiggestellt. Die Fig. (8) präsentiert nun diese vertikale Koppelung von Geopotentialwelle (volle Linien) und Temperaturwelle (gestrichelte Linien) für 5 Druckniveaus auf-

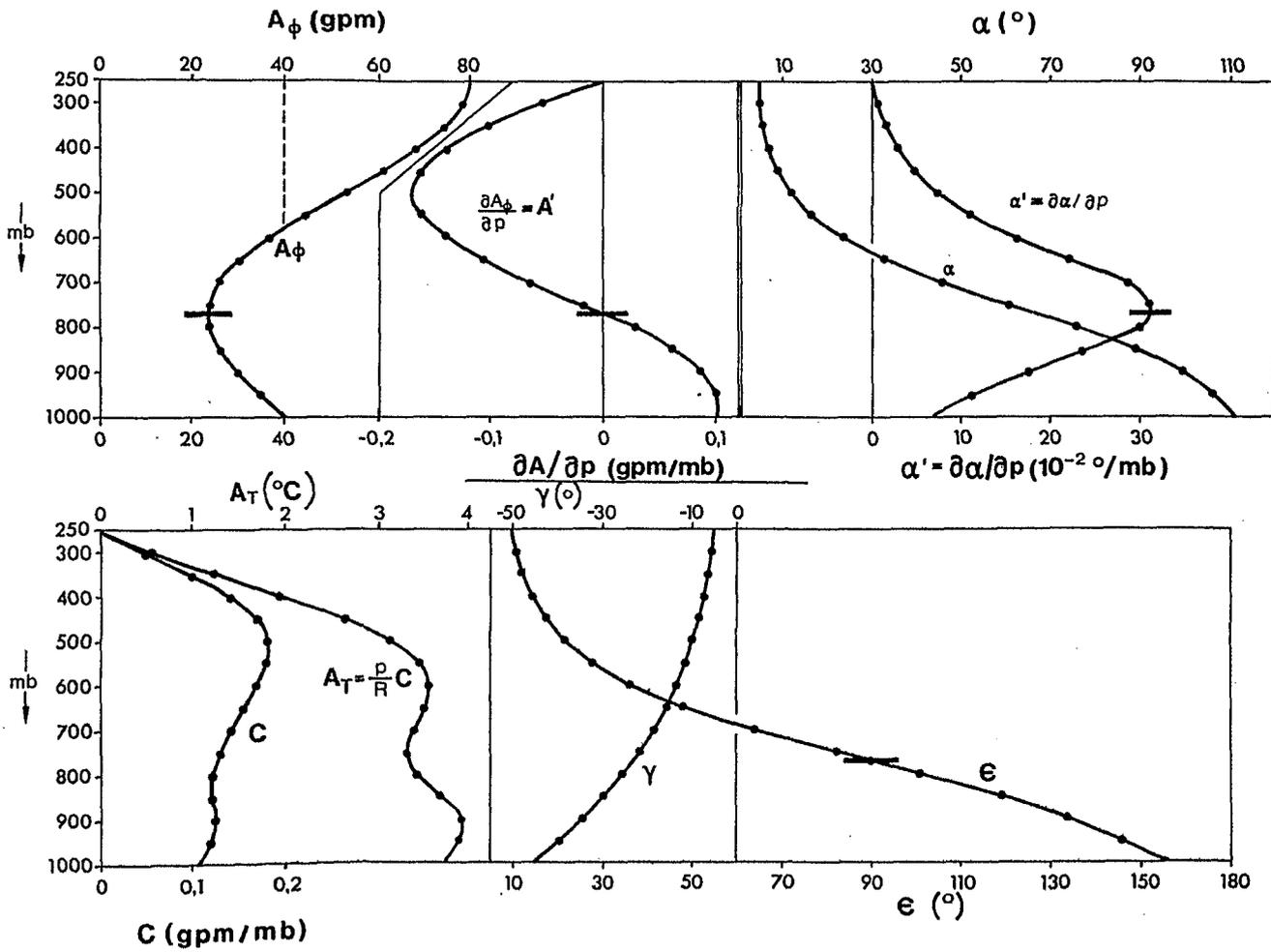


Fig. 7 Angaben über das Modell einer baroklinen Wellenstörung
 obere Reihe; links: Amplitude A_ϕ der Geopotential-Welle
 mitte: Änderung von A_ϕ mit dem Druck
 rechts: Phasenwinkel α und $\frac{\partial \alpha}{\partial p}$ der Geopotentialwelle
 untere Reihe; links: Amplitude C oder A_T der Temperaturwelle
 mitte und rechts: Phasenwinkel γ der Temperaturwelle und Phasenunterschiedswinkel $\epsilon = \alpha - \gamma$

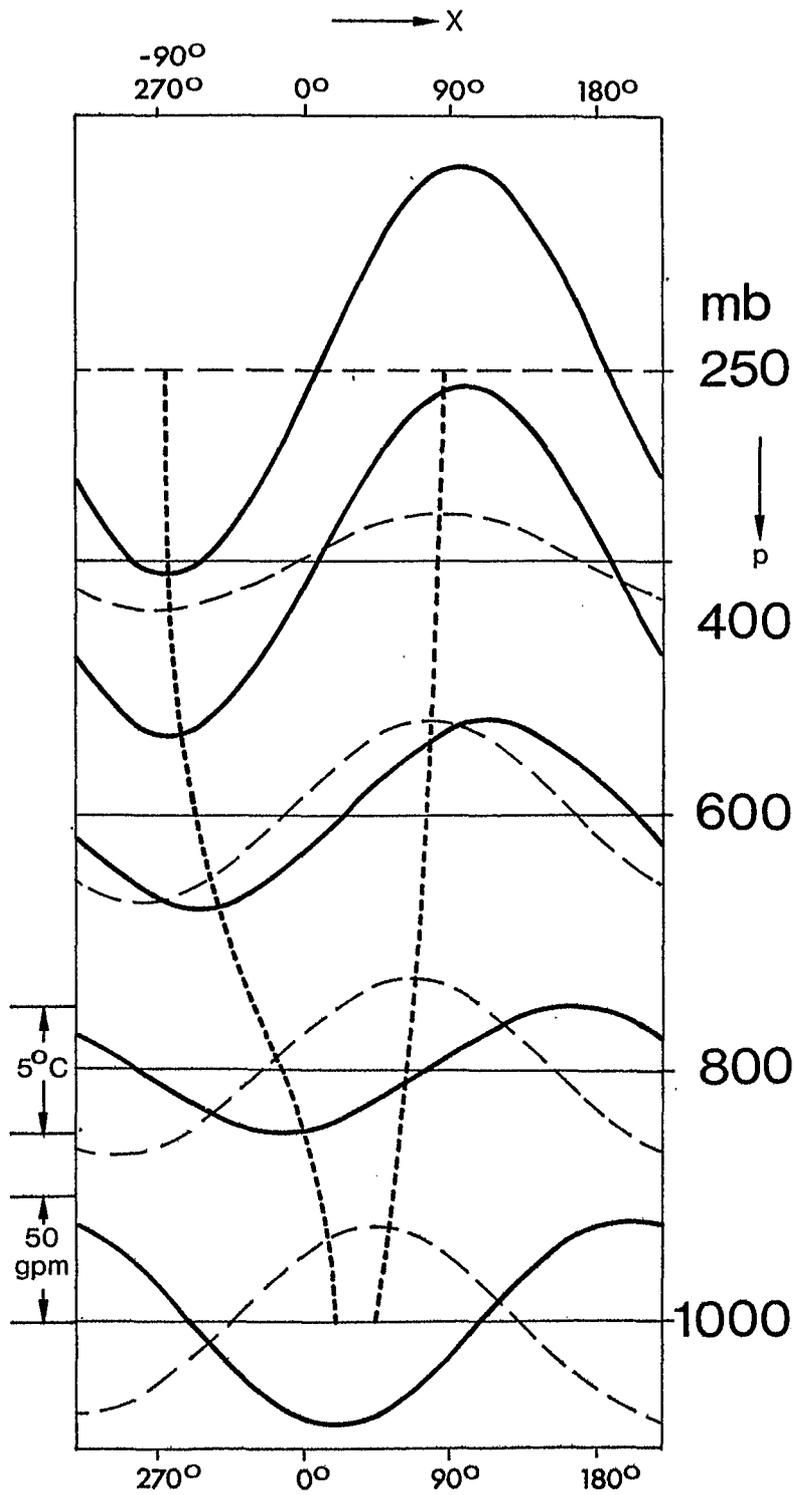


Fig. 8 Vertikale Struktur einer baroklinen Wellenstörung in verschiedenen Druckflächen

ausgezogene Linien = Geopotentialwelle in gpm

gestrichelte Linien = Temperaturwelle in °C

die beiden kurz gestrichelten Linien zeigen die vertikalen Achsenneigungen des Tiefdrucktroges im Geopotentialfeld und des warmen Rückens im Temperaturfeld

wärts von 1000 bis 250 mb. In der x-Richtung ist die Ausdehnung einer ganzen Wellenlänge $L = 360^\circ$ erfaßt. Die Achsenneigungen sind durch die punktierten beiden Linien dargestellt. (für das Minimum der Geopotentialwelle nach rückwärts, für das Maximum der Temperaturwelle der Störung nach vorwärts).

IV. Der Grundstrom

Die modellmäßig so festgelegte barokline Störung wird nun einem ebenfalls baroklinen Grundstrom überlagert. Dieser wird der Einfachheit wegen als von der y-Koordinate unabhängig gewählt (unabhängig von der Breite ϕ). Er soll aber von der Höhe abhängig sein, d.h. mit wachsender Höhe vom Erdboden an aufwärts zunehmen (mit wachsendem Druck p linear abnehmen).

Als analytischen Ansatz wird der Folgende gewählt:

$$\phi_G(p, y) = -2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) (cf_0) y \quad (18)$$

was besagt, daß quer zum Grundstrom (Index G) in der (y, p)-Ebene (Vertikalschnitt entlang eines Meridians) ein Abfall des Geopotentialfeldes nach Norden hin erfolgt, der mit wachsender Höhe (abnehmendem Druck) linear zunimmt. Der Grundstrom errechnet sich dann aus der geostrophischen Beziehung:

$$u_G = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi_G}{\partial y} = 2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) (c) \quad (19)$$

Dies zeigt, daß u_G in $p=p_0=1000$ mb $\equiv 0$ ist und in $p=500$ mb den Wert c erreicht. c wird als 10 m/sec angenommen, kann aber beliebig gesteigert werden. In 250 mb ergibt sich dann $u_G=1,5c=15$ m/sec. c ist also ein frei wählbarer, konstanter Geschwindigkeitsparameter.

Zu (18) gehört natürlich auch ein hydrostatisch balanciertes Temperaturfeld:

$$T_G = - \frac{p}{R} \frac{\partial \phi_G}{\partial p} = - \frac{2}{R} \frac{P}{p_0} (c f_0) y \quad (20)$$

Dies bedeutet eine Abnahme der Temperatur in Richtung zum Pol. Gleich. (19) und (20) erfüllen auch die thermische Windbeziehung $\frac{\partial u_g}{\partial p} = \left(\frac{R}{f_0 p} \right) \frac{\partial T_G}{\partial y}$. Das polwärts gerichtete Temperaturgefälle ist am stärksten in 1000 mb und nimmt aufwärts bis 250 mb ab. Die Fig. (9) bringt diese Grundstromverhältnisse zur Darstellung. In der oberen Bildreihe (man beachte, daß hier eine logarithmische p Koordinate in der Vertikalen gewählt ist) ist im linken Bild die ϕ_G -Verteilung entsprechend Gleich. (18), in der Mitte die u_g -Verteilung und im rechten Bild die T_G -Verteilung zwischen 30°N und 70°N (Mitte = 50°N) dargestellt. Wie man erkennt, nimmt das in jeder Höhe lineare meridionale ϕ -Gefälle von 1000 mb an, wo es Null ist, aufwärts bis 250 mb zu, wo es 740 gpm beträgt. Das entsprechende in jeder Höhe ebenfalls lineare T_G -Gefälle nimmt hingegen von 34°C (unten) bis auf ca. 8°C (oben) ab. Die unteren beiden Bilder zeigen die angenommene u_g -Verteilung und jene von ϕ und T entsprechend langjährig mittleren Januar-Verhältnissen in 50°N .

Abschließend soll in diesem Abschnitt noch eine Abbildung (siehe Fig. (10)) präsentiert werden, die den Aufbau von Grundstrom und barokliner Wellenstörung in 4 unterschiedlichen Niveaus (900, 700, 500, 300 mb) zur Darstellung bringt. In der linken Bildreihe ist das zum geostrophischen Grundstrom passende meridionale Gefälle des Geopotentialfeldes entsprechend der Gleich. (18) für diese 4 Niveaus festgehalten, welches von der x-Koor-

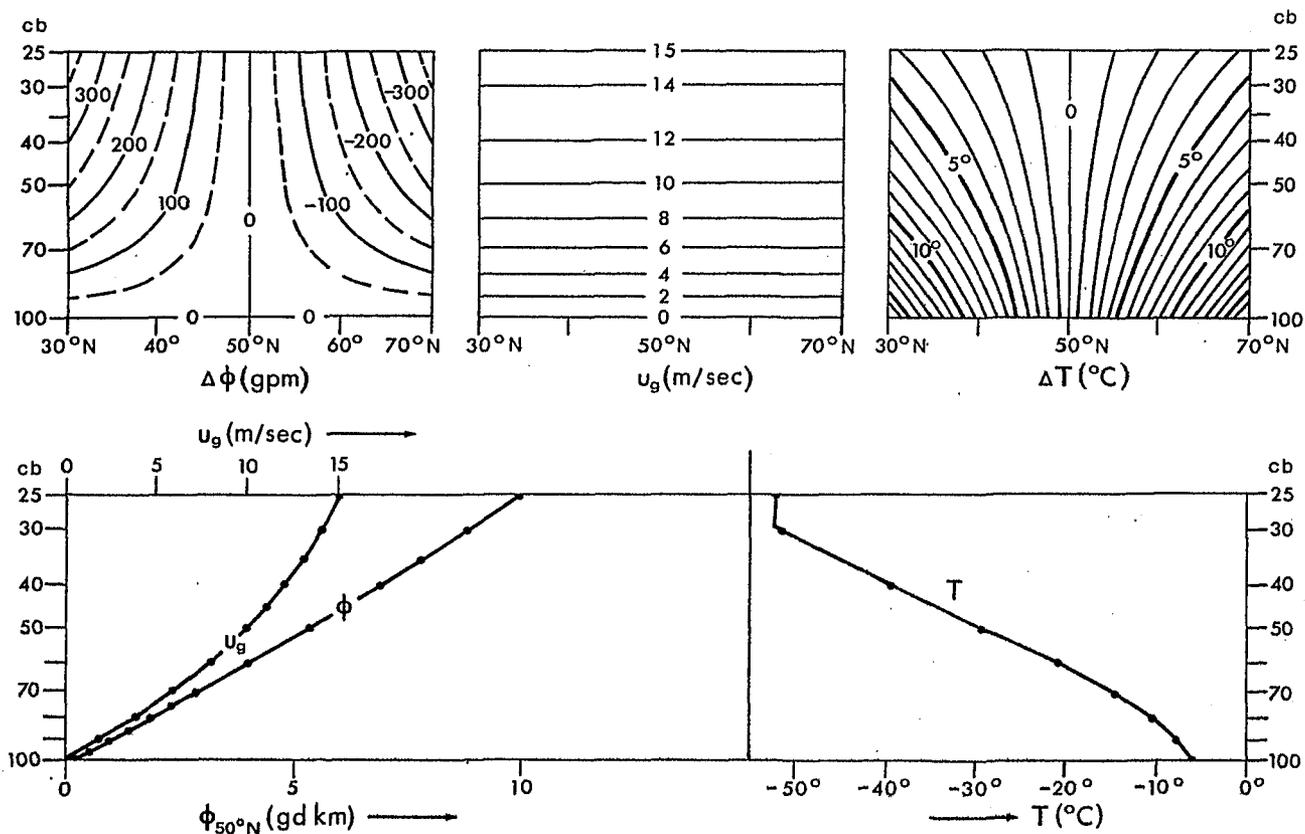


Fig. 9 Struktur des gewählten Grundstromes (u_g)
 obere Reihe: links, Geopotentialfeld ($\Delta\phi$)
 mitte, Stromgeschwindigkeit (u_g)
 rechts, Temperaturfeld (ΔT)
 untere Reihe: u_g , ϕ , T als Funktion von p in $50^\circ N$
 (Januarmittel)

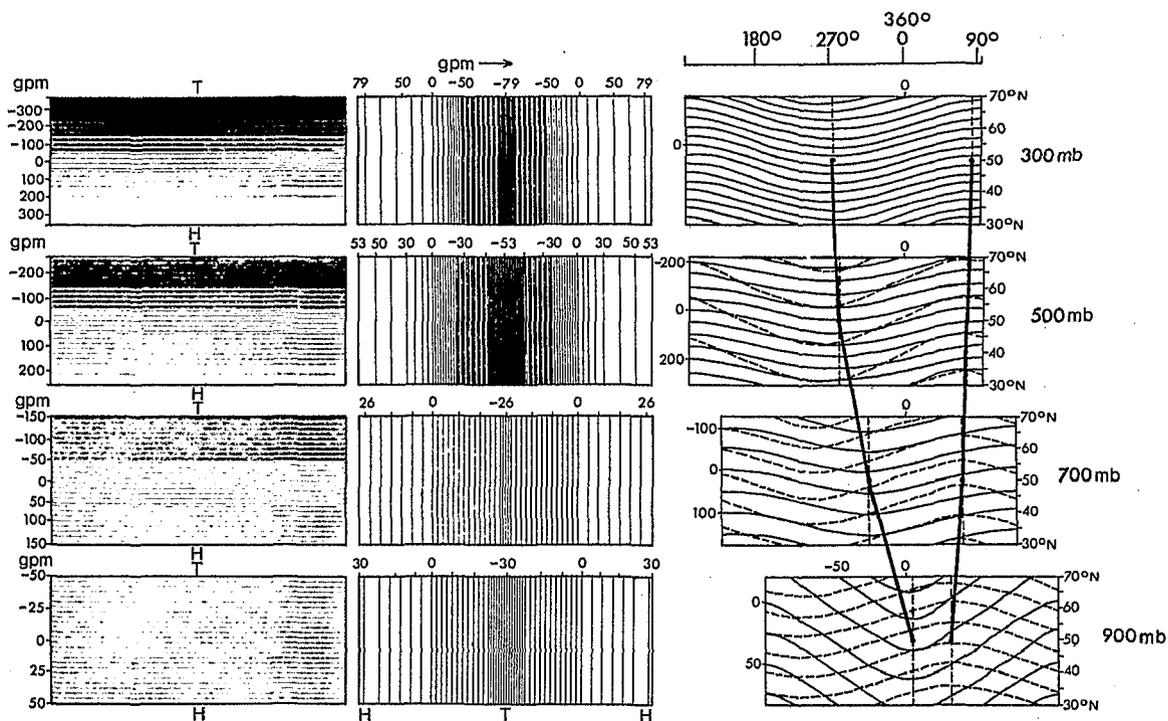


Fig. 10 Struktur der baroklinen Wellenstörung in 4 unterschiedlichen Druckflächen
linke Reihe: Neigung des Geopotentialfeldes passend zum Grundstrom
mittlere Reihe: Neigung des Geopotentialfeldes der überlagerten Wellenstörung
rechte Reihe: Geopotentialfeld (ausgezogene Linien) Temperaturfeld (gestrichelte Linien)

dinate unabhängig ist und sich mit wachsender Höhe verstärkt. In der mittleren Bilderreihe ist das Geopotential-Feld der überlagerten Wellenstörung nach Gleich. (12) bildlich präsentiert, das von der y-Koordinate unabhängig ist. Es zeigt die schwächste Amplitude in 700 mb (eigentlich 770 mb) und eine mehr als doppelt so große Amplitude in 300 mb (79 gpm) als in 900 mb (30 gpm). In Kombination liefert die linke plus die mittlere Bildreihe die rechte Bildserie, wobei nun die Phasenverschiebung mit der Höhe berücksichtigt wurde. Dem kombinierten Geopotential-Feld (Grundstrom plus Welle) ist auch noch das Temperaturfeld von Grundstrom plus Welle hinzugefügt, wobei der Schnitt beider Isolinienansätze die horizontale Baroklinität in den einzelnen Druckflächen deutlich erkennbar werden läßt.

V. Analytische Ausdrücke zum Zweck einer Diagnose des baroklinen Systems (Grundstrom plus überlagerter Wellenstörung)

Für eine Durchrechnung und Anwendung des in Abschnitt II entwickelten "quasi-geostrophischen Systems" ist es nun notwendig, einzelne Größen und ganze, in diesen Beziehungen enthaltene Glieder formelmäßig und auch bildlich darzustellen und zu diskutieren. Es ergeben sich nacheinander:

(1) das Geopotentialfeld:

$$\phi(x, y, p) = -2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) (cf_0) y + A(p) \sin(kx - \alpha(p))$$

(2) die vertikale Änderung des Geopotentialfeldes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial p} &= \frac{2}{p_0} (cf_0) y + \left\{ A' \sin(kx - \alpha) - (\alpha' A) \cos(kx - \alpha) \right\} \\ &= \frac{2}{p_0} (cf_0) y - C \sin(kx - \gamma) \end{aligned}$$

(3) das Temperaturfeld:

$$T = - \frac{p}{R} \frac{\partial \phi}{\partial p} = - \frac{p}{R} \left(\frac{2}{p_0} (c f_0) y \right) + \frac{p}{R} C \sin (kx - \gamma)$$

(4) der zonale geostrophisch balancierte Grundstrom:

$$u_g = - \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) c$$

(5) die meridionale Windkomponente:

$$v_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{kA}{f_0} \cos (kx - \alpha)$$

(6) die relative Vorticity:

$$\xi_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} = - \frac{k^2 A}{f_0} \sin (kx - \alpha) \quad \left(\equiv \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi = - \frac{k^2}{f_0} \phi \right)$$

(7) die horizontale Temperaturadvektion:

$$v_g \cdot \nabla T = \frac{p}{R} \left\{ 2 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) (ck) C \cos (kx - \gamma) - \frac{2}{p_0} (ck) A \cos (kx - \alpha) \right\}$$

(8) die horizontale Advektion geopotentieller Dicke:

$$v_g \cdot \nabla \left(- \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = \left\{ 2 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) (ck) C \cos (kx - \gamma) - \frac{2}{p_0} (ck) A \cos (kx - \alpha) \right\}$$

(9) die horizontale Advektion relativer Vorticity:

$$v_g \cdot \nabla \xi_g = u_g \frac{\partial \xi_g}{\partial x} = \left(2 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) c \right) \left(- \frac{k^3 A}{f_0} \cos (kx - \alpha) \right)$$

(10) die horizontale Advektion der planetarischen Vorticity:

$$v_g \cdot \nabla f = \beta v_g = \beta \frac{kA}{f_0} \cos (kx - \alpha) \quad \left(\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\Omega}{a} \cos \phi \right)$$

(11) die horizontale Advektion der absoluten Vorticity:

$$v_g \cdot \nabla (\xi_g + f) = \left\{ 2 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) (ck^2) - \beta \right\} \left(- \frac{kA}{f_0} \cos (kx - \alpha) \right)$$

(12) die vertikale Änderung der horiz. Advektion relativer Vorticity:

$$\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ v_g \cdot \nabla (\xi_g + f) \right\} = \left(\frac{2ck^3}{\sigma} \right) \left\{ \frac{A}{p_0} \cos (kx - \alpha) + \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) c \cos (kx - \gamma) \right\}$$

(13) die vertikale Änderung der horiz. Advektion planeta-
rischer Vorticity:

$$\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ w_g \cdot \nabla f \right\} = - \beta \frac{k}{\sigma} C \cos (kx-\gamma)$$

(14) die vertikale Änderung der horiz. Advektion absoluter
Vorticity:

$$\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ w_g \cdot \nabla (\xi_g + f) \right\} = \left\{ 2 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) (ck^2 - \beta) \right\} \frac{k}{\sigma} C \cos (kx-\gamma) + \frac{k}{\sigma} \left(\frac{2ck^2 A}{p_0} \right) \cos (kx-\alpha)$$

(15) der Laplace-Operator angewandt auf die horiz. Dicke-
Advektion:

$$\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left\{ w_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right\} = \left\{ -2 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) (ck^2) \right\} \frac{k}{\sigma} C \cos (kx-\gamma) + \frac{k}{\sigma} \left(\frac{2ck^2 A}{p_0} \right) \cos (kx-\alpha)$$

(16) Summe von (14) und (15); (gesamte rechte Seite der ω -
Gleichung (11)):

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = - \beta \frac{k}{\sigma} C \cos (kx-\gamma) + \frac{k}{\sigma} \left(\frac{4ck^2}{p_0} \right) A \cos (kx-\alpha)$$

Für eine Durchrechnung wählt man nun die nachfolgenden Größen:

Tabelle 2

$f_0 = 1,1172 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ $\beta = 1,4714 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$	entsprechend $\phi = 50^\circ \text{N}$, $a = 6371 \text{ km}$, $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$
$k = \frac{2\pi}{L} = 1,9535 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$	entsprechend einer Wellenlänge von $L = 3216 \text{ km}$. Das bedeutet 8 Wellen um den Breitenkreis 50°N .
$\sigma = 10^{-4} \text{ cm}^4 / \text{gr}^2 \text{ sec}^{-2} = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$	entsprechend etwa einer mittleren Abnahme der Temperatur mit der Höhe von $-0,75/100 \text{ m}$.

Diese Tabelle zeigt, daß hier eine relativ kurze Welle betrachtet
werden soll, die zwischen dem Minimum und dem stromabwärts voraus-
eilenden Maximum im Geopotentialfeld nur $L/2 = 1608 \text{ km}$ Längener-
streckung besitzt.

Eine Serie von Bildern soll nun die vertikale Struktur dieses gewählten Systems und ihre Variabilität mit der geogr. Länge (entlang des Breitenkreises 50°N) näher beleuchten. Man beginnt am besten mit dem Feld des Geopotentials (1), der Temperatur (3) und dem geopot. Dickenfeld (2), wobei letzteres bis auf einen druckabhängigen Faktor ($\frac{p}{R}$) eng mit dem Temperaturfeld verknüpft ist (siehe Fig. (11)).

Die Fig. (11) zeigt im oberen Bild das Geopotentialfeld der Wellenstörung entsprechend dem Ansatz nach Gleich. (12). Man erkennt die starke Rückwärts(westwärts)-Neigung der Trog- bzw. Rückenachse von 1000 bis etwa 500 mb aufwärts; (ca. $1/161$). Von dort aufwärts bis 250 mb verlaufen diese Achsen fast vertikal (ca. $1/12,5$). Was die Amplitude angeht, so ist sie oben groß (80 gpm) und unten (40 gpm) mit einer leichten Verringerung in der Nähe der 770 mb-Fläche. Weiterhin zeigt die Fig. (11) im untersten Bild das Temperaturfeld der Wellenstörung entsprechend Gleich. (14). Hier neigt sich die Achse maximaler bzw. minimaler Temperatur e-Potenzartig mit wachsender Höhe vorwärts (ostwärts) und die Amplitude nimmt von 1000 mb an aufwärts ab, mit einer leichten Störung dieser Abnahme nahe der 770 mb-Fläche. Aus diesen beiden Bildern wird die hohe barokline Struktur der Wellenstörung erkennbar, denn vom dreidimensionalen Solenoidvektor $\mathbf{N} = -(\nabla\alpha \times \nabla p)$ gültig für ein z-Koordinatensystem ist in dieser Vertikalebene nur die Komponente $N_y(T, p) = -\frac{R}{p} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \right\}$ wirksam und wenn man hierin alle Ableitungen auf solche gültig für ein p-System transformiert, so ergibt sich für die Baroklinität in dieser Ebene: $N_y = -\frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p$, wobei $\frac{\partial T}{\partial x}$

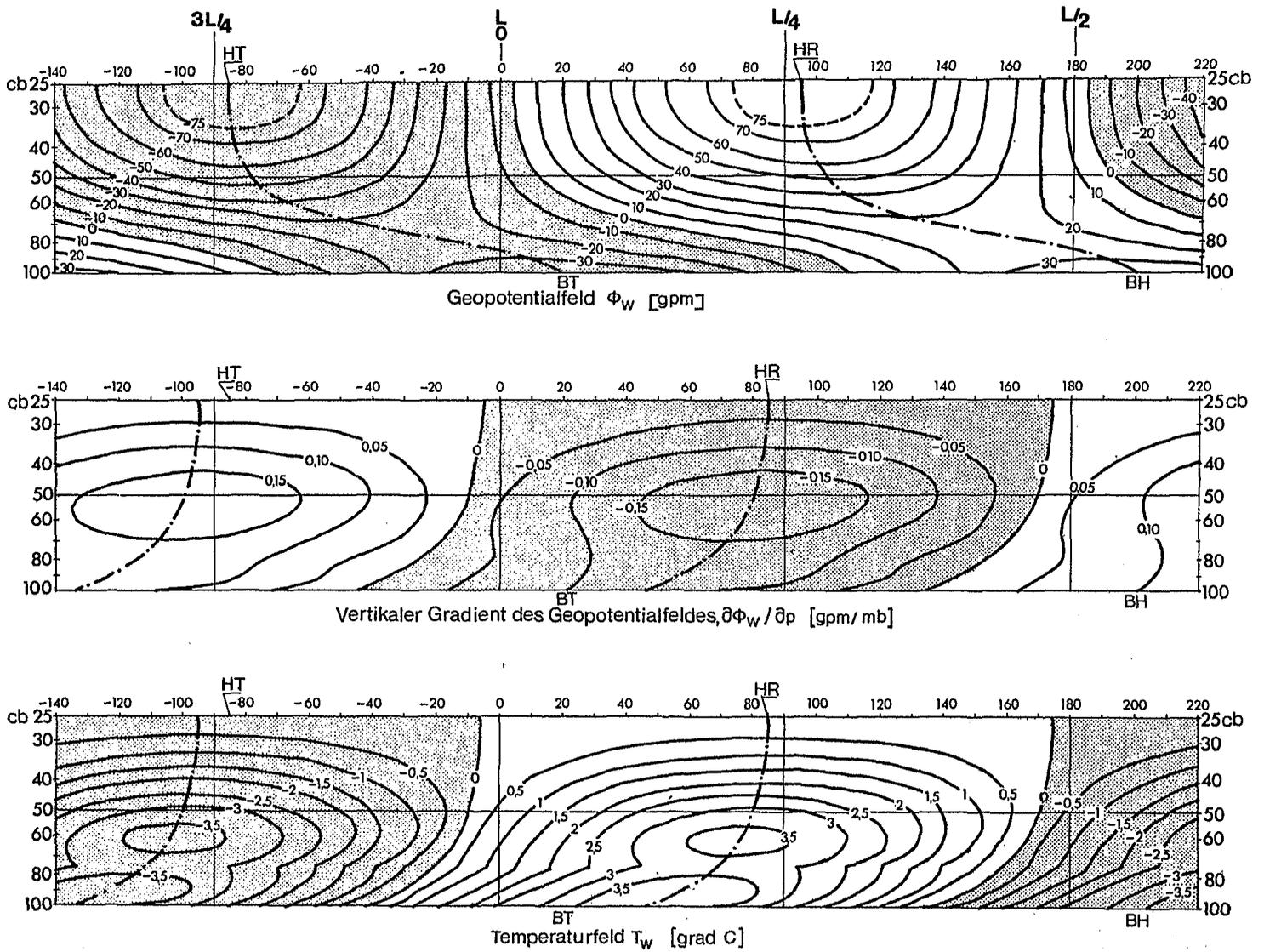


Fig.. 11 Das Geopotentialfeld, seine vertikale Änderung und das Temperaturfeld der Wellenstörung.

Dieses Bild ist ein vertikaler Querschnitt, mit einer horizontalen Erstreckung von einer Wellenlänge $L = 360^\circ$ ($k = 2\pi/L$) und einer vertikalen Ausdehnung von 750 mb (unten 1000, oben 250 mb).

BT, BH = Bodentief, -hoch; HT, HR = Höhentrog, -rücken

auf einer isobaren Fläche zu bilden ist. Damit findet die Baroklinität ihren sichtbaren Ausdruck durch den horizontalen Gradienten des Temperaturfeldes. Wie das unterste Bild der Fig. (11) dann zeigt, ist sie in der Region oberhalb des Bodentiefs und oberhalb des Bodenhochs am größten, aber von wechselndem Vorzeichen, was einen unterschiedlichen Umlauf um die Solenoide anzeigt. Zusätzlich kann man zeigen, daß bei geostrophischem Gleichgewicht die vertikale Änderung des Meridionalwindes v_g dieser Baroklinität in der (xp)-Ebene proportional ist: $\frac{\partial v_g}{\partial p} = - \left[1/(\rho T f) \right] \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p$ (siehe z.B. S. Petterssen (1956) S. 106-108). Die Gültigkeit dieser Beziehung kann am später gezeigten Bild für v_g leicht nachgeprüft werden.

Was das mittlere Bild der Fig. (11), nämlich die vertikale Änderung des Geopotentialfeldes, betrifft, so ist sie bis auf einen Faktor und ein umgekehrtes Vorzeichen mit dem mittleren Bild für T identisch, weil $\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha = -\left(\frac{R}{p}\right) T$.

Da dieser Faktor $\left(\frac{R}{p}\right)$ in 1000 mb nur 0,029, in 250 mb aber 0,120 grad/gpm mb beträgt, werden die unteren Werte von T geschwächt, die oberen Werte gesteigert und das Maximum von $\frac{\partial \phi}{\partial p}$ in die Schicht zwischen 600 und 400 mb verlagert.

Als nächstes sollen die Verteilungen der meridionalen Geschwindigkeitskomponente v_g (5) und der relativen Vorticity $\xi_g = \frac{\partial v_g}{\partial x}$ (6) diskutiert werden (siehe Fig. 12). Da v_g dem Cosinus von $(kx-\alpha)$ proportional ist, fallen die Achsen maximalen oder minimalen v_g (maximalen S-bzw. maximalen N-Windes) mit den geneigten Achsen verschwindendem ϕ im Geopotentialfeld zusammen, während v_g an den geneigten Trog- und Rückenachsen identisch null wird (siehe

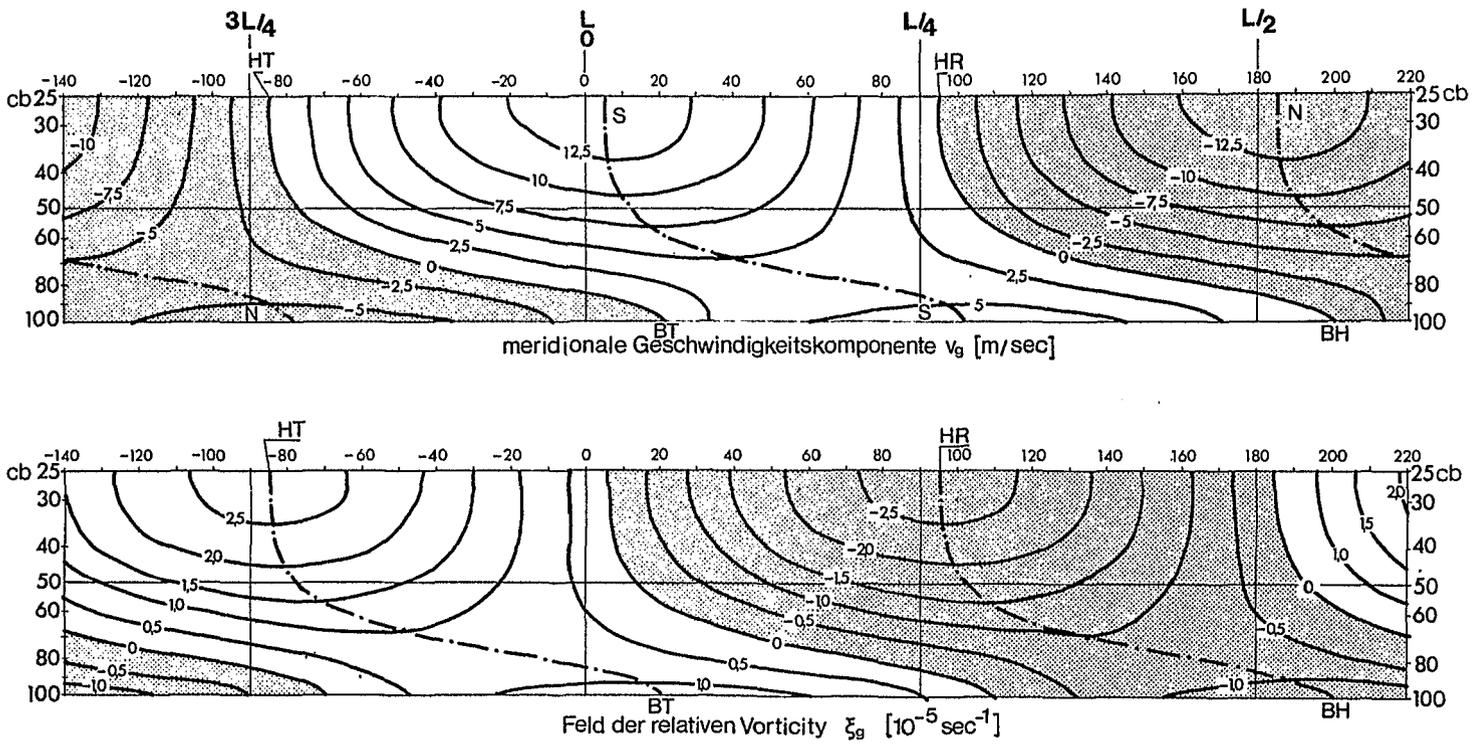


Fig. 12 Das Feld der relativen Vorticity und der meridionalen Geschwindigkeitskomponente der Wellenstörung

(Erklärungen wie unter Fig. 11)

Fig. (12) oberes Bild). Während in 1000 mb der stärkste S-Wind zwischen Bodentief und Bodenhoch mit ca. 7 m/sec weht (bzw. der stärkste N-Wind zwischen Bodenhoch und Bodentief) findet sich der stärkste S-Wind in der Höhe etwa vertikal über dem Bodentief und der stärkste N-Wind fast vertikal über dem Bodenhoch. Die starke Windänderung mit der Höhe an diesen beiden Stellen steht, wie schon vorstehend ausgeführt, im Einklang der starken Baroklinität in der (x,p)-Ebene vertikal oberhalb des Bodentiefs und -hochs. Das untere Bild in Fig. (12) zeigt die Verteilung der relativen Vorticity ξ_g . Diese ist wegen $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ nur von x und p abhängig und erfüllt daher wegen der geostrophischen Balance (siehe Gleich. 1a, 2a) die Bedingungen:

$$\xi_g = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \equiv \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi \equiv -\left(\frac{k^2}{f_0}\right) \phi. \text{ Sie ist also mit dem}$$

konstanten und negativen Faktor $\left(-\frac{k^2}{f_0}\right)$ direkt dem Geopotentialfeld proportional. Wie das Bild zeigt, fallen daher die geneigten Achsen des Geopotentialfeldes mit den Achsen maximalen bzw. minimalen ξ_g zusammen. Entlang der Trogachse (ϕ negativ) ist ξ_g maximal und positiv, was maximale zyklonische relative Vorticity bedeutet. Entlang der Rückenachse (ϕ positiv) ist ξ_g maximal und negativ, was antizyklonische relative Vorticity anzeigt. Entlang beider Achsen mit verschwindendem ϕ , ist auch $\xi_g \equiv 0$. Die numerische Größe erreicht im Bodentiefzentrum +1,34, im Höhentrog $2,68 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ an zyklonischer, im Bodenhoch -1,34 und Höhenrücken $-2,68 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ an antizyklonischer Vorticity.

Die nächste Fig. (13) präsentiert die horizontale Temperaturadvektion $w_g \cdot \nabla T$ (?) (oberes Bild) und die horizontale Dicke

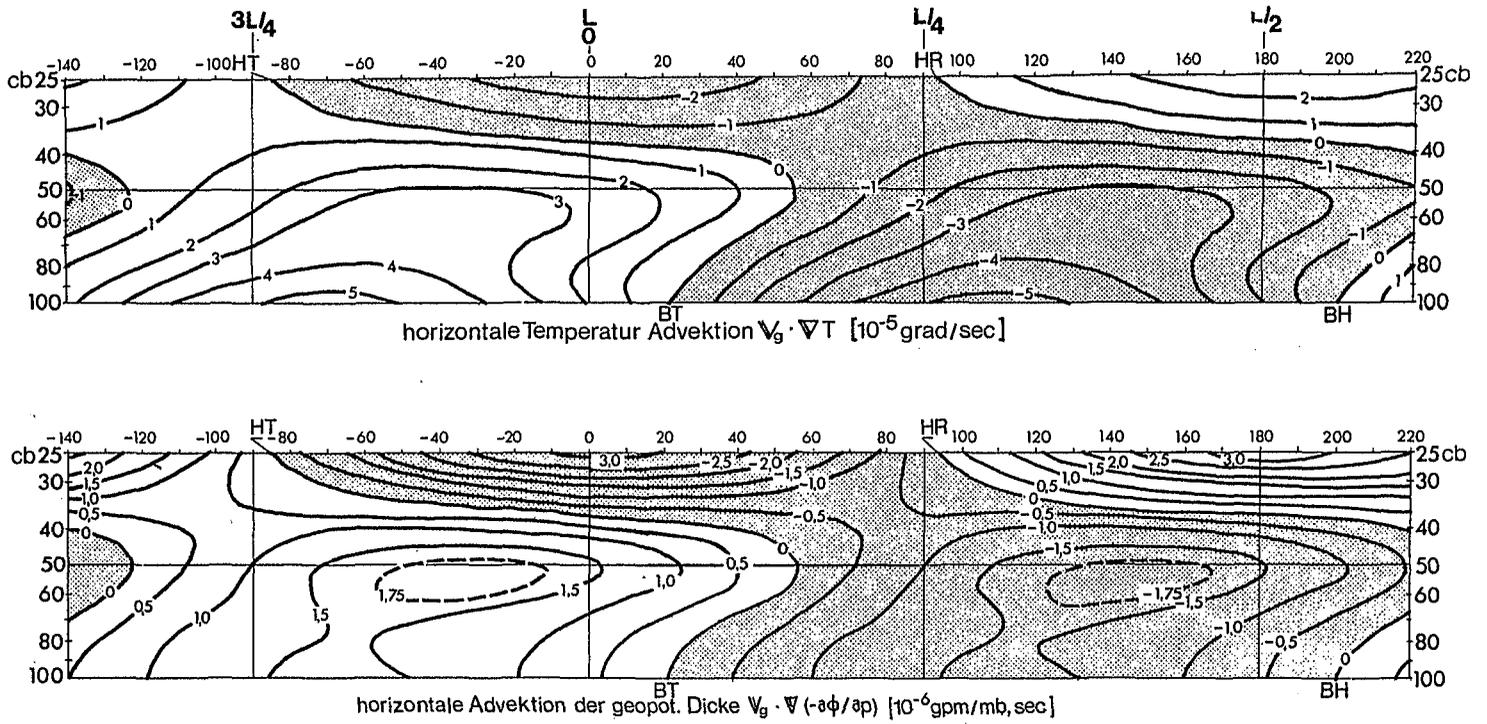


Fig. 13 Die horizontale Temperatur-Advektion und jene der geopotentiellen Schichtdicke

(Erklärungen wie unter Fig. 11)

Advektion $w_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)$ (8) (unteres Bild). Diese beiden Advektionen sind natürlich wieder bis auf den Faktor $\left(\frac{p}{R} \right)$ einander identisch. $w_g \cdot \nabla T$ besteht aus zwei advektiven Anteilen nämlich $u_g (\partial T / \partial x)$ und $v_g (\partial T / \partial y)$. Der erste davon ist als zonale Advektion zu bezeichnen und kombiniert die in jeder Druckfläche konstante Grundstromgeschwindigkeit $u_g(p)$ mit dem Gefälle der Temperatur in der x-Richtung, das lediglich durch die Wellenstörung erzeugt ist. Andererseits tritt im zweiten meridional advektiven Anteil die Meridionalgeschwindigkeit v_g , die nur mit der Wellenstörung allein verknüpft ist, in Kombination mit dem Gefälle der Temperatur in der y-Richtung auf, welches mit der vertikalen Änderung des Grundstroms verbunden ist (thermische Windgleichung!). In großen Zügen betrachtet zeigt die Fig. (13), oberes Bild in der Region über dem Bodentief und westlich der Trogachse Kaltluftadvektion ($w_g \cdot \nabla T > 0$). Diese nimmt mit der Höhe stark ab (mit dem Druck zu) und geht sogar in hohen Schichten in Warmluftadvektion über. Hingegen zeigt sich in der Region über dem Bodenhoch, bzw. westlich der Rückenachse horizontale Advektion warmer Luft ($w_g \cdot \nabla T < 0$), die mit wachsender Höhe zunimmt (mit wachsendem Druck abnimmt) und in den hohen Schichten sogar in Kaltluftadvektion übergeht. Wie dem oberen Bild der Fig. (13) zu entnehmen ist, hat die horizontale Advektion warmer (kalter) Luft in eine Schicht bestehend aus einem Intervall konstanten Drucks hinein, eine Zunahme (Abnahme) der geopotentiellen Dicke der Schicht zur Folge, wie schon früher anhand eines Beispiels bei der Diskussion der Gleich. (8,8a,8b) eingehend erläutert wurde. Auf diesen wichtigen Mechanismus und seine Auswirkung auf die Vertikalgeschwindigkeit sowie die lokal-

zeitliche Änderung von ϕ komme ich noch später eingehend zurück.

Nun wollen wir uns der horizontalen Vorticity Advektion zuwenden (siehe Fig. (14)). Sie findet ihren Ausdruck durch die Advektion der absoluten Vorticity $w_g \cdot \nabla(\xi_g + f)$ (11) und diese ist die Summe der relativen und der planetarischen Vorticity Advektion, $v_g \cdot \nabla \xi_g$ (9) bzw. $w_g \cdot \nabla f$ (10). Alle drei sind dem Cosinus von $(kx - \alpha)$ proportional, was wieder anzeigt, daß die intensivste horizontale Vorticity Advektion jeder der 3 Arten auf halbem Weg zwischen den geneigten Achsen des Geopotentialfeldes erfolgen und entlang der Trog- als auch der Rückenachse selbst identisch gleich null werden muß. Dies zeigen alle 3 Bilder der Fig. (14). Positive Werte bedeuten dabei eine Advektion anti-zyklonischer (also negativer) Vorticity und negative Werte zeigen eine Advektion zyklonischer (also positiver) Vorticity an. Hinsichtlich der Größenordnung kann man sich besser informieren, wenn man die Ausdrücke (9, 10, 11) etwas umschreibt. Dann ist $w_g \cdot \nabla \xi_g = u_g (-k^2 v_g)$ und $w_g \cdot \nabla f = v_g (\beta)$ mit $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$. Also ist $w_g \cdot \nabla(\xi_g + f) = v_g (-k^2 u_g + \beta)$. Dies wiederum beweist, daß alle 3 Advektionen proportional v_g sind, also proportional $\cos(kx - \alpha)$, was schon vorstehend erwähnt wurde. Wie das oberste Bild der Fig. (14) zeigt, ist wegen der Zunahme von u_g und v_g mit der Höhe die Advektion $v_g \cdot \nabla \xi_g$ in den höheren Niveaus intensiv und in den tieferen Schichten wenig effektiv. Die starke Veränderlichkeit dieser Advektion mit der Höhe konzentriert sich etwa auf die Regionen oberhalb des Bodentiefs und -hochs und dies sind auch die Bereiche östlich des Höhentrogs bzw. östlich des Höhenrückens.

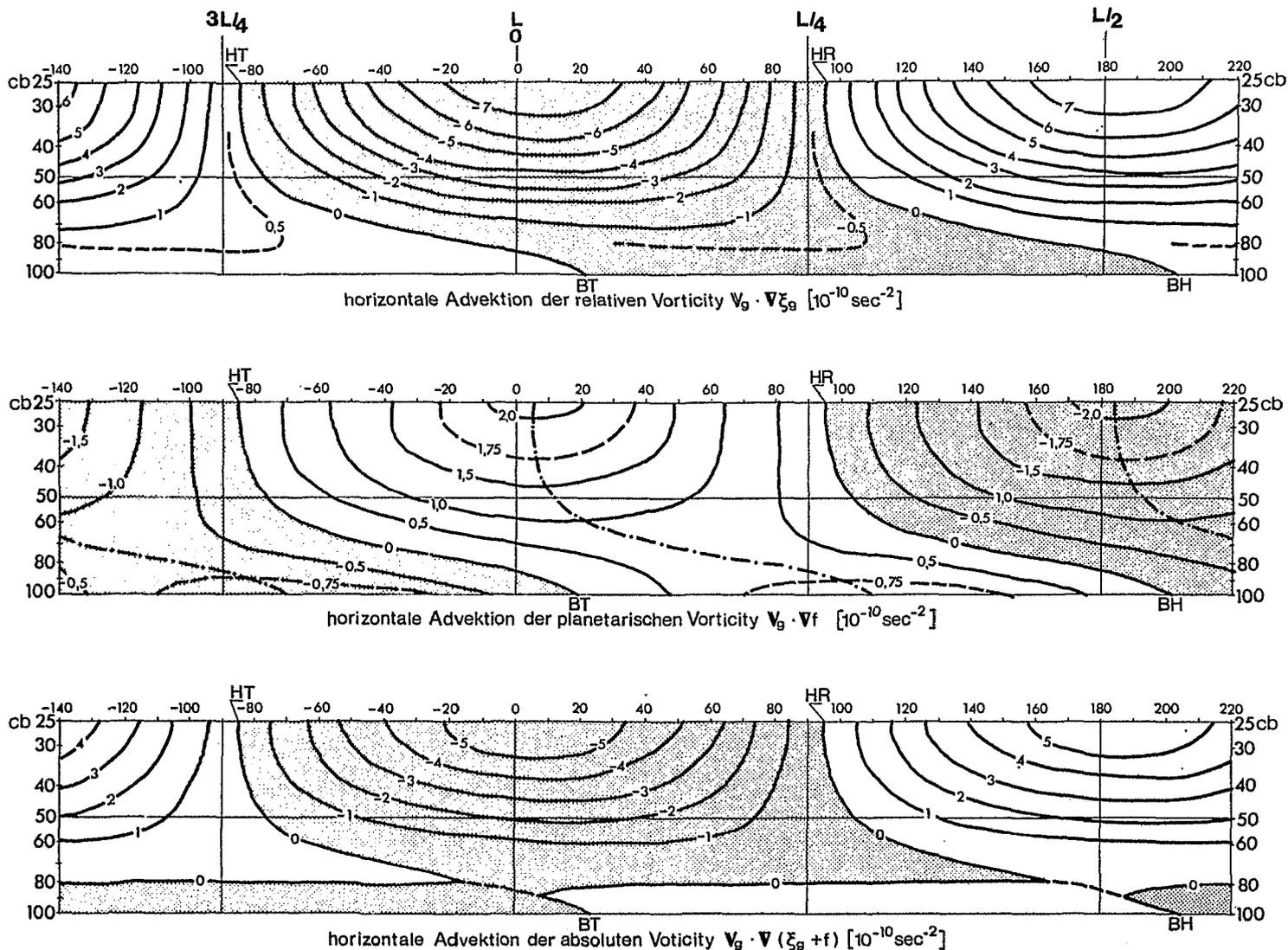


Fig. 14 Die horizontalen Advektionen relativer, planetarischer und absoluter Vorticity

(Erklärungen wie unter Fig. 11)

Was das mittlere Bild in Fig. (14) angeht, so ist die planetarische Vorticity Advektion $v_g \beta$ einfach eine Wiedergabe des Bildes für v_g mit dem konstanten Multiplikationsfaktor $\beta = 1,4714 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$. Diese Advektion zeigt für die gewählte relativ kurze Welle positive Werte östlich des Höhentrog oberhalb des Bodentiefs und negative östlich des Höhenrückens oberhalb des Bodenhochs.

Diese beiden Bilder ergeben nun zusammen betrachtet, daß in den oberen Niveaus beide Advektionen am intensivsten sind und daß im Bereich östlich des oberen Wellentrog:

$v_g \cdot \nabla \xi_g < 0$ ist, weil der dort wehende SW-Wind vom positiven (zyklonischen) Vorticity Maximum im Wellentrog gegen das negative (antizyklonische) im Wellenrücken gerichtet ist, also wie man sagt "gradient abwärts" weht.

Hingegen ist $v_g \cdot \nabla f > 0$, da der dort wehende Südwind v_g "gradient aufwärts" relativ zum Gradienten der planetarischen Vorticity (f nach Norden zunehmend) weht. Dies ist auch leicht aus $v_g > 0$ also $\beta v_g > 0$ ersichtlich.

Also folgt das interessante Resultat, daß diese beiden Advektionen wechselndes Vorzeichen besitzen und sich daher gegenseitig kompensieren (siehe Fig. (14)).

Für den Bereich östlich des oberen Wellenrückens gilt mit ähnlicher Argumentation das Umgekehrte ($v_g \cdot \nabla \xi_g > 0$, $v_g \cdot \nabla f < 0$).

Nunmehr wird auf die quasi-geostrophische Vorticity-Gleichung

(9b) verwiesen, in welche, wenn man vorerst einmal vom Glied

$f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}$ absieht, diese beiden Advektionen eingehen und eine lokalzeitliche Änderung $\frac{\partial \xi_g}{\partial t}$ der rel. Vorticity bedingen. Dann ergibt

sich, daß östlich des Höhentrog, also etwa am Wendepunkt strom-

abwärts die rel. Vorticity, die dort Null ist, als Folge von $w_g \cdot \nabla \xi$ lokalzeitlich zunimmt (also zyklonische Vorticity erzeugt wird oder eine Trogbildung erfolgt), während als Folge von $w_g \cdot \nabla f$ dort eine antizyklonische Vorticity Erzeugung eingeleitet wird. D.h. dann, daß als Folge von horiz. relativer Vorticity-Advektion die Welle sich speziell in den oberen Niveaus ostwärts verlagern wird. Ganz im Gegensatz dazu wird die planetarische Vorticity Advektion den Wellentrog und -rücken mit der Zeit westwärts gegen den advektierenden Wind verschoben (retrograde Verlagerung oder kurz als "Retrogression" bezeichnet).

Die schließliche Verlagerung als Summe beider sich kompensierenden Advektionen, läßt sich anhand der Beziehung $\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = -w_g \cdot \nabla (\xi_g + f) = v_g (k^2 u_g - \beta)$ ermitteln. Östlich des Höhentrogas ist v_g (als Südwind) stets positiv und daher gilt: für eine Stationarität der Welle $u_g = \frac{\beta}{k^2} = \frac{\beta L^2}{4\pi^2}$ oder $L_s = 2\pi \sqrt{u_g / \beta}$ für eine ostwärts Verlagerung (stromabwärts) $u_g > \frac{\beta L^2}{4\pi^2}$; $L < L_s$ und für eine westwärts Verlagerung (stromaufwärts) $u_g < \frac{\beta L^2}{4\pi^2}$; $L > L_s$

Tabelle 3

ϕ	β ($\text{cm}^{-1} \text{sec}^{-1}$)	u_g [m/sec]									
		2	3,85	4	6	8	10	15	20	30	40
		L_s (km)									
50°	$1,4714 \cdot 10^{-13}$	2316	3216	3276	4012	4633	5180	6344	7325	8972	10360

Für die Breite 50°N präsentiert die Tabelle (3) die für eine stationär verharrende Wellenstörung bei variabler Grundstromgeschwindigkeit u_g (2 bis 40 m/sec) zu fordernde Wellenlänge L_s . Man erkennt, daß die gewählte relativ kurze Wellenlänge L von 3216 km fast im ganzen u_g -Bereich die Bedingung $L < L_s$ einhält. Diese

Welle muß sich also ostwärts (stromabwärts) fortpflanzen. Lediglich für schwache Grundstromgeschwindigkeit $< 3,85$ m/sec pflanzt sie sich westwärts (stromaufwärts) fort und bei $u_g \approx 3,85$ m/sec verharzt sie stationär. Dies entspricht bei dem gewählten Vertikalprofil von u_g einer Druckfläche von 807,5 mb. Daher wird sich die Welle unterhalb von ca. 800 mb als Folge des dort dominierenden Einflusses der planetarischen über die relative Vorticity-Advektion westwärts verlagern.

Auch kann man der Tabelle (3) entnehmen, daß für etwas gesteigerte Grundstromgeschwindigkeit es nur den langen oder sehr langen Wellen möglich wird, sich westwärts zu verlagern.

Diese aus der divergenz-freien Vorticity-Gleichung abgeleiteten wichtigen Schlußfolgerungen (Vernachlässigung des Terms $f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}$) sind im vollen Einklang mit der klassischen Wellentheorie C.G. Rossby's für eine divergenzfreie Atmosphäre, [11], [12], [14], [16].

Betrachtet man nun das untere Bild der Fig. (14), welches die horiz. Advektion der absoluten Vorticity zur Darstellung bringt, so lassen sich alle vorstehend genannten Eigenheiten sofort ablesen. Diese Advektion ist in den oberen Schichten oberhalb des Bodentiefs östlich des Höhentrogas stark negativ (Zufuhr zyklonischer absoluter Vorticity) und oberhalb des Bodenhochs östlich des Höhenrückens stark positiv (Zufuhr antizyklonischer Vorticity). Sie ist entlang der Trog- und Rückenachse des Geopotentialfeldes identisch null.

Knapp unterhalb von 800 mb dreht sich das Vorzeichen des Termes um, weil sich hier die planetarische Vorticity als dominant erweist.

Als eine wichtige Erkenntnis aus dieser Vorticity-Diagnose ergibt sich, daß Vorticity-Advektion sich als ein Prozess erweist, der unfähig ist, die Stärke einer solchen Wellenstörung zu ändern, sondern ihre Wirkung besteht nur darin, die Welle horizontal weiter ostwärts (Grundstrom abwärts) zu verlagern. Dies gilt für die relativ kurzen Wellen, während die langen westwärts gegen die Grundstromsrichtung verschoben werden.

Nunmehr erscheinen alle Voraussetzungen und Kenntnisse gegeben, um jene Konsequenzen klarzulegen, die sich aus einer Anwendung der beiden Gleichungen für ω und $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ (Gleich. (10) und (11) im Falle einer baroklinen Wellenstörung ergeben. Dies soll im Abschnitt VI. geschehen.

VI. Die Anwendung des quasi-geostrophischen Systems auf eine einem baroklinen Grundstrom überlagerte barokline Wellenstörung

VI.1. Das Vertikalgeschwindigkeitsfeld, Lösung der ω -Gleichung

Nach einer detaillierten Analyse der horizontalen Advektion der Temperatur (oder der geopotentiellen Dicke) bzw. jener der Vorticity im Abschnitt V. ist man jetzt in der Lage, durch Anwendung der Gleich. (11) (ω -Gleichung) das Vertikalgeschwindigkeitsfeld $\omega(p, x)$ zu berechnen und den physikalischen Mechanismus dieser Gleichung zu untersuchen. Beide Advektionen bestimmen in dieser diagnostischen Gleichung das Vertikalgeschwindigkeitsfeld, wie folgt:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = \underbrace{\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \mathbf{v}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) \right\}}_I + \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left\{ \mathbf{v}_g \cdot \nabla \left(- \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right\}}_{II} \quad (11)$$

Die beiden Glieder auf der rechten Seite sind bei Anwendung des Wellenmodells durch die in Abschnitt V aufgeführten Beziehungen (14) und (15) ersetzbar und ihre Summe durch (16). Jede dieser Beziehungen enthält für sich zwei Wellenanteile mit druckabhängiger Amplitude und Phase, die man durch Anwendung trigonometrischer Formeln additiv zu einer einzigen Welle zusammenfassen kann. Nimmt man weiter an, daß sich auch ω periodisch ändert, so ist $\nabla^2 \omega = -k^2 \omega$ und die ω -Gleichung nimmt bei Berücksichtigung beider Glieder I, II die folgende Form an:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \left(\frac{k^2 \sigma}{f_o^2} \right) \omega = - \underbrace{\left(\beta \frac{k}{f_o^2} C \right) \cos(kx-\gamma) + \left(\frac{4c k^3}{f_o^2 p_o} A \right) \cos(kx-\alpha)}_{= D \cos(kx-\delta)} \quad (11a)$$

Bei Berücksichtigung von nur einem Glied, entweder I oder II, ergeben sich:

$$\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial p^2} - \left(\frac{k^2 \sigma}{f_o^2} \right) \omega_I = + \underbrace{\left\{ \frac{k}{f_o^2} \left(2 \left(1 - \frac{p}{p_o} \right) (c k^2) - \beta \right) C \right\} \cos(kx-\gamma) + \left(\frac{2c k^3}{f_o^2 p_o} A \right) \cos(kx-\alpha)}_{= D_I \cos(kx-\delta_I)} \quad (11b)$$

oder:

$$\frac{\partial^2 \omega_{II}}{\partial p^2} - \left(\frac{k^2 \sigma}{f_o^2} \right) \omega_{II} = - \underbrace{\left\{ \frac{k}{f_o^2} 2 \left(1 - \frac{p}{p_o} \right) (c k^2) C \right\} \cos(kx-\gamma) + \left(\frac{2c k^3}{f_o^2 p_o} A \right) \cos(kx-\alpha)}_{= D_{II} \cos(kx-\delta_{II})} \quad (11c)$$

Eine Berechnung ergab für die Amplituden D , D_I , D_{II} und die Phasen δ , δ_I , δ_{II} die folgenden Werte:

Tabelle 4

mb	AMPLITUDEN [$10^{-9} \text{ mb}^{-1} \text{ sec}^{-1}$]			PHASEN [Winkelgrade]		
	D	D _I	D _{II}	δ	δ_{I}	δ_{II}
250	18,73	9,36	9,36	5,00	5,00	5,00
300	17,21	12,38	4,90	5,97	2,33	15,09
400	12,97	14,75	3,03	10,53	0,30	121,00
500	8,60	12,56	5,53	22,17	0,81	146,28
600	5,89	8,08	5,35	46,76	5,28	138,43
700	5,52	4,20	4,65	77,83	22,60	125,48
800	6,86	2,82	4,53	100,45	73,56	116,82
900	9,28	4,59	4,69	112,56	112,15	112,98
1000	11,68	7,02	4,68	116,00	119,24	111,00

Eine Lösung der Gleich. (11a) würde dann das totale Vertikalgeschwindigkeitsfeld $\omega(x,p)$ liefern, das sich als Folge von Advektion absoluter Vorticity plus Temperaturadvektion einstellt. Hingegen liefert die Lösung von Gleich. (11b) oder (11c) nur jene Vertikalgeschwindigkeitsverteilungen ω_{I} oder ω_{II} , die sich als Folge der horizontalen Vorticity-Advektion für sich allein oder der Temperatur-Advektion für sich allein einstellen würden.

Eine solche Lösung wird nicht ganz einfach ausfallen, da die D-Amplituden und die δ -Phasen alle Funktionen von p sind. Für eine Lösung setzt man ω in jedem der drei Fälle in folgender periodischer Form an:

$$\omega(p) = \omega_1(p) \cos kx + \omega_2(p) \sin kx \quad (21)$$

Dies führt dann, wie leicht ersichtlich ist, auf zwei Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial p^2} - a^2 \omega_1 = D(p) \cos \delta(p) \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial p^2} - a^2 \omega_2 = D(p) \sin \delta(p) \quad \text{mit } a^2 = \frac{k^2 \sigma}{f_0^2} = \text{konst}$$

Als Grenzbedingungen fordert man ein Verschwinden von ω in 1000 mb = p_0 als Untergrenze und in 250 mb = p_T als Obergrenze (als Tropopausenhöhe zu deuten), d.h.

$$\begin{aligned} \omega_1(p_0) = \omega_1(p_T) &\equiv 0 & \text{mit } p_0 = 1000 \text{ mb, } p_T = 250 \text{ mb.} \\ \omega_2(p_0) = \omega_2(p_T) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Eine Lösung jeder der 3 Gleichungen (11a, b oder c) ist dann von der Form:

$$\omega_1 = \omega_1(0) \cosh ap + \omega'_1(0)/a \sinh ap + \frac{1}{a} \int_{p_T}^p D(\xi) \cos \delta(\xi) \sinh a(p-\xi) d\xi \quad (24)$$

und die Grenzbedingungen liefern:

$$0 = \omega_1(0) \cosh ap_0 + \omega'_1(0)/a \sinh ap_0 + \frac{1}{a} \int_{p_T}^{p_0} D(\xi) \cos \delta(\xi) \sinh a(p_0-\xi) d\xi \quad (24a)$$

$$0 = \omega_1(0) \cosh ap_T + \omega'_1(0)/a \sinh ap_T$$

Dabei sind $\omega_1(0)$ und $\omega'_1(0)/a$ konstante Werte und ξ ist eine Integrationsvariable. Für ω_2 gelten mit $\omega_2(0)$ und $\omega'_2(0)/a$ analoge Lösungsausdrücke nur mit $D(\xi) \sin \delta(\xi)$ in den Integralen.

Der Lösungsgang ist dann der folgende:

- (a) Mit den bekannten Werten D und δ löst man graphisch das Integral in (24a)
- (b) (24a) liefert dann 2 Gleichungen, die gestatten, die Konstanten $\omega_1(0)$ und $\omega'_1(0)/a$ zu bestimmen.

- (c) Mit variabler Obergrenze $\xi=p$ löst man dann wieder auf graphischem Weg das Hauptintegral in (24) entsprechend $\xi = 300$ bis 1000 mb, also 8 mal.
- (d) Eine Addition der ersten beiden Terme für variables p liefert schließlich ω_1 als Funktion von p .
- (e) Eine analoge Prozedur liefert schließlich nach einer Wiederholung aller Schritte ω_2 als Funktion von p .
- (f) Die Zusammenfügung entsprechend (21) liefert schließlich $\omega(x,p)$.

Die zweimalige Wiederholung des gesamten Lösungsgangs mit D_I , δ_I oder D_{II} , δ_{II} als Eingang führt dann auch zur Kenntnis von $\omega_I(x,p)$ oder $\omega_{II}(x,p)$.

Diese gesamte Bestimmungsprozedur ist rechnerisch recht aufwendig, aber ist wie man im englischen Sprachgebrauch zu sagen pflegt "straight forward" (d.h. viel Rechenarbeit, aber von der Mathematik her eindeutig, so daß man immer zum Ziel kommt).

1.1. Eine diagnostische Regel

Bevor die Ergebnisse besprochen werden, gilt es noch einen wichtigen Umstand die ω -Gleichung betreffend hervorzuheben: Wie jede der Gleichungen (11a,b,c) zeigt, ist es immer möglich, die ω -Gleichung in die nachfolgende Form zu bringen:

$$\left(\frac{f_0^2}{\sigma}\right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - k^2 \omega = \frac{f_0^2}{\sigma} (D \cos(kx - \delta))$$

Im Gliede rechts ist der Einfluß der vertikalen Änderung der absoluten Vorticity Advektion (dann D_I , δ_I), des Laplace Operators der Temperatur-Advektion (dann D_{II} , δ_{II}) oder von beiden zusammen (dann D , δ) auf die Vertikalgeschwindigkeit enthalten. Da die

D-Amplituden (siehe Tabelle 4) und der Faktor $\frac{f_0^2}{\sigma}$ stets positiv sind, kann dieses Glied wegen $\cos(kx-\delta)$ wechselndes Vorzeichen je nach der Lage innerhalb der Störungswelle annehmen. Die obige Beziehung hat dann die allgemeine Form:

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - k^2 \omega = F(p) \quad (11d)$$

F ist dabei eine beliebig geartete Funktion von p, die in der Mitte der Troposphäre, dort wo ω als groß erwartet wird, positiv oder negativ sein kann.

Hinsichtlich der Glieder auf der linken Seite gibt die Fig. (15) eine Information. Auf der linken Seite sind übereinander 3 unterschiedliche Vertikalverteilungen von ω mit einem Maximum von 1×10^{-3} mb/sec in 625 mb angenommen. (Oben: Kreis-förmig, Mitte: Parabel-förmig, Unten: Sinus-förmig). Hier ist also ω positiv angenommen, d.h. Absinken. Es könnte aber ebenso negativ sein (Aufsteigen) und die Verteilungen wären dann spiegelbildlich zur vertikalen z-Achse bei $x=0$.

Betrachtet man jetzt die mittlere Bildreihe in Fig. (15), welche die vertikale erste Ableitung hinsichtlich des Drucks ($\frac{\partial \omega}{\partial p}$) zur Darstellung bringt, so zeigt sich, obwohl die 3 Ausgangsverteilungen von ω auf den ersten Blick nicht zu unterschiedlich erscheinen, doch eine sehr starke Veränderlichkeit bei $\frac{\partial \omega}{\partial p}$. Für die kreis-förmige ω -Kurve (oben) beginnt die Ableitungskurve in 250 mb bei + ∞ und nähert sich gekrümmt verkleinernd der Nullstelle bei 625 mb und verläuft in der unteren Hälfte spiegelbildlich negativ und endet in 1000 mb bei - ∞ . Für die parabelförmige ω -Kurve (Mitte) jedoch ist $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ ähnlich geartet aber der Form nach linear vom positiven Wert ($x=2$) in 250 mb

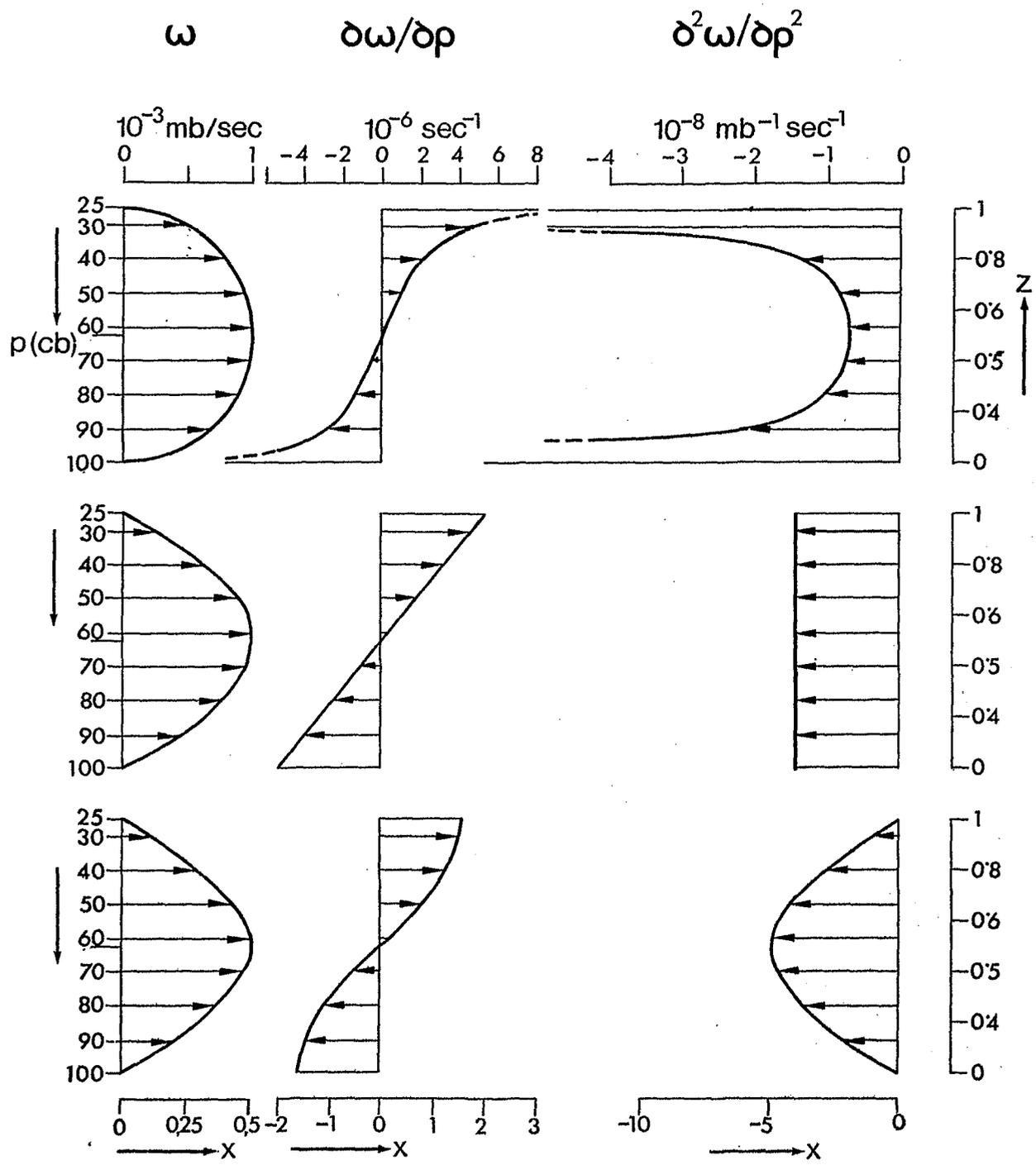


Fig. 15 3 Beispiele für den Zusammenhang zwischen speziellen vertikalen Verteilungen von ω , $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ und $\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$

oben: kreis-förmige ω -Verteilung
 mitte: parabel-förmige ω -Verteilung
 unten: sinus-förmige ω -Verteilung

zum negativen ($x = -2$) in 1000 mb. Schließlich zeigt sich für die Sinus-förmige ω -Kurve (unten) eine wie zu erwarten Cosinus-förmig gekrümmte Ableitungskurve ähnlicher Natur, welche wieder in der oberen Troposphäre positiv und in der unteren negativ ist. Da nach der Kontinuitätsgleichung (5) $\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\text{div}_H \mathbf{v}$ ist, herrscht also bei Absinken in der oberen Troposphäre horizontale Geschwindigkeitskonvergenz und in der unteren Troposphärenhälfte horizontale Divergenz. Bei Aufsteigen ist es entsprechend umgekehrt. Wendet man sich der letzten (rechten) Bildreihe in Fig. (15) zu, so zeigt sich ein noch unterschiedlicheres Verhalten der zweiten Ableitung $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}\right)$. Während diese für die kreisförmige ω -Kurve in 250 und 1000 mb $= \infty$ ist, vergrößert sich ihr stets negativer Betrag zur mittleren Troposphäre hin in gekrümmter Weise und erreicht in 625 mb den Wert $x = -2$. Für die parabel-förmige ω -Kurve ist $\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$ durch die ganze Troposphäre hindurch konstant ($x = -4$), während sich für die sinusförmige ω -Kurve, wie zu erwarten, eine Sinus-Verteilung von $\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$ ergibt, welche in 250 mb und 1000 mb gleich Null und in 625 mb ein Minimum ($x = -4,9$) annimmt.

Trotz dieser Unterschiede besitzen die drei Verteilungen $\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$ doch eine gemeinsame wichtige Eigenschaft. Dies ist der Umstand, daß für die drei positiv gewählten ω -Verteilungen die zweiten Ableitungen hinsichtlich p durch die gesamte Troposphäre hindurch stets negativ sind.

Daraus ergibt sich zwangsläufig, daß:

für $\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$	positiv	stets ω	negativ	sein muß, d.h.
	negativ		positiv	

daß ω und $\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$ gegensätzliches Vorzeichen besitzen, also

$$\omega = - G(p) \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$$

wobei $G(p)$ eine beliebig geartete Funktion des Drucks mit der Dimension $[mb^2]$ ist!

Diese wichtige Aussage gilt auch dann, wenn das Maximum bzw. Minimum in der vertikalen ω -Verteilung nicht in der Troposphärenmitte auftritt, sondern aufwärts bzw. abwärts etwas verschoben ist.

Ausnahmen von dieser Regel betreffen alle jene ω -Verteilungen, bei denen mehr als ein Maximum oder Minimum zwischen den Nullstellen am Boden bzw. in Tropopausenhöhe vorhanden sind. Dann werden die ersten bzw. zweiten vertikalen Ableitungen schwierig verlaufende Kurven mit wechselndem Vorzeichen. Von solchen atypischen Verteilungen wollen wir absehen. Die Regel bleibt aber gültig für ein jetähnliches singuläres Maximum bzw. Minimum in der ω -Verteilung nahe der Troposphärenmitte mit Wendepunkten oberhalb bzw. unterhalb. Dann gilt für die Region des Maximums bzw. Minimums die obige Regel immer noch.

Kehrt man nun zur ω -Gleichung in der Form (11d) auf Seite zurück, so schreibt sie sich mit Hilfe dieser Regel:

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - k^2 \omega \equiv - \left\{ \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{1}{G(p)} + k^2 \right\} \omega = F(p) \quad (11e)$$

Da nun der Klammerausdruck stets eine positive Größe ist, kann man bei Kenntnis des Vorzeichens der Antriebsfunktion $F(p)$ sofort auf das Vorzeichen von ω (nämlich gegensätzliches Vorzeichen) schließen, speziell für die mittlere Troposphäre.

Dieser diagnostischen Hilfe werden wir uns in den folgenden Abschnitten öfters bedienen.

VI.2. Die Ergebnisse der Lösung der ω -Gleichung und ihre synoptische Interpretation

2.1. Das ω_I -Feld als Folge absoluter Vorticity-Advektion

Zuerst soll das Vertikalgeschwindigkeitsfeld ω_I diskutiert werden, das sich einstellen würde, wenn nur der Term I in der ω -Gleichung wirksam wäre, also nur die Vertikale Änderung der horizontalen Advektion der absoluten Vorticity von alleinigem Einfluß wäre. Wie schon aus der Diskussion am Ende des Abschnitts V und aus Fig. (14, unteres Bild) ersichtlich war, ist die horizontale Advektion absoluter Vorticity in den oberen Schichten groß und in den unteren klein. Die vertikale Änderung dieser Advektion an charakteristischen Stellen zeigt die Fig. (16). Man erkennt (linke Seite), daß unterhalb des Höhentrogens und unterhalb des Höhenrückens die Advektion relativer, planetarischer und absoluter Vorticity recht klein sind und sich nur eine geringe Veränderlichkeit mit der Höhe feststellen läßt. Hingegen ist die Veränderlichkeit dieser Advektionen sehr groß in den Regionen oberhalb des Bodentiefs bzw. Bodenhochs (siehe die Bilder rechts), weil die Advektionen unten klein und oben erheblich sind. Auch wird aus diesem Bild erneut deutlich, daß die Advektionen relativer und planetarischer Vorticity gegensätzliches Vorzeichen besitzen und jene der relativen für eine Wellenstörung kürzerer Wellenlänge über jene der planetarischen quantitativ stark dominiert. Damit trägt die Advektion absoluter Vorticity (siehe Bilder ganz rechts) das Vorzeichen der relativen Vorticity Advektion und ihre vertikale Änderung bleibt relativ groß.

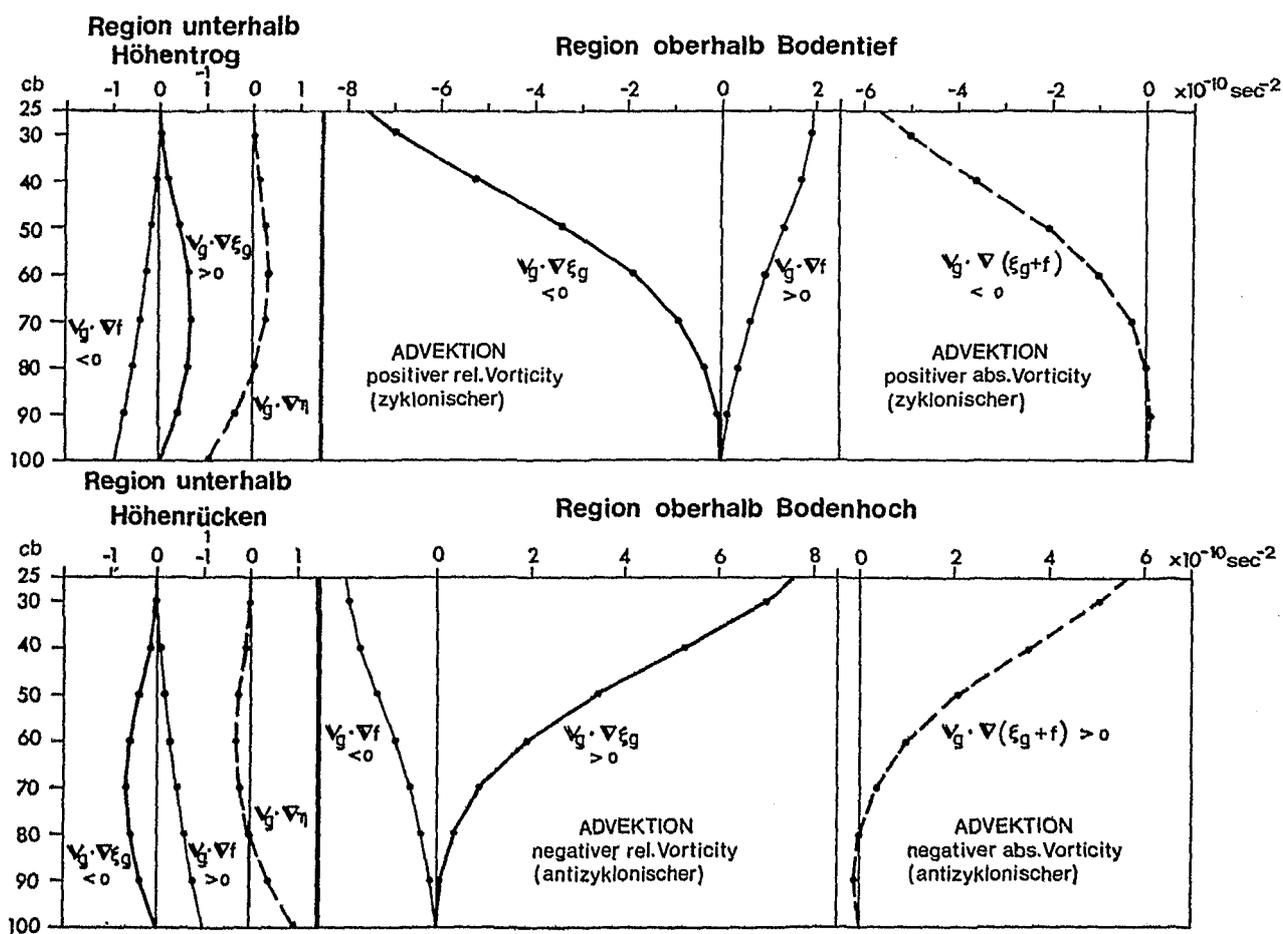


Fig. 16 Vertikale Verteilungen der horizontalen Advektion der relativen, planetarischen und absoluten Vorticity für 4 unterschiedliche Regionen

Oberhalb des Bodentiefs wird daher $\frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{v}_g \cdot \nabla \xi_g + f)$ positiv und entsprechend oberhalb des Bodenhochs negativ und bedient man sich jetzt der Regel nach Gleichung (11e) so folgt ein stark negatives ω (Aufsteigen) oberhalb des Bodentiefs und entsprechend ein stark positives ω (Absinken) oberhalb des Bodenhochs. Diese Verteilung der Vertikalbewegung hervorgerufen durch die vertikale Änderung der absoluten Vorticity-Advektion wird auch eindeutig durch die vollständige Lösung der Gleichung (11b) bestätigt (siehe Fig. 17, oberes Bild). Auf halbem Weg zwischen Höhentrog und Höhenrücken östlich des Troges und exakt oberhalb des Bodentiefs steigt die Luft, wie man auf diesem Bild erkennt, mit einer maximalen Vertikalgeschwindigkeit von $\omega = - 0,463 \cdot 10^{-3}$ mb/sec (etwa $0,674$ cm/sec)⁺ in 500 mb auf und sinkt entsprechend mit dem gleichen maximalen Betrag in 500 mb zwischen Höhenrücken und Höhentrog östlich des Rückens und exakt oberhalb des Bodenhochs nieder. Dies alles würde allein als Folge der absoluten Vorticity-Advektion und ihrer vertikalen Änderung geschehen.

Oberhalb des Bodentiefs erzwingt die Advektion positiver absoluter Vorticity ($\mathbf{v}_g \cdot \nabla \xi_g + f < 0$) entsprechend der Vorticity-Gleichung (siehe Gleich. 9a) eine positive lokalzeitliche Vorticity-Änderung $\left(\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0\right)$, was entsprechend $\frac{\partial \xi_g}{\partial t} \equiv \left(\frac{1}{f_0}\right) \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv - \left(\frac{k^2}{f_0}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$ einen lokalzeitlichen Fall des Geopotentials bewirkt. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit einer Dicke-Abnahme in dieser Region, d.h. Abkühlung. Da diese Abkühlung, wie wir noch gleich sehen werden, nicht durch horizontale Temperaturadvektion erzeugt werden kann (sie ist in dieser Region klein), so muß entsprechend

⁺ Auf den recht klein erscheinenden Betrag wird in Abschnitt (VI.2.4.) noch gesondert und erklärend eingegangen.

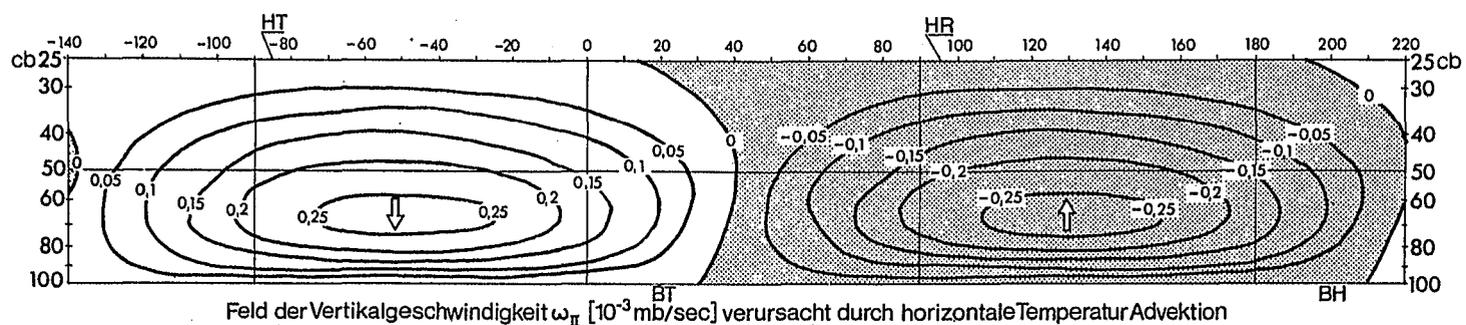
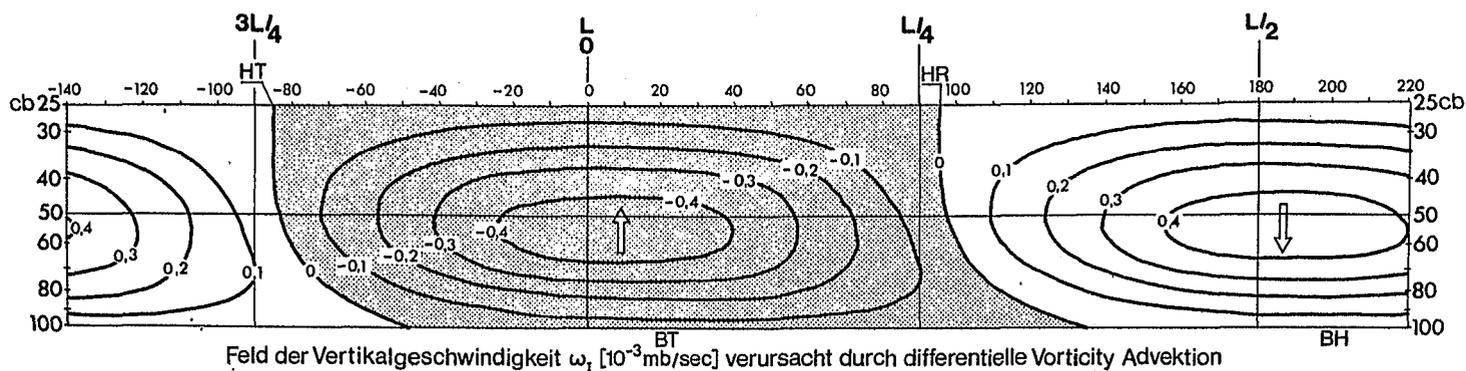


Fig. 17 Die Felder der Vertikalgeschwindigkeiten ω_I und ω_{II}

ω_I : erzeugt durch vertikale Änderung der horizontalen Advektion absoluter Vorticity

ω_{II} : erzeugt durch horizontale Temperatur-Advektion

(Erklärungen wie unter Fig. 11)

Gleich. (8) ein adiabatisches Aufsteigen der Luft, oberhalb des Bodentiefs die dortige Atmosphäre abkühlen, so wie es durch die Dicke-Tendenz gefordert wird. In der Gegenwart horizontaler absoluter Vorticity-Advektion erhält somit die Vertikalbewegung ein hydrostatisch balanciertes Temperaturfeld aufrecht, bei welchem Temperatur und geopotentielle Schichtdicke einander proportional sind.

2.2. Das ω_{II} -Feld als Folge von Temperatur-Advektion

Nun soll zweitens jenes Vertikalgeschwindigkeitsfeld ω_{II} diskutiert werden, das sich einstellen würde, wenn nur das Glied II in der ω -Gleichung wirksam wäre; also der Laplace-Operator angewandt auf die horizontale Temperatur-Advektion. Betrachtet man dieses Antriebsglied in Gleich. (11) oder auch (11c), so erkennt man leicht, daß es mit dem Faktor $-k^2 \left(\frac{p}{f^2} R \right)$ direkt der horizontalen Temperaturadvektion (siehe Abschnitt V, Formel (7)) proportional ist. Die Fig. (18) gibt eine Information über diese Advektion an speziellen Stellen und ihre vertikale Variation. Man ersieht sofort aus dieser Figur (18), daß die horizontale bzw. die meridionale Komponente dieser Advektion $\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} \text{ bzw. } v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right)$ sich für die Regionen oberhalb des Bodentiefs bzw. des Bodenhochs (rechte Bildseiten) dem Vorzeichen nach weitgehend kompensieren und daher ihre Summe $w_g \cdot \nabla T$ an diesen Stellen einen mäßigen Betrag um $\pm 1 \times 10^{-5}$ grad/sec besitzt, der obendrein entlang der Vertikalen ein mehrfach wechselndes Vorzeichen aufweist. Schon vorstehend ist auf den schwachen Einfluß der horizontalen Temperatur-Advektion oberhalb des Bodentiefs bzw. -hochs Bezug genommen worden. Betrachtet man nun die entsprechen-

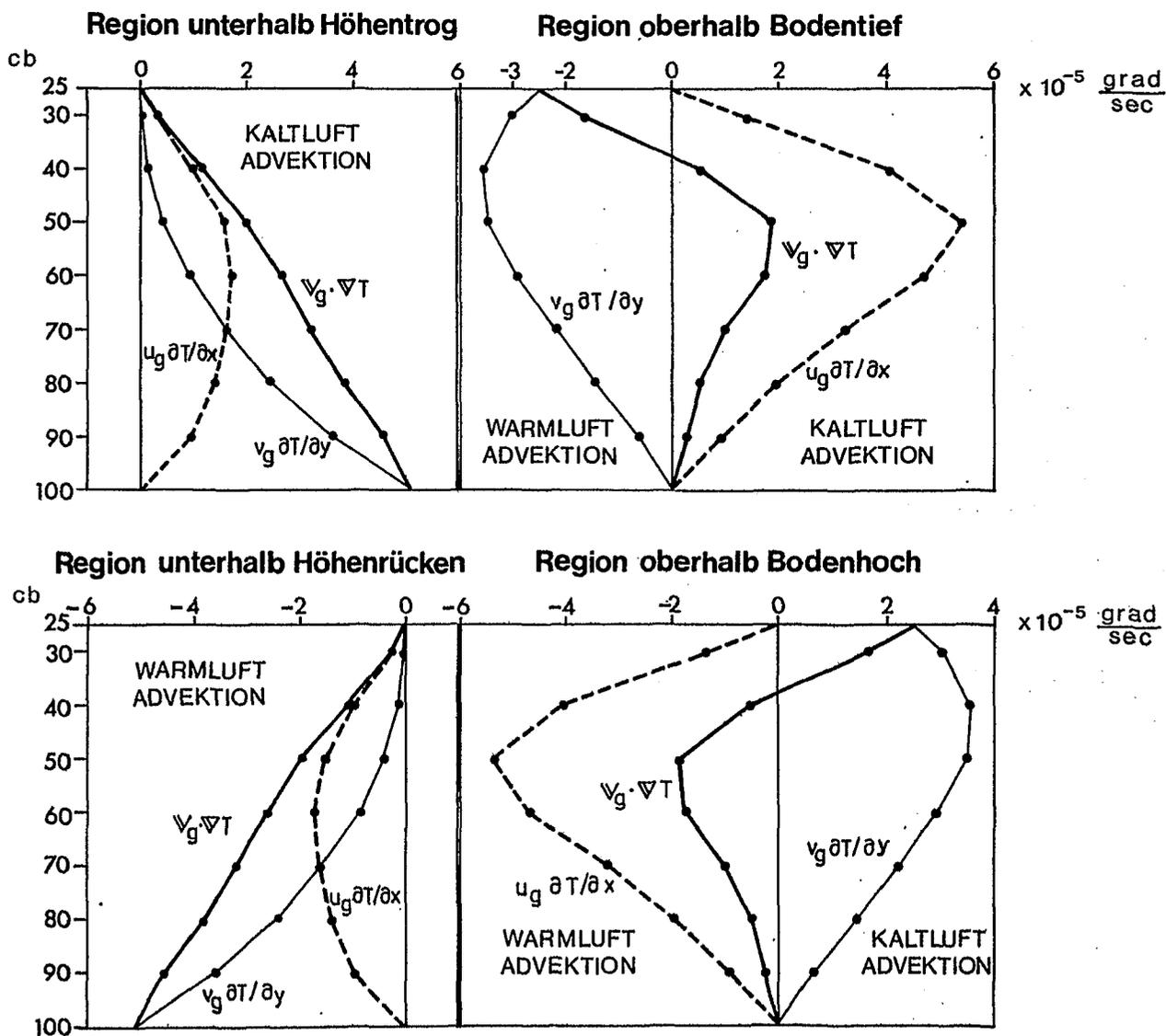


Fig. 18 Vertikale Verteilungen der horizontalen Temperaturadvektion für 4 unterschiedliche Regionen

den Verteilungen für die Region direkt unterhalb des Höhentrogens bzw. des Höhenrückens, so zeigt die Fig. (18), linke Seiten, daß sich dort die Komponenten gegenseitig unterstützen und ihre Summe, nämlich die totale Temperatur-Advektion $\Psi_g \cdot \nabla T$ groß wird, wobei sie vom maximalen Betrag von ca. $\pm 5 \times 10^{-5}$ grad/sec fast linear mit der Höhe ab- bzw. zunimmt. Dabei ist sie positiv (Kaltluftadvektion) unterhalb des Höhentrogens und negativ (Warmluftadvektion) unterhalb des Höhenrückens. Wegen des oben erwähnten Faktors wird daher das Antriebsglied II in der ω -Gleichung (Gleich. (11c)) unterhalb des Höhentrogens negativ und positiv unterhalb des Höhenrückens. Wendet man nun wieder die oben dargelegte Regel an, so folgt für die Region unterhalb des Höhentrogens $\omega_{II} > 0$, also Absinken, und unterhalb des Höhenrückens $\omega_{II} < 0$, also Aufsteigen.

Dieser diagnostische Befund wird wieder durch die Durchrechnung der ω -Gleichung für ω_{II} (siehe Gleich. 11c) eindeutig bestätigt. Das Ergebnis zeigt die Fig. (17), unteres Bild. Im Vergleich mit dem vorstehend diskutierten Ergebnis ergibt sich jetzt ein recht unterschiedliches ω -Feld, welches in Übereinstimmung mit dem diagnostischen Befund das Hauptabsinken etwa unterhalb des Höhentrogens (maximal $0,26 \cdot 10^{-3}$ mb/sec (ca. $0,35$ cm/sec) zwischen 600 und 700 mb) und das Hauptaufsteigen etwa unterhalb des Höhenrückens innehat. Oberhalb des Bodentiefes bzw. Bodenhochs bleibt die Vertikalbewegung hingegen klein.

Physikalisch gesehen ist dieser Vertikalbewegungsanteil jener, der benötigt wird das Vorticity-Feld in der oberen Troposphäre gegen die Wirkung von geopotentiellen Höhenänderungen, die durch

thermische Advektion verursacht sind, geostrophisch aufrecht zu erhalten. Denn Kaltluft-Advektion unterhalb des Höhentrog und Warmluft-Advektion unterhalb des Höhenrückens verursachen eine Verringerung der geopotentiellen Schichtdicke bzw. eine Erweiterung derselben. Daher steigt die geopotentielle Höhe im Rücken und fällt lokalzeitlich betrachtet im Trog, was wiederum eine Zunahme der antizyklonalen Vorticity im Rücken und eine Zunahme zyklonischer Vorticity im Trog verursacht. Nach der Vorticity-Gleichung (9b) jedoch verlangt dies horizontale Divergenz im Rücken und Konvergenz im Trog, da die Vorticity-Advektion an diesen Stellen wie in der Fig. (14) früher gezeigt wurde, klein ist. Massenkonservierung verlangt dann Aufsteigen unterhalb des Höhenrückens und Absinken unterhalb des Höhentrog und das ist es, was die Rechnung auch als Ergebnis liefert. Dieses diagnostische Ergebnis kann nun nochmals wie folgt zusammengefaßt werden.

Als Folge der Advektion absoluter Vorticity ergibt sich:

Region oberhalb des Bodentiefs =====	Region oberhalb des Bodenhochs: =====
Advektion positiver (zyklonischer) absoluter Vorticity $\mathbf{v}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) < 0$	Advektion negativer (antizyklonischer) absoluter Vorticity $\mathbf{v}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) > 0$
Vertikale Änderung derselben positiv $\frac{\partial}{\partial p} \mathbf{v}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) > 0$	Vertikale Änderung derselben negativ $\frac{\partial}{\partial p} \mathbf{v}_g \cdot \nabla (\xi_g + f) < 0$
horizontale Temperaturadvektion ~ 0 oder recht klein	horizontale Temperaturadvektion ~ 0 oder recht klein
lokalzeitliche Vorticity-Änderung positiv $\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0 \text{ (siehe Gleich. 9a)}$	lokalzeitliche Vorticity-Änderung negativ $\frac{\partial \xi_g}{\partial t} < 0 \text{ (siehe Gleich. 9a)}$
lokalzeitlicher Fall der geopotentiellen Höhe $\frac{\partial \phi}{\partial t} < 0 \quad \left(\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = - \frac{k^2}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$	lokalzeitlicher Anstieg der geopotentiellen Höhe $\frac{\partial \phi}{\partial t} > 0$
was Abnahme der geopot. Dicke bedeutet, also Abkühlung	was Zunahme der geopot. Dicke bedeutet, also Erwärmung
adiabatisches Aufsteigen der Luft erforderlich um Abkühlung zu erklären $\omega_I < 0 \text{ (} w > 0 \text{)}$ siehe Gl. (8) oder Lösung der ω -Gleichung (11b)	adiabatisches Absinken der Luft erforderlich um Erwärmung zu erklären. $\omega_I > 0 \text{ (} w < 0 \text{)}$ siehe Gl. (8) oder Lösung der ω -Gleichung (11b)

Und als Folge der Temperatur Advektion folgt:

Region unterhalb des Höhentrog =====	Region unterhalb des Höhenrückens =====
Kaltluftadvektion $\mathbf{v}_g \cdot \nabla T > 0$	Warmluftadvektion $\mathbf{v}_g \cdot \nabla T < 0$
Laplace der Temperaturadvektion negativ $\nabla^2 (\mathbf{v}_g \cdot \nabla T) < 0$	Laplace der Temperaturadvektion positiv $\nabla^2 (\mathbf{v}_g \cdot \nabla T) > 0$
Abnahme der geopotentiellen Schichtdicke (siehe Gl. 8)	Zunahme der geopotentiellen Schichtdicke (siehe Gl. 8)
Lokalzeitliche Abnahme des Geopotentials in oberen Niveaus $\frac{\partial \phi}{\partial t} < 0$	Lokalzeitlicher Anstieg des Geopotentials in oberen Niveaus $\frac{\partial \phi}{\partial t} > 0$
Lokalzeitliche Erzeugung von mehr zyklonaler absoluter Vorticity $\frac{\partial \xi_g}{\partial t} > 0$	Lokalzeitliche Erzeugung von mehr antizyklonaler absoluter Vorticity $\frac{\partial \xi_g}{\partial t} < 0$
Geringe horizontale abs. Vorticity-Advektion	Geringe horizontale abs. Vorticity-Advektion
horizontale Konvergenz in oberen Niveaus $\frac{\partial \omega}{\partial p} < 0$ (nach Gl. 9a)	horizontale Divergenz in oberen Niveaus $\frac{\partial \omega}{\partial p} > 0$ (nach Gl. 9a)
adiabatisches Absinken der Luft, um die obere Konvergenz auszugleichen und das obere Vorticity-Feld geostrophisch zu erhalten $\omega_{II} > 0$ ($w < 0$) siehe Gl. (9a) oder Lösung der ω -Gleichung (11c)	adiabatisches Aufsteigen der Luft erforderlich, um die obere Divergenz zu ersetzen und das obere Vorticity-Feld geostrophisch zu erhalten $\omega_{II} < 0$ ($w > 0$) siehe Gl. (9a) oder Lösung der ω -Gleichung (11c)

2.3. Das totale ω -Feld als Folge beider Antriebseffekte
(absolute Vorticity Advektion und horizontale
Temperatur Advektion)

Nach der Lösung der ω -Gleichung separat für jedes der beiden
Antriebsglieder und nach der eingehenden Diskussion der
Ergebnisse und der diagnostischen Folgerungen in den vorher-
gehenden Abschnitten 2.1. und 2.2., soll nun die Gesamt-
lösung vorgelegt werden, d.h. also jenes ω -Feld, das sich
als Folge der Summe beider Effekte einstellt.

Die für diesen Zweck zu lösende Differentialgleichung ist
die Gleichung (11a) mit dem Antriebsglied $D \cos (kx-\delta)$,
wobei D und δ als Funktionen von p in Tabelle 4 (erste Spalten)
aufgeführt sind. Die Gleichung (11a) ist mit derselben
Methodik, die in Abschnitt VI.1. erläutert wurde, lösbar.
Vor der Präsentation des Ergebnisses soll aber der physika-
lische Inhalt des Antriebsgliedes noch etwas näher analytisch
untersucht werden. Die Gleichung (11a) lautet:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \left(\frac{k^2 \sigma}{f_0^2} \right) \omega = D \cos (kx-\delta) = \left(\frac{4c k^3}{f_0^2 p_0} \right) A \cos (kx-\alpha) - \left(\beta \frac{k}{f_0^2} \right) C \cos (kx-\gamma)$$

oder in der ursprünglichen Form (16):

$$\left(W^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = \sum = \frac{k}{\sigma} \left(\frac{4c k^2}{p_0} \right) A \cos (kx-\alpha) - \beta \frac{k}{\sigma} C \cos (kx-\gamma),$$

was man wegen $W^2 \omega = -k^2 \omega$ sofort von der einen in die andere
Form überführen kann (durch Multiplikation von (11a) mit
 f_0^2/σ ergibt sich (16)).

Damit besteht zwischen \sum und $D \cos (kx-\delta)$ die nachfolgende
Beziehung, (siehe Gl. 11):

$$\Sigma = \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ w_g \cdot \nabla \xi_g + f \right\} + \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left\{ w_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right\} = \frac{f_0^2}{\sigma} D \cos(kx - \delta) \quad (25)$$

Was nun die beiden Antriebsglieder angeht, so kann man ihnen leicht eine der beiden nachfolgenden Formen geben, um ihre Wirksamkeit und ihren Sinn noch besser verständlich zu machen:

Das Antriebsglied durch die vertikale Änderung der absoluten Vorticity Advektion ergibt sich in zwei Teilen mit Verwendung von $u_g = 2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) c$; $\frac{\partial u_g}{\partial p} = -\frac{2c}{p_0} = \text{konst}$ und $\frac{\partial^2 v_g}{\partial p^2} = -k^2 v_g = F(x)$ zu:

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} (w_g \cdot \nabla \xi_g) &= \left(\frac{f_0 k^2}{\sigma} \right) \left\{ \left(\frac{2c}{p_0} \right) v_g - \left[2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) c \right] \frac{\partial v_g}{\partial p} \right\} \\ \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} (w_g \cdot \nabla f) &= \left(\frac{f_0 k^2}{\sigma} \right) \left\{ \frac{\beta}{k^2} \frac{\partial v_g}{\partial p} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Für das andere Antriebsglied durch horizontale Temperaturadvektion erhält man mit $v_g = F(x) \neq F(y)$; $\nabla^2 v_g = -k^2 v_g$:

$$\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left\{ w_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right\} = \left(\frac{f_0 k^2}{\sigma} \right) \left\{ \left(\frac{2c}{p_0} \right) v_g + \left[2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) c \right] \frac{\partial v_g}{\partial p} \right\} \quad (27)$$

Addiert man jetzt die Ausdrücke (26) und (27), so erhält man für den gesamten Antrieb in Gleich. (25) oder (11a):

$$\Sigma = \left(\frac{f_0 k^2}{\sigma} \right) \left\{ \left(\frac{4c}{p_0} \right) v_g + \frac{\beta}{k^2} \frac{\partial v_g}{\partial p} \right\} \quad (28)$$

wobei sich das Glied $\left[2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) c \right] \left(\frac{\partial v_g}{\partial p} \right)$ wegen wechselndem Vorzeichen in (26) und (27) herauskürzt.

Als Kontrolle liefert das Einsetzen von $v_g = \left(\frac{kA}{f_0} \right) \cos(kx - \alpha)$ entsprechend (5) mit dem daraus bestimmbaren $\frac{\partial v_g}{\partial p}$ in die

Gleich. (28) wieder die gesamte rechte Seite von (16).

Die Ausdrücke (26), (27) und (28) zeigen nunmehr deutlich von welchen Größen diese Antriebsglieder für die Vertikalgeschwindigkeiten ω_I , ω_{II} und ω entscheidend abhängig sind, nämlich:

- (1) vom Meridionalwind v_g
- (2) von der vertikalen Änderung von v_g , also $\frac{\partial v_g}{\partial p}$
- (3) von der Stärke des Grundstromes $u_g = 2\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) c$.
also von der Wahl des Parameters c
- und (4) von der vertikalen Stabilität $\sigma = -\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) \frac{\partial \theta}{\partial p}$.

Den 3 Antriebsgliedern (26), (27) und (28) kann man noch eine weitere interessante Form geben, wenn man die thermische Windgleichung berücksichtigt.

$$\text{Da } u_g = -\left(\frac{1}{f_0}\right) \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) c$$

$$v_g = +\left(\frac{1}{f_0}\right) \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

liefert die Ableitung nach p mit Berücksichtigung der statischen Grundgleichung (3):

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = + \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \left(\frac{R}{p}\right) \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{2c}{p_0} = \text{konst}$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial p} = - \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\left(\frac{R}{p}\right) \frac{\partial T}{\partial x}$$

Setzt man diese thermischen Windbeziehungen in die Ausdrücke (26), (27) und (28), so erhalten diese nacheinander die Formen:

$\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} (w_g \cdot \nabla \xi_g) = - \left(\frac{Rk^2}{\sigma p}\right) \left\{ -u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right\}$ $\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} (w_g \cdot \nabla f) = - \left(\frac{Rk^2}{\sigma p}\right) \frac{\beta}{k^2} \frac{\partial T}{\partial x}$	(26a)
---	-------

$$\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left\{ \mathbf{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right\} = - \left(\frac{Rk^2}{\sigma p} \right) \left\{ + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right\} \quad (27a)$$

$$\zeta = - \left(\frac{Rk^2}{\sigma p} \right) \left\{ \left(2 \frac{\partial T}{\partial y} \right) v_g + \frac{\beta}{k^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \quad (28a)$$

Diese 3 Ausdrücke zeigen wiederum, daß der Antrieb für die Vertikalbewegung von der Intensität von u_g und v_g und der Intensität des zonalen sowie des meridionalen Gefälles des Temperaturfeldes in der x- bzw. y-Richtung $\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right)$ maßgeblich abhängt.

Die Lösung der Gleich. (11a) nach der früher dargelegten Methode zeigt nun die Fig. (19) (oberes Bild). Das auf dieser Figur dargestellte Feld der totalen Vertikalgeschwindigkeit ω ist nun ganz im Zusammenhang mit jenen Vertikalbewegungen ω_I und ω_{II} zu interpretieren, die früher als Folge von jeweils nur einem Antrieb für sich bestimmt wurden (siehe Fig. 17). Wie man der Fig. 19 entnimmt, steigt die Luft jetzt mit maximaler Intensität etwa 20° östlich der Lage des Bodentiefs (nahe 40°) auf und sinkt entsprechend etwa 20° östlich der Lage des Bodenhochs mit maximaler Stärke nieder (bei etwa 220°). Die Phase dieses ω -Feldes ist also nahezu jene des Feldes ω_I , welches nur durch die vertikale Änderung der horizontalen Advektion von absoluter Vorticity für sich verursacht ist. Auch dem Betrage nach ist ω nur wenig kleiner als ω_I (maximal $-0,39$ verglichen mit $-0,46 \cdot 10^{-3}$ mb/sec). Hingegen ist dieses ω -Feld um ein Viertel der Wellenlänge L d.h. 90° mit dem Feld ω_{II} , welches durch die horizontale Temperaturadvektion für sich erzeugt ist, außer Phase. Auch ist der maximale Betrag von ω_{II} mit $-0,26$ wesentlich kleiner

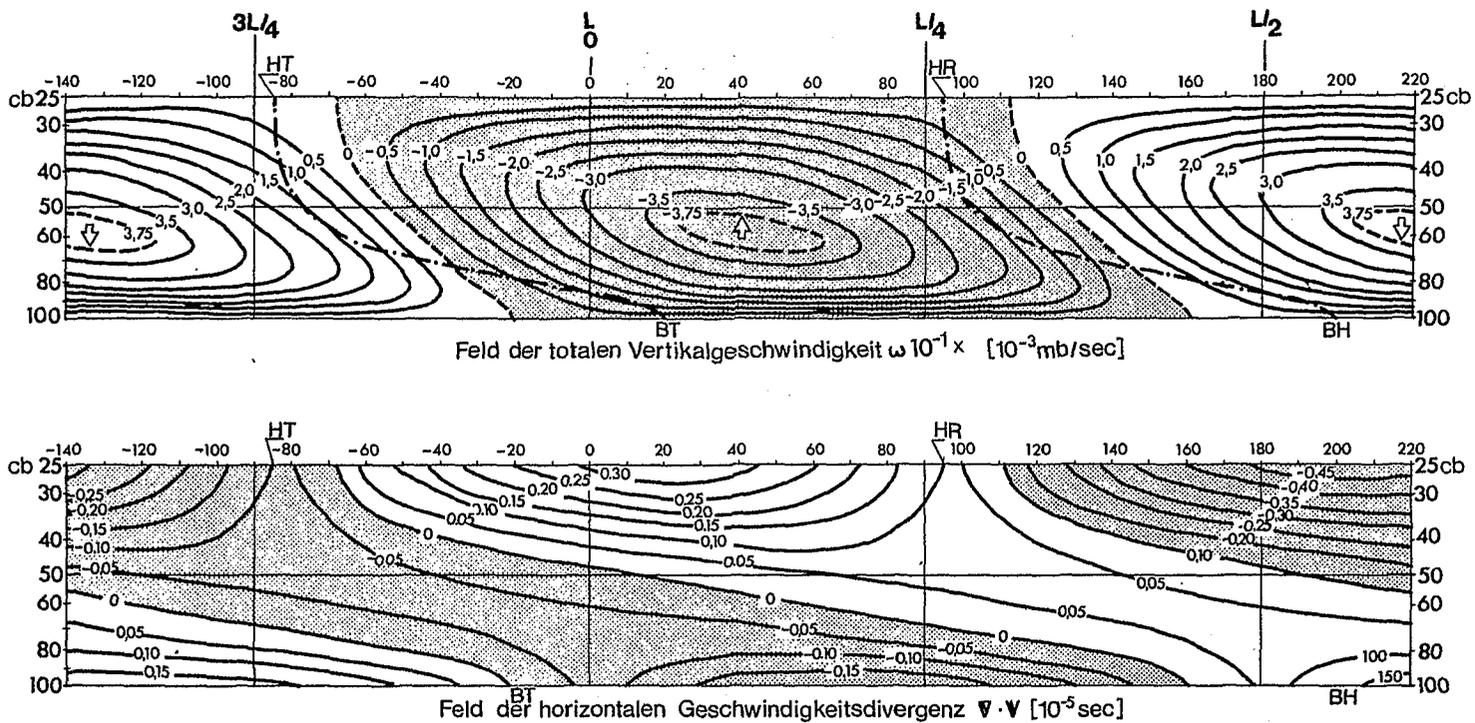


Fig. 19 Felder der totalen Vertikalgeschwindigkeit und der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz

(Erklärungen wie unter Fig. 11)

als jener für ω ($-0,39 \cdot 10^{-3}$ mb/sec).

Dies ist nun ein Hinweis dafür, daß in der ersten Entwicklungsphase einer baroklinen Welle die horizontale Vorticity Advektion, speziell ihre vertikale Änderung der überwiegend wirksame Antriebsmotor für die Einleitung der Vertikalbewegung ist und damit für die Intensivierung der Störung entscheidenden Einfluß nimmt. Die horizontale Temperaturadvektion wirkt mit, ist aber in diesem Stadium noch in quantitativer Hinsicht dem anderen Einfluß unterlegen.

Dies drückt sich auch im Ergebnis für ω dadurch aus, daß der stärkeren Hebung direkt über dem Zentrum des Bodentiefs bei 20° für ω_I (siehe Fig. 17) eine schwächere Anhebung der Luft unterhalb des Höhenrückens weit stromabwärts bei etwa 130° gegenübersteht, so daß das maximale Aufsteigen im ω -Feld wegen der Dominanz des stärkeren Antriebs für ω_I sich nicht genau zwischen 20° und 130° einstellt, sondern asymmetrisch bei 40° , wie schon vorstehend erwähnt wurde (etwa halbwegs zwischen den geneigten Trog- bzw. Rückenachsen und zwischen 500 bzw. 600 mb).

Man darf vermuten, daß sich in den weiteren Entwicklungsphasen der Störung (Idealstadium, Wirbelstadium) bei Aufrichtung der Achse zu fast vertikalem Verlauf die vertikale Änderung der Vorticity Advektion in ihrem Einfluß auf die Vertikalbewegung zurücktritt und die horizontale Temperaturadvektion zum bestimmenden Effekt wird. Dafür gibt es gute logische Gründe und rechnerische Belege, siehe z.B. KRISHNAMURTI, NOGUES and BAUMHEFNER [13] (1966).

Überhaupt kommt der horizontalen Temperaturadvektion durch Anhebung im Wellenrücken und Absinken im Wellentrog große Bedeutung für die Amplitudenvergrößerung (Instabilität) mit wachsender Zeit zu.

Das untere Bild der Fig. (19) zeigt nun die über die Kontinuitätsgleichung (3) auf dem Weg $\omega \rightarrow -\frac{\partial \omega}{\partial p} = \mathbf{V}_H \cdot \nabla_H$ berechnete Feldverteilung der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz. In charakteristischer Weise ergibt sich halbwegs zwischen Höhentrog und dem ihm ostwärts vorausseilenden Höhenrücken eine horizontale Divergenz und darunter in den unteren Schichten im Bodentiefbereich und etwas östlich davon horizontale Konvergenz. Dagegen ist die Region zwischen oberem Wellenrücken bis zum ostwärts vorausseilenden Trog durch horizontale Konvergenz mit darunter sich befindlicher Divergenz in der Höhe und etwas östlich des Bodenhochs ausgezeichnet. In der Troposphärenmitte ist die horizontale Divergenz sehr klein. Die maximale obere Divergenz bzw. Konvergenz beträgt $\pm 0,33 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$, während die untere Konvergenz bzw. Divergenz nur maximale Beträge von $\mp 0,2 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ erreicht.

Auf die relativ klein erscheinenden Werte von ω bzw. $\mathbf{V}_H \cdot \nabla_H$ komme ich noch später im Detail zu sprechen (siehe Abschnitt 2.4.).

Abschließend sollen in diesem Abschnitt noch anhand der Fig. (20) die Verhältnisse in der Vertikalen bei 40° , wo maximales Aufsteigen der Luft festgestellt wurde, näher untersucht werden. In der oberen Reihe, linkes Bild ist die ω -Verteilung zusammen mit jener von $\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$ an dieser Stelle dargestellt und hier zeigt sich, das entsprechend den früheren Aussagen die

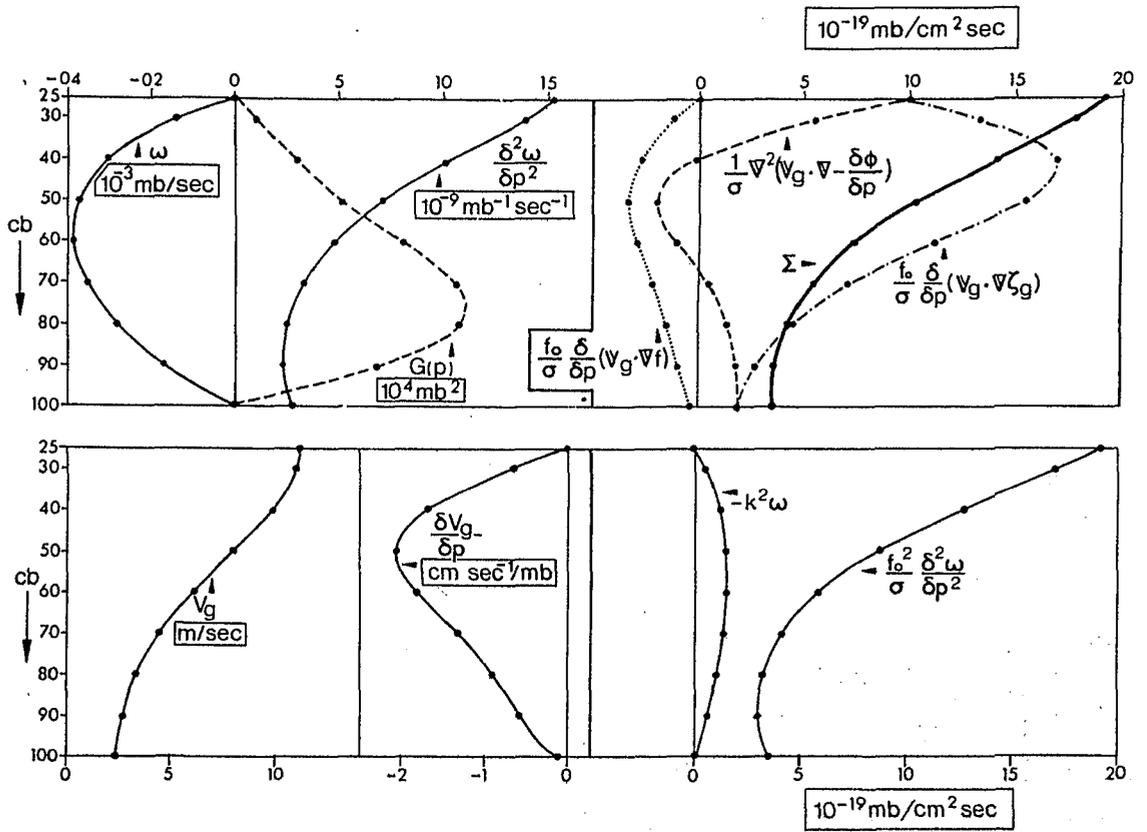


Fig. 20 Die Verhältnisse in der Region mit maximalem Aufsteigen bei 40° östlich des Bodentiefs

beiden Kurven unterschiedliches Vorzeichen besitzen und daß es immer eine sie verbindende Funktion $G(p) > 0$ (siehe gestrichelte Kurve) geben muß mit der Dimension $[\text{mb}^2]$, die der Gleichung $\omega = - G(p) \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$, siehe (11e), genügt.

Im Bildausschnitt oben rechts sind nun die einzelnen Verteilungen der für diese ω -Verteilung maßgeblichen Antriebsglieder $\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} (w_g \cdot \nabla \xi_g)$, $\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} (w_g \cdot \nabla f)$ und $\frac{1}{\sigma} \nabla^2 (w_g \cdot \nabla - \frac{\partial \phi}{\partial p})$, sowie ihre Zusammenfassung zu einer einzigen Antriebsverteilung (\sum) dargestellt. Die wichtigste von ihnen ist zweifellos die vertikale Änderung der relativen Vorticity-Advektion (strich-punktierte Linie). Sie nimmt mit wachsender Höhe beträchtlich zu, erreicht in 400 mb maximalen Wert und nimmt aufwärts bis 250 mb wieder etwas ab. Der Antrieb durch die vertikale Änderung der planetarischen Vorticity-Advektion ist wesentlich kleiner und vor allem von gegensätzlichem Vorzeichen (siehe punktierte Linie). Würde man diese beiden Antriebsfunktionen addieren (vertikale Änderung der absoluten Vorticity Advektion), so wäre das Ergebnis immer noch positiv und mit zunehmender Höhe (mit abnehmendem Druck) stark ansteigend. Was den zweiten Antrieb betrifft, so ist der Effekt der horizontalen Temperatur-Advektion dem Betrage nach wesentlich kleiner, er ist oben und unten positiv und in der mittleren Troposphäre negativ (siehe gestrichelte Kurve).

Addiert man alle 3 Verteilungen so ergibt sich als totale Antriebsfunktion die dick ausgezogene Kurve, die unten einen Wert von ca. 4×10^{-19} und oben einen solchen von etwa 19×10^{-19} $\text{mb/cm}^2 \text{ sec}$ besitzt, also eine beträchtliche Zunahme mit

wachsender Höhe aufweist.

Nach der ω -Gleichung (11) (siehe Abschnitt VI.1₂) muß dieser Antrieb durch die Summe der Glieder $-k^2\omega$ und $\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$ kompensiert werden. Diese Kompensation geschieht wie man der Fig. 2o (Bild unten rechts) entnimmt, im überwiegenden Maß durch das zweite Glied, während $-k^2\omega$ nur einen untergeordneten Beitrag liefert.

Da die Antriebsterme in der Form (26), (27) und (28) die spezielle Wichtigkeit von v_g und $\frac{\partial v_g}{\partial p}$ erkennen ließen (neben der Grundstrom Geschwindigkeit $u_g = 2(1 - \frac{p}{p_0})c$ und neben σ) sind zur Orientierung in Fig. (2o) (Bild unten links) noch Verteilungen der meridionalen Geschwindigkeit v_g und ihrer vertikalen Veränderlichkeit aufgenommen, die beide an dieser Stelle mit großen Werten eingehen.

Alles, was die Fig. 2o enthält, bezieht sich auf die Vertikale bei 40° etwas östlich des Bodentiefs dort, wo die Vertikalbewegung mit maximalem Betrag aufwärts gerichtet ist. Alle Kurven zur vertikalen Null-Linie gespiegelt, würden sich auf die Region bei etwa 220° beziehen, wo die Luft mit maximalem Betrag etwas östlich des Bodenhochs niedersinkt.

2.4. Die Größe der Vertikalgeschwindigkeit und der horizontalen Divergenz

Es mag bisher etwas irritiert haben, daß die Absolutbeträge von ω und $\nabla_H \cdot \mathbf{w}_H$ relativ klein waren. Es ist auch bereits aufgezeigt worden, von welchen Umständen diese Größe abhängig ist. Dies sind (1) die Geschwindigkeit des Grundstroms u_g (besonders in der Höhe) und seine vertikale Veränderlichkeit,

(2) die Stabilität der Atmosphäre repräsentiert durch $\sigma = -\frac{\theta}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial p}$, (3) die meridionale Geschwindigkeit v_g und ihre vertikale Veränderlichkeit $\frac{\partial v_g}{\partial p}$, oder was das gleiche ist, die Wahl der Größe der Amplitude A der Störungswelle ($v_g = \frac{kA}{f_0} \cos(kx - \alpha)$).

Man muß sich grundsätzlich darüber klar sein, daß sich bei Änderung dieser Parameter keine Veränderung in der Phase aller Felder einstellt, so daß alle Aussagen darüber völlig richtig bleiben und sich lediglich der absolute Betrag in den verschiedenen bisher präsentierten Feldern ändert.

Nicht verwunderlich ist, daß bei der bisher gewählten Größe des Grundstroms (10 m/sec in 500 mb, 15 m/sec \approx 30 Knoten in 250 mb) und der relativ schwachen Bodenamplitude der Druckwelle von 40 gpm (80 gpm in 250 mb) sich nur eine schwache maximale Vertikalbewegung von $0,39 \times 10^{-3}$ mb/sec (nur etwa 0,6 cm/sec) einstellt.

Um nun das Modell zu testen mit Hinblick auf eine Variation solcher Parameter wurden trotz des hohen Rechenaufwands zusätzlich zum bisher behandelten Fall I noch 5 weitere Fälle bis zum Endresultat für ω durchgerechnet, wobei jeweils eine variable andere Wahl der obigen Eingangsparameter getroffen wurde (siehe Tabelle 5, Römische Zahlen am linken Rand).

Diese Tabelle zeigt an der oberen Kopfleiste:

- (1) den Parameter $c = u_g$ in 500 mb in m/sec
und die zonale Grundgeschwindigkeit u_g in 250 mb in m/sec
- (2) den Stabilitätsparameter σ in Einheiten $\text{cm}^3 \text{gr}^{-1}/\text{mb}$
oder den ihm äquivalenten vertikalen Temperaturgradienten
in $^{\circ}\text{C}/100 \text{ m}$

Tabelle 5

	c	$u_g(250 \text{ mb})$ $= \frac{p}{p_0} c$	$\sigma = \frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$	$\sim - \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ $^{\circ}\text{C}/100 \text{ mb}$	$A_0(\text{Boden})$ $v_g(\text{max})$	$A(250 \text{ mb})$ $v_g(\text{max})$	$ \omega _{\text{Max}}$	$ W _{\text{MAX}}$
	m/sec	m/sec	$\frac{\text{cm}^3/\text{gr}}{\text{mb}}$	(700 mb)	$\frac{\text{gpm}}{\text{m/sec}}$	$\frac{\text{gpm}}{\text{m/sec}}$	10^{-3} mb/sec	cm/sec
I	10	15	10^{-1}	$\sim - 0,75$	$\frac{40}{6,85}$	$\frac{80}{13,71}$	0,39	$\sim 0,57$
II	26,67	40	10^{-1}	$\sim - 0,75$	$\frac{40}{6,85}$	$\frac{80}{13,71}$	1,27	$\sim 1,85$
III	26,67	40	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$\sim - 0,45$	$\frac{40}{6,85}$	$\frac{80}{13,71}$	~ 0	~ 0
IV	26,67	40	$0,5 \cdot 10^{-1}$	$\sim - 0,86$	$\frac{40}{6,85}$	$\frac{80}{13,71}$	1,40	$\sim 2,04$
V	26,67	40	10^{-1}	$\sim - 0,75$	$\frac{60}{10,28}$	$\frac{120}{20,56}$	1,86	$\sim 2,71$
VI	50	75	$0,5 \cdot 10^{-1}$	$\sim - 0,86$	$\frac{60}{10,28}$	$\frac{120}{20,56}$	3,56	$\sim 5,20$

- (3) die gewählte Bodenamplitude A_0 der Druckstörung in gpm und die Amplitude A derselben in 250 mb = $2 A_0$; sowie die daraus unten und oben sich ergebenden maximalen Werte des Meridionalwindes v_g .

Die eingerahmten Felder bezeichnen die jeweils bei den einzelnen Fällen vorgenommenen Veränderungen dieser Größen relativ zum vorliegenden Fall I. Und schließlich ist die Wirkung dieser Änderungen auf die maximale Vertikalgeschwindigkeit $|\omega|_{MAX}$ oder $\tilde{W}|_{MAX}$ in den letzten beiden Spalten ablesbar.

Beim Fall II wurde der Grundstrom wesentlich verstärkt (von 15 auf 40 m/sec in 250 mb), sonst alles gleich belassen. Die Folge ist eine um mehr als das 3-fache verstärkte Vertikalgeschwindigkeit. Beim Fall III wurde die Atmosphäre wesentlich stabilisiert ($\sigma=10^{-1} \rightarrow 2,4 \cdot 10^{-1}$, oder $-0,75 \rightarrow -0,45^\circ\text{C}/100 \text{ m}$). Die Folge ist enorm, denn das Aufsteigen wird fast völlig unterbunden. Im Fall IV wurde die Atmosphäre labiler gestaltet ($\sigma = 10^{-1} \rightarrow 0,5 \cdot 10^{-1}$, oder $-0,75 \rightarrow -0,86^\circ\text{C}/100 \text{ m}$). Die Wirkung auf $|\omega|$ ist etwas steigernd, aber nicht zu effektiv. Beim Fall V wurde nun die Druckwellen-Amplitude erheblich vergrößert (von 40 auf 60 gpm in 1000 mb), was einer Steigerung von v_g um ca. 3,4 m/sec in 1000 mb und von 6,8 m/sec in 250 mb entspricht. Damit wird auch die vertikale Windscherung von v_g vergrößert. Die Wirkung auf $|\omega|$ ist deutlich erhöhend (um ca. $0,4 \cdot 10^{-3}$ mb/sec). Als letzter und interessantester Fall wurde bei Fall VI der Grundstrom weiter auf Jet-Spitzenwerte in 250 mb erhöht (75 m/sec \approx 150 Knoten), die Stabilität der Atmosphäre verringert (Labilisierung) und die Störungsamplitude A vergrößert beibehalten.

Bei diesem Fall ergaben sich maximale Vertikalgeschwindigkeiten von ca. $3,6 \times 10^{-3}$ mb/sec oder ~ 5 cm/sec, was mit der Erfahrung jetzt gut übereinstimmt. Nur im intensiven Entwicklungsstadium barokliner Störungen wurden durch mehrere Autoren mit sorgfältig angestellten Untersuchungen bis zu 10 cm/sec nachgewiesen. Dies betrifft natürlich nur jene Vertikalbewegung großer Bewegungsvorgänge und nicht jene die mit subsynoptischen Vorgängen konvektiver oder noch kleinskaliger Art einhergehen.

Entsprechend dem in diesem Fall gesteigerten ω ist auch die horizontale Divergenz bzw. Konvergenz wesentlich erhöht (etwa bis $2,7 \times 10^{-5}$ sec $^{-1}$), also verglichen mit dem Fall I um einen Faktor 9 oder 10 größer.

VII Die lokalzeitlichen Änderungen der relativen Vorticity ξ_g und der geopotentiellen Höhe ϕ (Tendenz)

Man sieht sich jetzt in der Lage mit Verwendung der quasi-geostrophischen Vorticity Gleichung (9b):

$$\frac{\partial \xi_g}{\partial t} = - w_g \cdot \nabla \xi_g - w_g \cdot \nabla f + f_o \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

alle auf der rechten Seite aufscheinenden Glieder zu berechnen und damit jenes Feld der lokalzeitlichen Änderung der relativen Vorticity ξ_g quantitativ zu bestimmen, das seine Ursachen in der gewählten baroklinen Ausgangssituation hat.

Das Resultat zeigt die Fig. (21) (oberes Bild). Etwas östlich der geneigten Trogachse ergibt sich eine zeitliche Zunahme

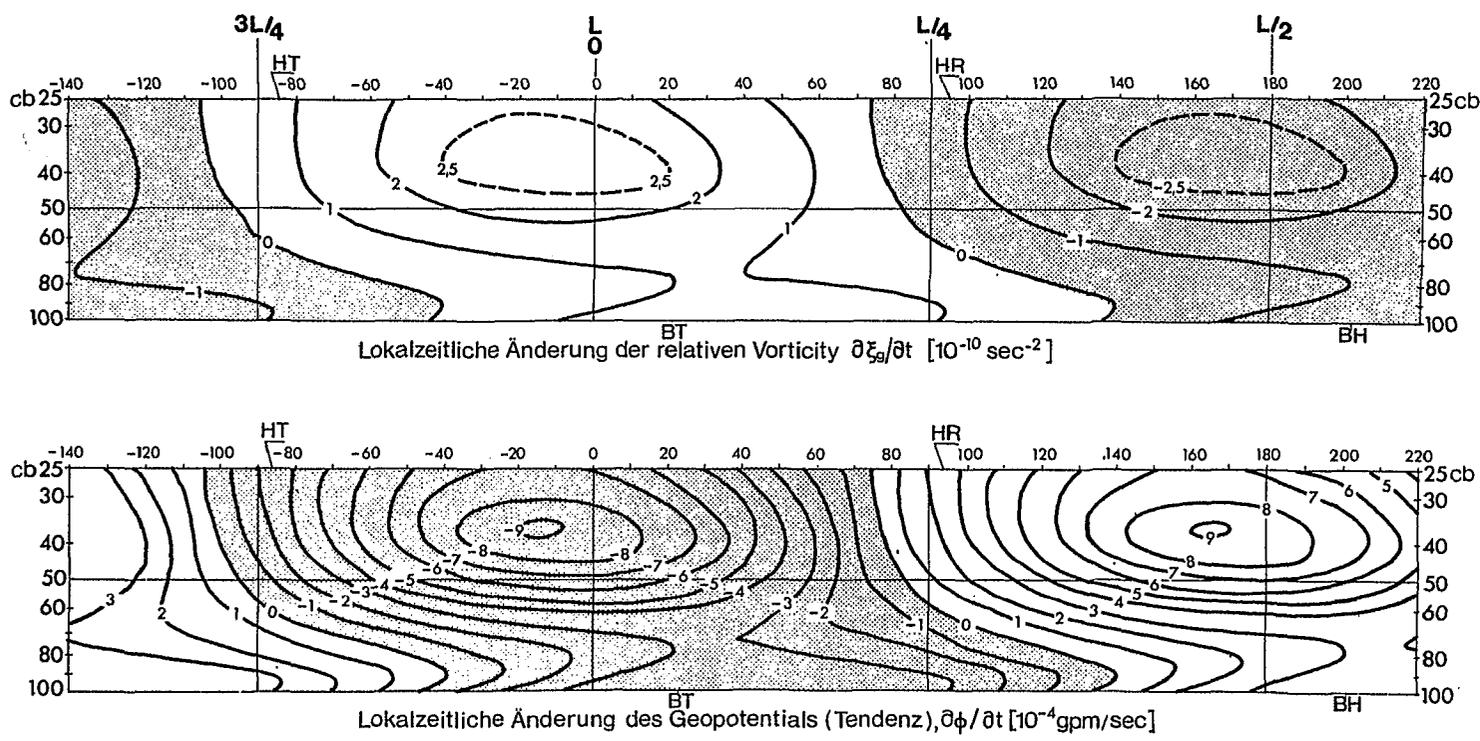


Fig. 21 Die Felder der lokalzeitlichen Änderung der relativen Vorticity und der geopotentiellen Höhe

(Erklärungen wie unter Fig. 11)

und östlich der Rückenachse eine Abnahme der relativen Vorticity. Da wie die Fig. 12 (unteres Bild) zeigte, die relative Vorticity an der Trogachse selbst maximal und positiv war und entsprechend negativ an der Rückenachse, wird sich, wie schon durch andere Argumentation früher erkennbar war, die Wellenstörung relativ kurzer Wellenlänge mit wachsender Zeit ostwärts verlagern. Etwa zwischen 400 und 300 mb ändert sich ξ_g mit der Zeit am stärksten.

ξ_g ist, wie früher schon gezeigt wurde, identisch $\frac{\partial v_g}{\partial x}$, da u_g nicht von der geogr. Breite, also von y , abhängig ist. Da $v_g = \left(\frac{1}{f_0}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$ ergibt sich zwischen ξ_g und ϕ der Zusammenhang:

$$\xi_g = + \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi \quad (\text{siehe bei Gleich. 9a}) \quad \text{und} \quad \nabla^2 \phi \equiv -k^2 \phi$$

$$\text{wegen} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \equiv 0$$

$$\text{und daher folgt} \quad \frac{\partial \xi_g}{\partial t} = - \frac{k^2}{f_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \quad (29)$$

Diese Beziehung erlaubt es aus $\frac{\partial \xi_g}{\partial t}$ durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor $\frac{k^2}{f_0}$ die lokalzeitliche Änderung des Geopotentialfeldes zu berechnen (siehe dazu Fig. (21), (unteres Bild)). Aus dieser Figur ist leicht der gleiche Schluß zu ziehen. Die Wellenstörung pflanzt sich in östlicher Richtung fort. Die größte Erniedrigung des Geopotentials in der oberen Troposphäre beträgt 9×10^{-4} gpm/sec, was dann bei gleichbleibender Andauer dieser Tendenz einem Fall (Anstieg) von 78 gpm pro Tag äquivalent ist.

VIII Die erzwungene Sekundär-Zirkulation

Die gleichzeitig arbeitenden Einschränkungen eines geostrophischen und eines hydrostatischen Gleichgewichts, die der Ableitung des quasi-geostrophischen Gleichungssystems in Abschnitt II zu Grunde gelegt wurde, bedingen also eine Art von Zirkulation, "Sekundär-Zirkulation" genannt, die aus den divergenten horizontalen Bewegungen einerseits und der Vertikalbewegung andererseits besteht.

Innerhalb einer hier diagnostisch bearbeiteten baroklinen Wellenstörung im jungen Entwicklungsstadium läuft daher eine nicht reibungsgetriebene Zirkulation ab, die durch andere Prozesse als Reibung verursacht ist. Sie ist vollständig unabhängig von jener Zirkulation, die durch die Vorgänge in einer planetarischen Grenzschicht (EKMAN-sche Reibungspirale, EKMAN-layer pumping) durch Reibungskonvergenz in synoptisch-skaligen Störungen der gemäßigten Breiten erzwungen werden. Diese Vorgänge können ebenfalls Vertikalbewegung einleiten, aber meist ist dieser Anteil an der Vertikalbewegung jenem Anteil erzwungen durch differentielle Vorticity-Advektion erheblich unterlegen, [12].

Sicherlich spielen die Reibungseinflüsse EKMAN-scher Art eine Rolle und man könnte sie jederzeit in mathematischer Formulierung berücksichtigen, aber wegen ihrer viel kleineren Wirkung, speziell über See, wurde dieser Reibung bei der Herleitung des quasi-geostrophischen Gleichungssystems nicht Rechnung getragen.

Die Fig. (22) bringt nochmals zusammenfassend alle früher besprochenen dominanten Eigenheiten für den motorischen Antrieb dieser Sekundär-Zirkulation zur Darstellung (alle schwächeren Einflüsse wurden in erster Näherung unterdrückt) und zeigt auch die Auslegung der Zirkulationen durch horizontale Pfeile mit Hinsicht auf die horizontale Divergenz-Verteilung und durch vertikale hinsichtlich der Vertikalbewegung.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Zirkulation zweifachem Zweck dient und immer den horizontalen advektiven Vorgängen innerhalb eines sich entwickelnden baroklinen Systems entgegen arbeitet. Denn erstens suchen die divergenten Bewegungen teilweise die Vorticity Advektion auszugleichen und die adiabatischen Temperaturänderungen, welche durch die Vertikalbewegung eingeleitet werden, versuchen teilweise die Einflüsse der horizontalen Temperatur-Advektion zu kompensieren. Dies hat wichtige Folgen für die Entwicklung des Systems. Auch muß betont werden, daß die tatsächlichen Bahnen einzelner Luftteilchen, die sich durch ein solches Störungssystem hindurchbewegen, in entscheidender Weise im dreidimensionalen Raum durch diese Zirkulation beeinflußt und verformt werden.

Als Ausklang soll nochmals auf die Mitwirkung thermodynamischer Vorgänge und ihre Bedeutung Bezug genommen werden (Bewölkung, Feuchte, Kondensation und Niederschlag). Hinsichtlich wichtiger Beteiligung und Wirkung dieser Prozesse wird der Leser auf die eingehenden Darstellungen darüber im Verlauf der gesamten Lebensgeschichte einer extratropischen Störung verwiesen, [18], [19], [16], [4].

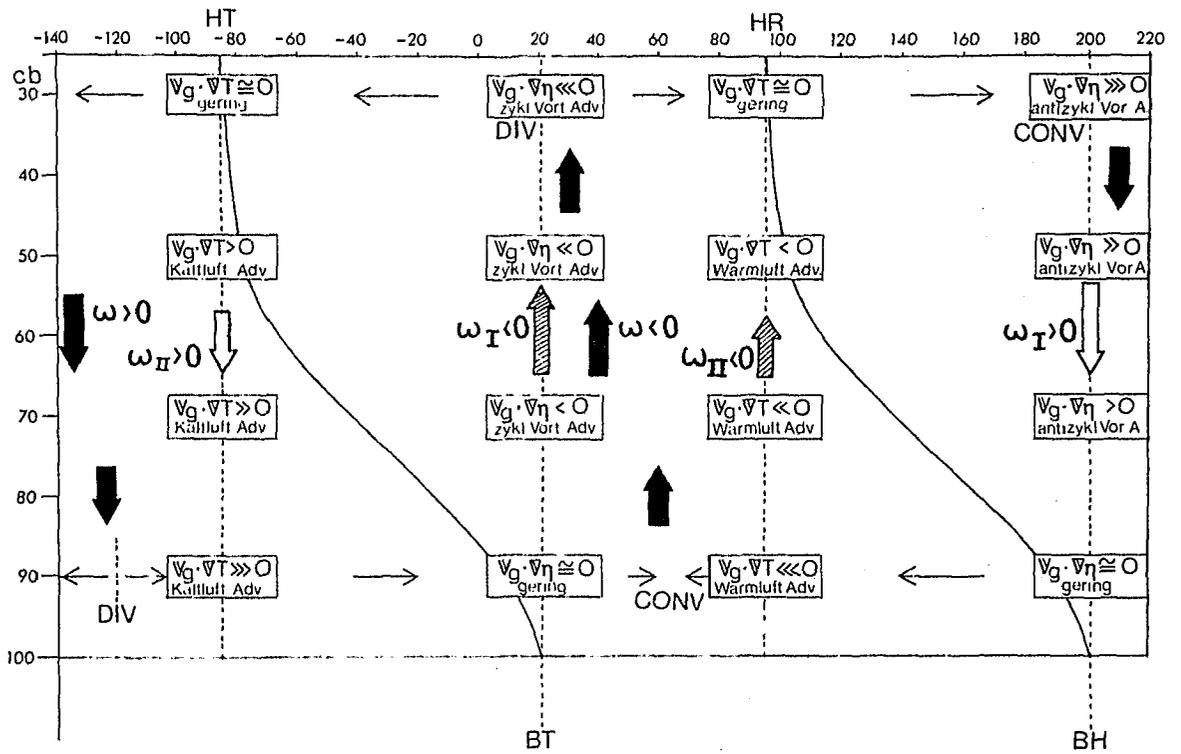


Fig. 22 Schematische Darstellung der "sekundären Zirkulation" im Innern einer baroklinen jungen Wellenstörung und die Hauptantriebsglieder für diese Zirkulation

dünne Pfeile: Horizontaldivergenz
dicke Pfeile: Vertikalgeschwindigkeiten ω , ω_I und ω_{II}

In dieser Arbeit wurden hauptsächlich die dynamischen Wirkungen im Zeitmoment einer jungen Wellenstörung für ihre spätere Entwicklung diagnostiziert, nämlich dann, wenn sich Bewölkungsfeld und Niederschlagsfeld erst entwickeln und Kondensationsprozesse erst einsetzen. Daher wurde auf ihre Mitbeteiligung noch verzichtet. Bald danach aber, bei der schnellen Entwicklung zur Idealzyklone und zur okkludierten Wirbelzyklone hin müßten diese Vorgänge äußerste Beachtung erfahren. Dann nämlich, wenn die durch die Dynamik eingeleitete Vertikalbewegung sich verstärkt und die Aufgleit- oder Absink-Vorgänge Wolkenfelder und Niederschlag auslösen.

Literatur

1. BJERKNES, J. (1937): Theorie der außertropischen Zyklonenbildung, Meteorologische Zeitschrift 54, S. 462-466
2. BJERKNES, J. (1951): Extratropical Cyclones, Comp. Americ. Met. Soc., Boston, Mass. S. 599-620
3. BYERS, H.R. (1959): General Meteorology, 3.ed., McGraw Hill Book Comp. INC., New York, Toronto, London, chapters 12,13 S. 287-324
4. CHROMOV, S.P. and SWOBODA, G. (1940): Einführung in die synoptische Wetteranalyse, Verlag J. Springer, Wien, 6. Kapitel, 63,64,65, S. 309-357
5. DEFANT, A. (1926): Primäre und sekundäre - freie und erzwungene Druckwellen in der Atmosphäre, Festschrift d. Zentralanst. f. Met. u. Geodyn., Wien, Sitz. Ber. d. Wiener Akad., S. 83-103
6. DEFANT, A. und DEFANT, Fr. (1958): Physikalische Dynamik der Atmosphäre, Akad. Verlagsgesellschaft mbH, Frankfurt a.M., Kapitel 13, S. 294-465
7. EXNER, F.M. (1917): Dynamische Meteorologie, Verlag G. Teubner, Leipzig, Berlin, S. 256-258
8. FICKER, H. von (1920): Beziehungen zwischen Änderungen des Luftdruckes und der Temperatur in den unteren Schichten der Troposphäre (Zusammensetzung der Depressionen), Sitz. Ber. d. Wiener Akademie, Bd. 129, S. 763
9. FORTAK, H. (1971): Meteorologie, Deutsche Buchgemeinschaft, Berlin, Darmstadt, Wien, Die globale Zirkulation der Atmosphäre und großräumige (synoptische Strömungssysteme, S. 195-233
10. GODSKE, C.L., BERGERON, T., BJERKNES, J. and BUNDGAARD, R.C. (1957): Dynamic Meteorology and Weather Forecasting, Americ. Met. Society, Boston, Mass. Carnegie Instit. of Washington, Washington DC. Part IV, chapter 14, 14.3, 14.4, 14.5, chapter 15, 15.0, 15.1, 15.2, 15.3 S. 526-563
11. HOLMBOE, J., FORSYTHE, G. and GUSTIN, W. (1948): Dynamic Meteorology, 2. ed., J. Wiley and Sons, INC, New York, Chapman and Hall, Limited, London, chapter 12, Theory of waves in a zonal current, S. 337-363
12. HOLTON, J.R. (1972): An Introduction to Dynamic Meteorology, Academic Press, New York and London, chapter 7, 10

13. KRISHNAMURTI, T.N., NOGUES, J. and BAUMHEFNER, D. (1966):
On the Partitioning of the Baroclinic Vertical
Motions in a Developing Wave Cyclone,
Air Force Cambridge Res. Lab., Office of
Aerospace Research, US Air Force, Bedford, Mass.
Contr. Nr. AF 19(628)-4777, S. 1-33
14. LORENZ, E. (1967): The Nature and Theory of the General Circulation
of the Atmosphere, World Met. Organization,
chapters 5, 8, 9
15. MARGULES, M. (1905): Über die Energie der Stürme, Jahrbuch der
Zentralanst. f. Met. u. Geodyn. Wien, 40,
S. 1-26
16. PALMÉN, E. and NEWTON, C.W. (1969): Atmospheric Circulation
Systems, Their structure and physical inter-
pretation, Academic Press, New York and London,
chapters 10, 11, 12, S. 274-387
17. PETERSEN, S. (1952): On the propagation and growth of Jet Stream
waves, Rep. US Air Force, Washington, DC.
18. PETERSEN, S. (1956): Weather Analysis and Forecasting, 2.ed.,
Volume I, Motion and Motion Systems,
McGraw Hill Book Comp. INC., New York,
Toronto, London, chapters 15,16, S. 305-339
19. PETERSEN, S., BRADBURY, D.L. and PEDERSEN, K. (1962):
The Norwegian Cyclone models in Relation to
Heat and Cold Sources, Geofysiske Publikasjoner
Geophysica Norwegica, Vol. XXIV, S. 229-280,
Universitetsforlaget, Oslo
20. SUTCLIFFE, R.C. (1966): Weather and climate, Weidenfeld and Nicolson,
London, chapter 9, Large scale weather systems,
S. 99-118

Danksagung

Diese Arbeit wurde im Rahmen eines Forschungsschwerpunktes "Zirkulation und Energiehaushalt der Atmosphäre" der Deutschen Forschungsgemeinschaft durchgeführt.

Ich danke der Deutschen Forschungsgemeinschaft sehr für diese Unterstützung. Weiteres danke ich Herrn Prof. Dr. Maagard vom Institut für Meereskunde, Kiel, für Anregung und stimulierende Diskussion bei der Lösung der ω -Gleichung, Herrn Dr. Arpe vom Institut für Meereskunde, Kiel, für Diskussion bei der Erstellung des Modells und Verfügbarmachung von Vergleichsdaten betreffend wahre, instabile Wellen aus Beobachtungen. Auch danke ich Frau Lorentsen und Frau Fahrenkrog für die Reinzeichnung der Bilder und Frau Diederich, meiner Sekretärin, für die Reinschrift und Vervielfältigung des Manuskriptes.