

IN DER METEOROLOGIE BENUTZTE OBJEKTIVE
HORIZONTALÉ ANALYSENVERFAHREN IM
HINBLICK AUF DIE ANWENDUNG BEI
WISSENSCHAFTLICHEN UNTERSUCHUNGEN

DOI 10.3289/IFK_BER_45

Freie wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung
des Grades eines Diplommeteorologen des
Fachbereiches Mathematik-Naturwissenschaften
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von: Wolfgang Riecke
Referent: Prof. Dr. P. Speth
Koreferent: Prof. Dr. Fr. Defant

Kiel 1977

Berichte
aus dem
Institut für Meereskunde
an der
Christian-Albrechts-Universität Kiel

Nr. 45

IN DER METEOROLOGIE BENUTZTE OBJEKTIVE
HORIZONTALER ANALYSENVERFAHREN IM
HINBLICK AUF DIE ANWENDUNG BEI
WISSENSCHAFTLICHEN UNTERSUCHUNGEN

von
Wolfgang Riecke

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von:

Institut für Meereskunde
Abt. Maritime Meteorologie

Düsternbrooker Weg 20
D 2300 K i e l 1

ISSN 0341-8561

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit beschäftigt sich mit verschiedenen numerischen Methoden zur objektiven Darstellung von Feldverteilungen meteorologischer Variabler. Sie wird sich dabei auf die zweidimensionalen, horizontalen Verfahren beschränken. Diese werden im dritten Abschnitt dieser Arbeit aufgezählt und näher beschrieben. Außerdem wird hier ebenfalls auf allgemeinere Dinge, wie Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme, Relaxationsmethoden, Glättungsoperatoren u.ä., die häufig in den unterschiedlichen objektiven Analysenverfahren auftreten, eingegangen. Im zweiten Abschnitt erfolgt eine Betrachtung der Analysengrößen selbst. Es werden die in den gemeldeten Beobachtungen vorkommenden Fehler behandelt. Methoden zur Verbesserung fehlerhafter Daten bzw. Methoden zur Eliminierung unkorrigierbarer Daten aus dem Beobachtungsmaterial werden erläutert. Zur Erhöhung des Datenmaterials in beobachtungsarmen Gebieten werden Vorschläge gemacht. Am Ende werden die erwähnten objektiven Analysenverfahren auf ihre Genauigkeit im Hinblick auf unterschiedliche Beobachtungsdichten, auf die Benutzung fehlerhafter Daten sowie auf andere Kriterien hin betrachtet.

SUMMARY

This paper deals with different numerical methods for an objective representation of field distributions of various meteorological variables. Only two-dimensional horizontal analysis procedures are considered. These procedures are described in the third section of this paper. In addition general items, as methods for solving linear systems of equations, relaxation methods, smoothing-operators a.o.m. are dealt with which often appear in different objective analysis procedures.

In the second section the meteorological elements themselves and possible errors appearing in the reported observations are discussed. Methods for improving erroneous data or methods for an elimination of uncorrected data in the observational material are presented. Suggestions to raise the data in observationally poor areas are made.

Finally the above mentioned objective analysis procedures are investigated with regard to differing data-density, use of erroneous data and other criteria.

| INHALTSVERZEICHNIS | Seite |
|---|-------|
| 1. Einleitung | 1 |
| 2. Die Analysengrößen | 4 |
| 2.1. Analyisierte Größen und Gebiete | 4 |
| 2.1.1. Analysenbereich | 5 |
| 2.1.2. Meßwerte | 6 |
| 2.1.2.1. Bodenmessungen | 6 |
| 2.1.2.2. Höhenmessungen | 7 |
| 2.1.2.3. Methoden zur Beseitigung grob fehlerhafter Meldungen | 9 |
| 2.1.2.3.1. Vertikale Kontrolle | 10 |
| 2.1.2.3.2. Horizontale Kontrolle | 14 |
| 2.1.2.4. Erhöhung des Datenmaterials | 18 |
| 2.1.2.5. Datensammlung und Dekodierung | 21 |
| 3. Mathematische Hilfsmittel und Definitionen | 22 |
| 3.1. Umrechnung der geographischen Länge und Breite in kartesische Koordinaten und umgekehrt | 22 |
| 3.2. Abstand zweier Punkte, Maßstabsfaktor | 24 |
| 3.3. Bilineare Interpolation zur Berechnung eines Stationswertes aus vier umliegen- den Gitterpunkten | 25 |
| 3.4. Kovarianz- und Korrelationsfunktionen | 26 |
| 3.5. Matrizenverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme | 29 |
| 3.6. Relaxationsmethode zur Lösung Poisson- scher Differentialgleichungen | 31 |
| 3.7. Glättung von Analysen | 35 |
| 3.8. Methoden zur Ausgabe der Ergebnisse der objektiven Analyse | 38 |

| | Seite |
|---|-------|
| 4. Die Analysenverfahren | 39 |
| 4.1. Polynommethode | 40 |
| 4.2. Korrektionsmethode | 49 |
| 4.2.1. nach BERGTHORSSON und DÖÖS | 49 |
| 4.2.2. nach CRESSMAN | 55 |
| 4.3. Iteratives Verfahren | 63 |
| 4.4. Optimales Interpolationsverfahren | 67 |
| 4.4.1. Optimale Interpolation für exakte Beobachtungswerte | 67 |
| 4.4.2. Berücksichtigung zufälliger Beobachtungsfehler bei der optimalen Interpolation | 70 |
| 4.4.3. Anwendung der optimalen Inter- polation in der objektiven Analyse | 72 |
| 4.4.3.1. Auffinden der notwendigen Sta- tionen | 73 |
| 4.4.3.2. Berechnung der interpolierten Gitterwerte | 77 |
| 4.5. Dynamische Methode | 81 |
| 4.6. Geopotentialanalyse mit Hilfe von Zirku- lation und Vorticity | 85 |
| 4.7. Objektive Analyse mittels Kugelflächen- funktionen | 89 |
| 5. Abschließende Betrachtungen | 100 |
| Literaturverzeichnis | 112 |

1. EINLEITUNG

Mit einer Veröffentlichung PANOFSKYS/28/1949 über eine objektive oder numerische Analyse von Wetterkarten ist in der dynamischen Meteorologie ein Problem angesprochen worden, dessen intensives Studium bis in die heutige Zeit reicht und auch weiterhin von Bedeutung sein wird. Es geht dabei um das Ausschalten des menschlichen Einflusses bei der Rekonstruktion von Feldern meteorologischer Variabler.

Der Anstoß zu einer objektiven Analyse ist im Zusammenhang mit der Entwicklung der numerischen Wettervorhersage zu sehen. Für diese ist die Kenntnis der Feldverteilung der meteorologischen Variablen an Gitterpunkten zu einer Startzeit t_0 als Anfangsbedingung notwendig. Bei der bis dahin üblichen subjektiven Analyse können erhebliche Unterschiede zwischen zwei von verschiedenen Analytikern analysierten Karten des gleichen Termins auftreten, insbesondere über datenleeren Gebieten, wo die persönliche Erfahrung des einzelnen von bedeutendem Einfluß ist. Diese beiden differierenden Anfangszustände ergäben entsprechend unterschiedliche Vorhersagen. Da innerhalb eines routinemäßigen Dienstes mehrere Analytiker arbeiten, kann aus dem genannten Grunde keine Kontinuität in der Folge von Analysen und Vorhersagen gewährleistet werden. Hieraus ergibt sich zwingend das Problem der Objektivität in der Analyse.

So sind in der Folgezeit nach 1949 numerische Methoden entstanden, die mittels der unregelmäßig verteilten Beobachtungen Werte des meteorologischen Elementes an den für die Vorhersage notwendigen Gitterpunkten berechnen. Je nach der praktizierten Methode und je nach Wahl der in ihr vorhandenen freien Parameter wird eine solche Analyse zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, doch wird sich bei gleichem Verfahren aus einem vorgegebenen Beobachtungssatz stets exakt dieselbe Analyse einstellen.

Deshalb scheint es angebrachter, von numerischer Analyse zu sprechen, doch soll im weiteren Verlauf weiterhin der Ausdruck objektiv verwendet werden, da dieser sich in der Literatur allgemein eingebürgert hat.

Der für eine objektive Analyse notwendige enorme Rechenaufwand ist nur mit einer Rechenmaschine zu bewältigen, so daß die Entwicklungen und Verbesserungen in den numerischen Methoden im Zusammenhang mit der Entwicklung in der Computertechnik zu sehen sind.

Wurde die objektive Analyse zuerst nur zur Erstellung eines Anfangsfeldes für die numerische Wettervorhersage benutzt, begann sie bald eine unabhängige Bedeutung zu erlangen, denn das anfallende Datenmaterial konnte schneller und effektiver mit ihr bewältigt werden. So konnte die Anzahl der zu analysierenden Niveaus und meteorologischen Variablen, ebenso wie das Analysengebiet, vergrößert werden. Auf diese Weise wurde ein umfassenderer Überblick über den momentanen Aufbau der Atmosphäre möglich.

Ein schematisiertes Programm zur Herstellung einer objektiven Analyse wird in Abb. 1 präsentiert. Es beginnt mit der Sammlung der verschlüsselten Beobachtungsdaten und deren anschließender Dekodierung (s. 2.1.2.5.). Der dritte Programmteil überprüft die Beobachtungen auf ihre Fehlerhaftigkeit. Hierbei sollen die zufälligen, bei der Messung oder bei der Verschlüsselung entstehenden, groben Fehler entdeckt und wenn möglich korrigiert werden. Anderenfalls werden die beanstandeten Daten eliminiert. Die Überprüfung geschieht einmal horizontal (s. 2.1.2.3.2.) mittels Vergleich benachbarter Beobachtungen, und vertikal (s. 2.1.2.3.1.) mit Hilfe der hydrostatischen Grundgleichung. Innerhalb dieses Programmteiles ist es ebenfalls möglich, systematische Fehler zu korrigieren, wie sie z.B. bei Radiosondenmessungen oberhalb 100 mb durch die Einwirkung der Sonnenstrahlung auf den Meßfühler ent-

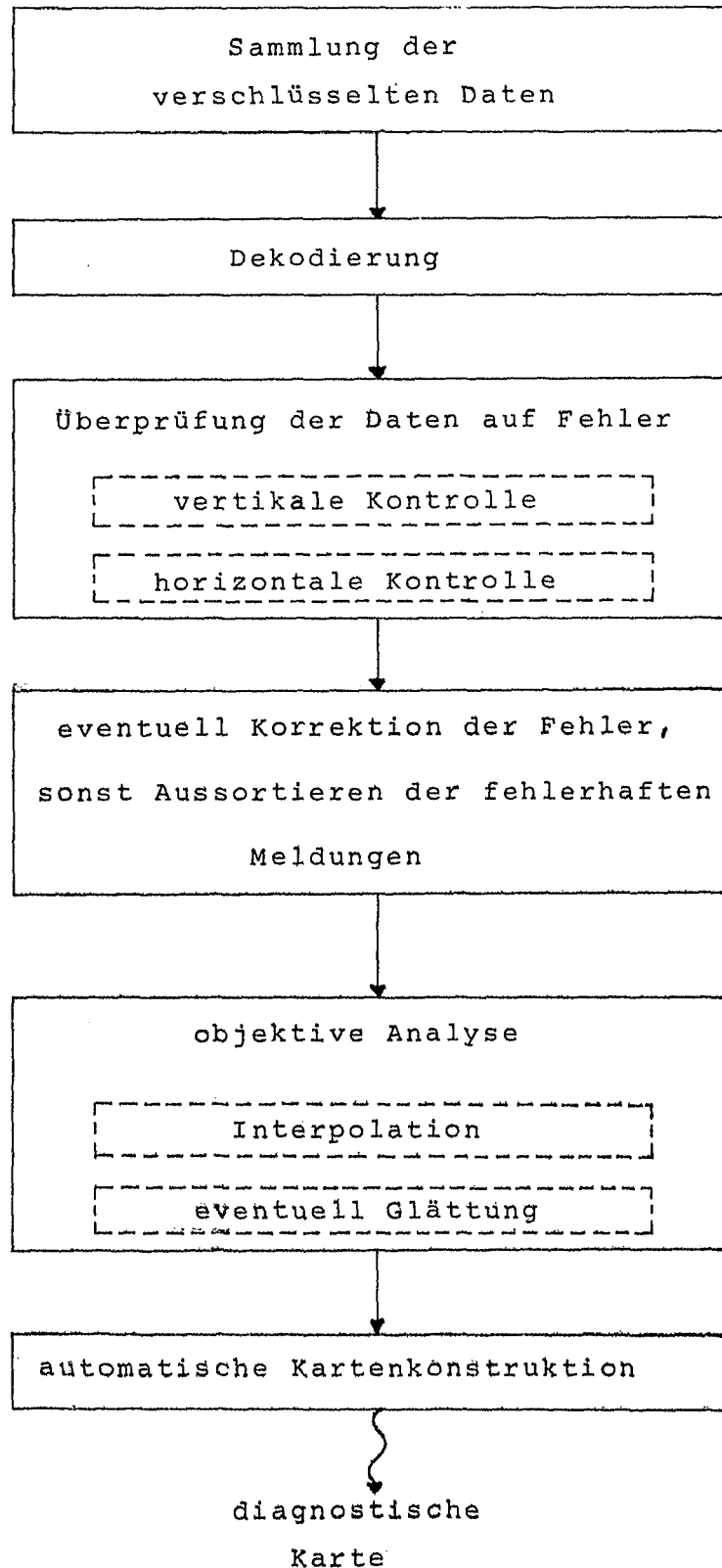


Abb. 1 Allgemeines Schema zur Erstellung einer objektiven Analyse (nach GANDIN/14/)

stehen. Mit diesen kontrollierten, unregelmäßig verteilten Beobachtungen wird dann die eigentliche objektive Analyse vorgenommen, d.h. die Berechnung von Werten an regelmäßig angeordneten Punkten, im Diagramm mit Interpolation bezeichnet (s. 4.). Durch verbleibende geringe Fehler in den überprüften Meßwerten kann eine gewisse Unruhe in der Linienführung der gewonnenen Analyse verursacht werden, was eventuell eine Glättung nötig macht (s. 3.7.). Der sich anschließende Programmteil der automatischen Kartenkonstruktion ergibt die diagnostische Karte (s. 3.8.).

Diese Arbeit wird sich in der Hauptsache im folgenden mit der eigentlichen objektiven Analyse beschäftigen, also mit dem Teil, der in dem Diagramm mit Interpolation bezeichnet wird. Es werden die in der Literatur gängigen Methoden zusammengestellt und beschrieben, sowie deren Vor- und Nachteile in Hinblick auf wissenschaftliche Anwendungen erörtert. Dazu sollen zunächst in Abschnitt 2. die Analysengrößen selbst betrachtet werden.

2. DIE ANALYSEGRÖSSEN

2.1. ANALYSIERTE GRÖSSEN UND GEBIETE

Grundsätzlich ist es möglich, sämtliche skalaren meteorologischen Variablen über die gesamte Atmosphäre durch numerische Methoden objektiv zu analysieren, doch werden im allgemeinen nur die atmosphärischen Zustandsgrößen Luftdruck p oder Geopotential ϕ einer isobaren Fläche, die Luftdrucktendenz p_t , die Temperatur T und der Taupunkt T_d , sowie die Windkomponenten u und v behandelt.

Die objektive Analyse bleibt auf die Gebiete der Erdkugel beschränkt, über denen regelmäßige Messungen innerhalb der Lufthülle vorgenommen werden.

2.1.1. Analysenbereich

Wegen der im Vergleich zur Südhemisphäre in der Nordhalbkugel relativ hohen Dichte an Boden- und Radiosondenmeßstationen (große Landmassenbedeckung), sowie wegen der im atlantischen und pazifischen Ozean stationierten Wetterschiffe kann sich der Analysenbereich horizontal über die gesamte Nordhemisphäre bis nahe zum Äquator und vertikal vom Boden bis zur 10 mb-Fläche, in besonderen Fällen auch darüber erstrecken. Schwierigkeiten bei der Analyse können aus Mangel an Daten vor allem über dem pazifischen Ozean entstehen.

Auf der Südhalbkugel sind die Verhältnisse zur Erstellung einer objektiven Analyse wesentlich schwieriger, bedingt durch die geringen Landmassen, die außerdem noch eine niedrigere Stationsdichte aufweisen.

Die Abb. 2 und 3 verdeutlichen die Unterschiede in der Beobachtungsdichte auf der Nord- und Südhalbkugel.

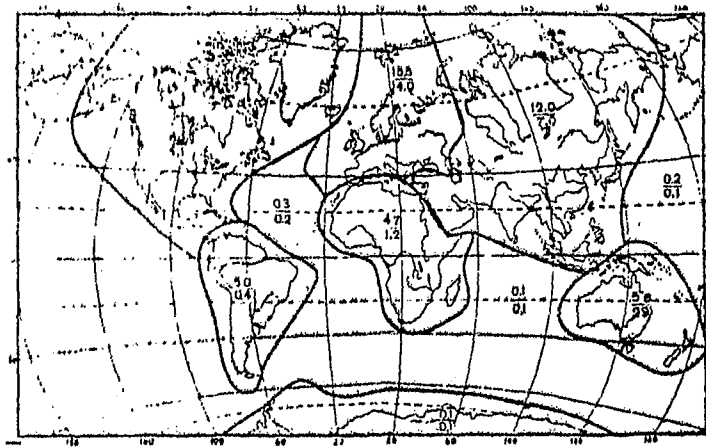


Abb. 2 Mittlere Stationszahl pro 1 Million km^2 für verschiedene Gebiete der Erde (obere Zahl: Bodenstationen, untere Zahl: aerologische Stationen)

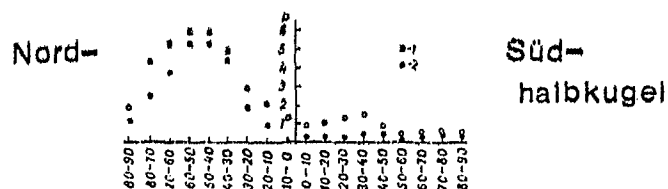


Abb. 3 Mittlere Werte der Beobachtungsdichte für 10° -Breitengürtel (1 - Bodenstationen, 2 - aerologische Stationen)

(Beide Abbildungen aus BELOUSOV, GANDIN, MASHKOVICH/3/)

2.1.2. Meßwerte

Für jede Analyse, ob subjektiv oder objektiv, bilden die Meßwerte die Grundlage. Sie sind fehlerbehaftet. Bei den Fehlern in den übermittelten Beobachtungen sind systematische und zufällige Anteile zu unterscheiden, die beide, soweit möglich, vor der Analyse zu eliminieren sind. Während der zufällige Fehler im falschen Ablesen der Meßinstrumente oder im falschen Ver- bzw. Entschlüsseln der Daten begründet liegt, entsteht der systematische durch die Meßanordnung selbst.

2.1.2.1. Bodenmessungen

Der systematische Fehler wird bei diesen Beobachtungen fast ausnahmslos durch die topographische Lage der Meßstation bewirkt. Für alle Einflüsse, die über größere Gebiete im Mittel nur gering sind, braucht infolge der großen Stationsdichte am Erdboden keine Korrektur an dem gemessenen Wert angebracht zu werden.

Eine Fehlerquelle, die allen Bodenbeobachtungen grundsätzlich gemeinsam anhaftet, resultiert aus den unterschiedlichen Höhen, in denen die Meßstationen liegen.

Da die Taupunktdifferenzen, die Windmessungen und die Luftdrucktendenz gemittelt über einem Gebiet relativ unabhängig von der Stationshöhe sind, sie deshalb im Durchschnitt nur geringe systematische Fehler aufweisen, werden die drei genannten meteorologischen Größen wie gemessen verbreitet. Allerdings sind Ausnahmefälle möglich, wo eine extreme Stationslage die Ursache für hohe, systematische Fehler bildet, doch können derartige Messungen durch Vergleich mit benachbarten Stationen entlarvt und eliminiert werden (s. 2.1.2.3.).

Ebenso wie die vorangegangenen drei wird die Temperatur gemeldet, wie am Meßinstrument angezeigt. Sie nimmt im Mittel mit zunehmender Höhe ab, doch kann bei besonde-

ren Wetterlagen eine Zunahme mit der Höhe zu verzeichnen sein. Temperatursprünge treten am Erdboden an den Grenzen von starker und geringer Bewölkung auf, da hier über einem relativ kleinen Bereich unterschiedliche Sonneneinstrahlungsverhältnisse herrschen. Andere Diskontinuitäten bilden sich an Schneegrenzen, an Grenzen zwischen Land und Wasser und natürlich an den Fronten. Alle vorkommenden diskontinuierlichen Änderungen, bis auf jene, welche Fronten markieren, sollten in einer Temperaturanalyse nicht zu finden sein. Durch Auswahl nicht zu hoch gelegener Meßstationen kann die Höhenabhängigkeit gemindert werden. Handelt es sich bei den anderen nicht gewünschten Diskontinuitäten um räumlich nicht stark ausge dehnte, so kann hier eine Glättung Abhilfe schaffen. Dennoch nicht zu Fronten gehörende, in der Analyse auftretende Temperaturdiskontinuitäten sind durch andere meteorologische Elemente als Scheinfronten zu entlarven.

Die Luftdruckmessung wird auf Grund ihrer starken Abhängigkeit von der Höhe der Beobachtungsstation als einzige meteorologische Größe an Ort und Stelle korrigiert, indem eine Reduktion auf das mittlere Meeresniveau (Normalnull) vorgenommen wird. Methoden zur Reduktion sind in einem Papier der WMO/46/ veröffentlicht.

2.1.2.2. Höhenmessungen

Die Ursache für den systematischen Fehler in diesen Beobachtungen ist auf den Meßprozeß selbst zurückzuführen.

Die aerologischen Daten können auf verschiedene Arten gewonnen werden. Umfangreiche, regelmäßige Messungen werden nur mit Radiosonden vorgenommen, welche von mit Wasserstoff gefüllten Ballonen aufwärts getragen werden. Eine zweite Methode ist der meteorologische Raketenanstieg, der wesentlich größere Höhen erreicht, aber sehr kostspielig ist. Der Einbau von Meßinstrumenten in Flugzeuge ist eine weitere Möglichkeit, doch ist dabei für

die Genauigkeit der aufgezeichneten Daten ein erheblicher Aufwand notwendig.

Da die Radiosondenaufstiege mit Ballonen fast ausschließlich das für eine wissenschaftliche Verarbeitung nötige aerologische Datenmaterial liefern, sollen auch nur die systematischen Fehler ihrer Meßwerte behandelt werden.

Die Sonden messen die Temperatur und die Feuchte als Funktion des Druckes. Mit Hilfe der erhaltenen vertikalen Temperatur- und Feuchteprofile wird durch Integration der hydrostatischen Grundgleichung die geopotentielle Höhe einzelner Druckniveaus berechnet. Das Windprofil ist aus der Projektion der Sondenbewegung auf eine Horizontalebene bestimmbar (Radarverfolgung der Sonde).

Ein Fehler folgt aus der Trägheit des Thermometers, denn durch die im Mittel in der Troposphäre bestehende Abnahme der Temperatur mit der Höhe werden während der Aufstiege zu hohe Werte angezeigt, die dann auch in die Berechnung des Geopotentials eingehen. Durch Verbesserungen und Korrekturen, die schon an der Station an den Meßwerten angebracht werden, kann dieser Fehler in den für die Troposphäre verbreiteten Daten vernachlässigt werden.

In der unteren Stratosphäre tritt der Trägheitsfehler nur gering auf, da über den gemäßigten Breiten die Temperatur mit der Höhe näherungsweise konstant bleibt, doch wird hier eine andere Fehlerquelle für die Temperaturmessung und damit auch für die Geopotentialberechnung dominant, die bis 100 mb nicht berücksichtigt zu werden braucht, nämlich der Einfluß der kurzwelligen Sonneneinstrahlung. Dieser Fehler wird eine Funktion des Sonnenstandes sein, denn er sollte verschwinden, wenn das Meßinstrument nicht mehr bestrahlt wird. Ein Korrekturverfahren, das den Tageswert auf das Äquivalent der Nachtbeobachtung reduziert, wird bei FINGER, WOOLF u. ANDERSON/13/

beschrieben. Außerdem erwähnen sie, daß das Thermometer ab 10 mb und bei Fehlen solarer Einstrahlung einen zu geringen Wert infolge eigener langwelliger Ausstrahlung anzeigt.

Die mit der Entfernung des Ballons vom Beobachtungsort steigenden Fehler bei der Bestimmung des Windes sind in großen Höhen im Vergleich zu den Fehlern, die trotz Korrektur bei der Geopotentialberechnung entstehen, gering.

Zum Abschluß dieses Abschnittes sei bemerkt, daß in der Welt verschiedene Radiosondentypen im Einsatz sind und demgemäß ihre Anfälligkeit gegenüber den genannten Fehlerquellen Unterschiede aufweist, so daß jeweils die Korrektur auf die Sondenart abgestimmt werden muß.

2.1.2.3. Methoden zur Beseitigung grob fehlerhafter Meldungen

Bei den groben Fehlern in den übermittelten Meßdaten handelt es sich meist um zufällige, die durch falsches Ablesen, Ver- und Entschlüsseln und falsches Übermitteln entstehen; jedoch sind auch grobe systematische möglich, wie sie z.B. in Bodenmessungen bei extremer Lage der Station vorhanden sein können (vgl. 2.1.2.1.).

Die Entlarvung dieser fehlerhaften Daten geschieht auf zwei Wegen, einmal durch vertikale Konsistenzüberprüfung der einzelnen Radiosondenaufstiege und zum anderen durch eine horizontale Kontrolle. Der vertikale Check spürt diejenigen zufälligen Fehler auf, die beim Kodieren und Übermitteln entstanden sind. Unter gewissen Voraussetzungen ist hier die beanstandete Meldung korrigierbar. Zufällige Ablesefehler während des Messens und die groben systematischen sind nur durch die horizontale Kontrolle aufdeckbar. Kodier- und Übermittlungsfehler können ebenfalls mit ihr entlarvt werden. Allerdings findet bei der

horizontalen keine Korrektur der falschen Messungen statt.

Fehlerhafte Daten, die nicht verbessert werden können, werden aus dem Datenmaterial gänzlich eliminiert.

2.1.2.3.1. Vertikale Kontrolle

Für die Geopotential- und Temperaturwerte wird der Check mittels der hydrostatischen Grundgleichung ausgeführt. Diese wird über eine Schicht zwischen den isobaren Flächen p_n und p_{n+1} integriert. Das Temperaturprofil wird zwischen den Niveaus als linear angenommen. Dann ergibt sich für das relative Geopotential

$$\phi_{n+1} - \phi_n = 67,4 \frac{T_n + T_{n+1}}{2} \log \frac{p_n}{p_{n+1}} \quad (1)$$

wobei ϕ_n und ϕ_{n+1} das absolute Geopotential [gpm] und T_n und T_{n+1} [K] die Temperaturen der Druckflächen p_n und p_{n+1} bedeuteten. Durch die Annahme der Linearität der Temperatur wird sich bei der Berechnung der Gl. (1) ein Fehler einstellen, der für die einzelnen Standardschichten folgende Erfahrungswerte Δ nicht überschreitet:

| Schicht [mb] | Δ_n^{n+1} [gpm] |
|--------------|------------------------|
| 1000-850 | 30 |
| 850-700 | 30 |
| 700-500 | 40 |
| 500-400 | 30 |
| 400-300 | 40 |
| 300-200 | 80 |
| 200-150 | 60 |
| 150-100 | 60 |

Der hohe Δ -Wert zwischen 300 und 200 mb resultiert aus der variablen Lage der Tropopause innerhalb dieser Schicht, durch die die Linearität beträchtlich verletzt wird.

Ein Radiosondenaufstieg wird überprüft, indem die relativen Geopotentiale der einzelnen Schichten einmal nach Gl. (1) berechnet, zum zweiten direkt aus den gemeldeten

absoluten Geopotentialwerten bestimmt und dann miteinander verglichen werden. Dieser Sachverhalt wird durch die Gl. (2) beschrieben

$$\delta_n^{n+1} = (\phi_{n+1} - \phi_n)_{\text{direkt}} - \left[A_n^{n+1} + B_n^{n+1} (t_n + t_{n+1}) \right] \quad (2)$$

$$\text{mit } A_n^{n+1} = 18410 \cdot \log \frac{P_n}{P_{n+1}} \quad \text{und } B_n^{n+1} = 33,7 \cdot \log \frac{P_n}{P_{n+1}} .$$

Der zweite Teil der rechten Seite von (2) entspricht der Gl. (1), nur daß die Temperatur von $T[\text{K}]$ in $t[^\circ\text{C}]$ umgeformt wurde.

Die Differenz δ_n^{n+1} , die sich zwischen den beiden Berechnungsarten ergibt, wird mit den entsprechenden Δ -Werten verglichen. Ein Aufstieg gilt als korrekt, wenn alle $\left| \delta_n^{n+1} \right| < \Delta_n^{n+1}$ sind, falls dieses in mindestens einem Fall nicht zutrifft, wird der Aufstieg als inkorrekt behandelt. Zu hohe Differenzen können nur durch fehlerhafte ϕ_n , T_n und ϕ_{n+1} , T_{n+1} verursacht werden, da nur die aus der angenommenen Linearität der Temperatur entstehenden Fehler in Δ_n^{n+1} berücksichtigt werden. Wie kann der fehlerhafte Wert in dem beanstandeten Aufstieg aufgespürt werden?

Es sei angenommen, daß infolge unkorrekter Übermittlung oder Kodierung das Geopotential ϕ_n falsch sei. Dann werden die Differenzen δ der benachbarten Schichten ϕ_n und ϕ_{n+1} und ϕ_{n-1} und ϕ_n entgegengesetztes Vorzeichen haben, aber von gleicher Größe sein. Durch Addition der Hälfte der Summe der Beträge von δ_{n-1}^n und δ_n^{n+1} zu ϕ_n erfolgt eine Korrektur.

Bei einem Fehler im Temperaturwert besitzen die Differenzen gleiches Vorzeichen, aber unterschiedliche Größen. Die Verbesserung der Temperatur geschieht, indem eine Zusatzgröße

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_{n-1}^n}{B_{n-1}^n} + \frac{\delta_n^{n+1}}{B_n^{n+1}} \right)$$

hinzuaddiert wird.

Bei den bisher erwähnten Fehlern handelt es sich um isolierte, d.h., daß nur für eine einzige isobare Fläche Temperatur oder Geopotential falsch ist, während diese in den benachbarten Niveaus richtig sind. Messungen mit nicht isolierten Fehlern, z.B. fehlerhaftes Geopotential für die eine und fehlerhafte Temperatur für die nächste Fläche, können nicht korrigiert werden.

Die Höhe der einzelnen Druckniveaus wird durch Addition der relativen geopotentiellen Höhenunterschiede bestimmt. Wird eine Höhe falsch berechnet, so setzt sich dieser Fehler in allen darüberliegenden Flächen fort. Für diese Tatsache wird sich innerhalb des Checks des Radiosondenaufstieges nur eine Differenz δ_n^{n+1} einstellen, die größer Δ_n^{n+1} ist, da für höhere Schichten der Fehler durch die Subtraktion der absoluten Geopotentiale eliminiert wird. Durch Abziehen der Differenz δ_n^{n+1} von ϕ_{n+1} und allen folgenden Höhen wird der Aufstieg korrigiert.

Diese ausführlich beschriebene und andere Varianten der statischen Kontrolle sind bei GANDIN/14/ und BELOUSOV, GANDIN u. MASHKOVICH/3/ mit weiteren Quellenangaben zu finden.

Es sei in diesem Zusammenhang der Artikel von FINGER, WOOLF u. ANDERSON/13/ erwähnt, da er zu diesem Thema über die Stratosphäre Angaben bringt. Sie berechnen mit Hilfe der hydrostatischen Grundgleichung eine Höhe $\phi_{\text{berechnet}}$ und vergleichen diese mit der gemeldeten ϕ_{gemeldet} . Ist $|\phi_{\text{berechnet}} - \phi_{\text{gemeldet}}|$ größer als ein Wert E, so wird ϕ_{gemeldet} eliminiert und durch $\phi_{\text{berechnet}}$ ersetzt. Die Autoren geben für E folgende Erfahrungswerte an:

| | |
|------------------------|----------|
| zwischen 100 und 70 mb | 35 gpm |
| 70 und 50 mb | 35 gpm |
| 50 und 30 mb | 50 gpm |
| 30 und 20 mb | 40 gpm |
| 20 und 10 mb | 65 gpm . |

Die Kontinuität des Windprofils wird gecheckt, indem die Winde benachbarter Flächen miteinander verglichen werden. Auch hier darf die Differenz beider einen vorge-

gebenen Wert nicht überschreiten. So darf nach HAUG/19/ die Windgeschwindigkeit des 850 mb-Niveaus mit der in 700 mb nicht um mehr als 25 m/s differieren. Die entsprechenden Zahlen für die anderen Flächen lauten

| | |
|----------------|----------|
| 700 und 500 mb | 30 m/s |
| 500 und 300 mb | 45 m/s |
| 300 und 200 mb | 45 m/s . |

FINGER, WOOLF u. ANDERSON/13/ geben für die Stratosphäre die folgenden maximalen Windscherungen an:

| Schichtdicke [gpm] | getestete Winde [m/s] | | | | | |
|-----------------------|-----------------------|------|-------|------|---------|------|
| | 0-10 | | 11-30 | | über 30 | |
| | dd | ff | dd | ff | dd | ff |
| 600 | keine | 7,5 | 20 | 10,0 | 20 | 12,5 |
| 1500 | keine | 10,0 | 30 | 15,0 | 20 | 20,0 |
| 3000 | keine | 15,0 | 40 | 20,0 | 30 | 25,0 |
| 4500 | keine | 17,5 | 40 | 22,5 | 30 | 27,5 |
| 6000 | keine | 20,0 | 50 | 25,0 | 30 | 30,0 |

dabei ist die Tabelle wie folgt zu verstehen:

Beträgt z.B. die Geschwindigkeit eines Windes in einem gegebenen Niveau zwischen 11 und 30 m/s, wird seine Eliminierung vorgenommen, wenn er sich von den nächsten Winden innerhalb einer 1500 gpm dicken Schicht um mehr als 30^o in der Richtung und 15 m/s in der Geschwindigkeit unterscheidet.

Winddaten, die zu größeren Diskrepanzen führen, werden als fragwürdig angesehen.

Ein Fehler in der Konsistenz des Windgeschwindigkeitsprofils ist laut HINKELMANN/20/ zu erwarten, wenn das Verhältnis der Geschwindigkeiten (ff) benachbarter Flächen größer 2 oder kleiner 0,5 ist. Welche der beiden fehlerhaft ist, $(ff)_n$ oder $(ff)_{n+1}$, entscheidet der Vergleich zwischen $(ff)_n$ und $(ff)_{n-1}$ und zwischen $(ff)_{n+1}$ und $(ff)_{n+2}$. Angenommen $(ff)_n$ werde als falsch identifiziert,

dann wird diese eliminiert und durch $[(ff)_{n+1} + (ff)_{n-1}]/2$ ersetzt.

Die Kontinuitätsüberprüfung der Windrichtung (dd) und die eventuell notwendige Berichtigung wird wie für die Geschwindigkeit getätigt, allerdings mit dem Unterschied, daß der (dd)-Wert als fragwürdig angenommen wird, wenn er zwischen zwei benachbarten Niveaus über 50° variiert.

2.1.2.3.2. Horizontale Kontrolle

Eine Möglichkeit des horizontalen Checks besteht in dem Vergleich der einzelnen gemeldeten Daten mit ihren Nachbarmeldungen.

GLAHN, HOLLENBAUGH u. LOWRY/16/ benutzen dazu die zwei am nächsten zu einer zu prüfenden Meldung f_0 gelegenen Beobachtungen f_{0i} ($i=1,2$). Sie bilden die Differenzen zwischen der Meldung f_0 und den Beobachtungen f_{0i} . Die Messung f_0 wird als fraglich angesehen, wenn $|f_0 - f_{0i}|$ einen Wert ER überschreitet

$$|f_0 - f_{0i}| > ER_2 \text{ für } d \leq 1 \quad (3)$$

oder

$$\frac{|f_0 - f_{0i}|}{d} > ER_3 \text{ für } d > 1, \quad (3a)$$

wobei d der Abstand der betrachteten Stationen in Gittereinheiten ist. Der Meßwert f_0 wird eliminiert, wenn die Differenzen sowohl mit f_{01} als auch mit f_{02} größer ER_2 bzw. ER_3 sind.

GLAHN, HOLLENBAUGH u. LOWRY/16/ verwenden diesen Datencheck in einer objektiven Analyse, bei der ein Anfangsfeld mit Hilfe der eingegangenen Messungen korrigiert wird (Korrektionsmethode s. 4.2.).

Wird nun f_o nur über eine Beobachtung f_{oi} als fragwürdig angezeigt, so entscheidet ein zweites Kriterium darüber, ob die Meldung f_o gebraucht werden kann. Es wird f_o mit dem Wert f^o des Anfangsfeldes am Beobachtungsort verglichen. Die Messung f_o wird für die objektive Analyse verwendbar, falls

$$\left| f_o - f^o \right| \leq ER_1 \quad (4)$$

gilt.

Die Autoren geben für ER_1 , ER_2 und ER_3 bei einer Bodendruckanalyse nachfolgende Werte an (ER_2 und ER_3 sind Funktionen des herrschenden Druckes): ER_1 beträgt 14 mb;

| ungefährer Druck a.d. Station [mb] | ER_2 [mb] | ER_3 [mb/Gittereinh.] |
|---------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 945- 955 | 17 | 17 |
| 955- 965 | 16 | 16 |
| 965- 975 | 15 | 15 |
| 975- 985 | 14 | 14 |
| 985- 995 | 13 | 13 |
| 995-1005 | 11 | 11 |
| 1005-1015 | 9 | 9 |
| 1015-1025 | 7 | 7 |
| 1025-1035 | 5 | 5 |
| 1035-1045 | 3 | 3 |
| 1045-1055 | 3 | 3 |
| 1055-1065 | 2 | 2 |
| 1065-1075 | 2 | 2 |

Häufig werden bis zu einer fertigen Analyse v-viele "Zwischenanalysen" erstellt. Die gemeldeten Daten werden dann jeweils mit den aus den Zwischenanalysen für die Beobachtungsorte analysierten Werte verglichen. Dabei wird von Mal zu Mal die erlaubte Differenz verringert. Die Meldung f_o wird eliminiert, wenn

$$\left| f_o - f^v \right| > ER \quad (5)$$

ist. GLAHN, HOLLENBAUGH u. LOWRY/16/ gebrauchen für ihre Bodendruckanalyse drei Zwischenanalysen ($v=1,2,3$) und verkleinern dabei ER wie folgt

| v | ER [mb] |
|---|---------|
| 1 | 11,6 |
| 2 | 5,0 |
| 3 | 3,0 |

Für Bodenanalysen des Druckes, der Temperatur, des Taupunktes und der Windgeschwindigkeit gibt YANAI /41/ maximale Differenzen beim Vergleich nachbarlicher Meldungen an

| p [mb] | T [°C] | T _d [°C] | v , u, v [m/s] |
|--------|--------|---------------------|----------------|
| 19,9 | 19,9 | 29,9 | 25,0 |

Werden die Daten gemäß Ungleichung (4) und (5) gecheckt, benutzt YANAI/41/ für ER₁ die Werte

| | p [mb] | T [°C] | T _d [°C] | v , u, v [m/s] |
|-----------------|--------|--------|---------------------|----------------|
| ER ₁ | 19,9 | 19,9 | 29,9 | 25,0 |

und für ER

| v | p [mb] | T [°C] | T _d [°C] | v , u, v [m/s] |
|---|--------|--------|---------------------|----------------|
| 1 | 15,0 | 15,0 | 22,5 | 19,0 |
| 2 | 9,9 | 9,9 | 15,0 | 12,5 |
| 3 | 9,9 | 9,9 | 15,0 | 12,5 |

Das von KAESTNER/24/ beschriebene, im Deutschen Wetterdienst (DWD) benutzte Prüfungsverfahren für Höhen- und Temperaturmeldungen geht von einem Vergleich zwischen den Meßwerten f_0 und einem Anfangsfeld aus. Ergeben sich Diskrepanzen, die größer einem Wert 2D sind, wird f_0 aus dem Datenmaterial aussortiert. Mit der Bedingung

$$\left| f_0 - f^0 \right| < D \quad (6)$$

(f^0 : Wert des Anfangsfeldes am Beobachtungsort) wird die Beobachtung f_0 akzeptiert. Gilt jedoch für die Differenz

$$D < |f_0 - f^0| < 2 \cdot D, \quad (7)$$

so ist ein weiteres, umfangreiches Checkverfahren notwendig, das über die Korrektheit von f_0 entscheidet. Hierzu sei auf den Artikel von KAESTNER/24/ verwiesen.

Bei der vom DWD verwendeten objektiven Analyse ergeben sich bis zur endgültigen diagnostischen Karte eine bzw. zwei Zwischenanalysen. Für den Vergleich Zwischenanalyse - Meßwerte gilt Gleiches wie mit dem Anfangsfeld. In den Ungleichungen (6) und (7) ist dann f^0 durch f^v zu ersetzen. Die Prüfgrenzen D lauten:

a) für Höhen- und Druckmeldungen

| Fläche | D | | |
|--------|-------------|------------------|--------|
| | Anfangsfeld | Zwischenanalysen | |
| | | v | |
| | | 1 | 2 |
| Boden | 35 mb | 3 mb | |
| 850 mb | 100 gpm | 35 gpm | |
| 700 mb | 60 gpm | 35 gpm | |
| 500 mb | 75 gpm | 30 gpm | |
| 300 mb | 75 gpm | 30 gpm | |
| 200 mb | 80 gpm | 35 gpm | |
| 100 mb | 100 gpm | 50 gpm | 30 gpm |
| 70 mb | 100 gpm | 50 gpm | 30 gpm |
| 50 mb | 100 gpm | 50 gpm | 30 gpm |

b) für Temperaturmeldungen

| Fläche | D | | |
|--------|-------------|------------------|------|
| | Anfangsfeld | Zwischenanalysen | |
| | | v | |
| | | 1 | 2 |
| Boden | 30 °C | 10 °C | |
| 850 mb | 15 °C | 6 °C | |
| 700 mb | 10 °C | 5 °C | |
| 500 mb | 6 °C | 3 °C | |
| 300 mb | 9 °C | 4 °C | |
| 200 mb | 9 °C | 4 °C | |
| 100 mb | 9 °C | 4 °C | 2 °C |
| 70 mb | 9 °C | 4 °C | 2 °C |
| 50 mb | 9 °C | 4 °C | 2 °C |

Während einer Geopotentialanalyse vergleichen BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/ die Geschwindigkeitskomponenten u und v des gemeldeten Windes mit denen, die sich aus der geostrophischen Berechnung nach der Geopotentialanalyse ergeben. So erscheinen ihnen Meldungen fragwürdig, bei denen eine Differenz von mehr als 15 m/s auftritt (dieser Wert gilt für das 500 mb-Niveau).

Auf Grund der vielen Varianten bei vertikalen und horizontalen Kontrollen, kann es im Rahmen dieser Arbeit nur darum gehen, einen Überblick über die verwendeten Grundprinzipien zu vermitteln. So sind auch die in den Tabellen aufgeführten Werte nur als Richtwerte zu verstehen, die eine Vorstellung über die Größenordnungen verschaffen sollen. Jedes objektive Analysenprogramm muß über ein geeignetes Datenprüfverfahren verfügen, denn es ist für die Güte der endgültigen diagnostischen Karte mit von entscheidender Bedeutung.

2.1.2.4. Erhöhung des Datenmaterials

Über Gebieten geringer Datendichte können bei der Berechnung von objektiven Analysen Schwierigkeiten auftreten. Außerdem wird eine fertige Analyse dort ungenauer als innerhalb von meßdichteren Gebieten sein. Diese beobachtungsarmen Bereiche sind bis 100 mb in der Hauptsache auf die Ozeane beschränkt, während oberhalb von 100 mb auch Meßlücken über Beobachtungsgebieten mit sonst guter Datenbesetzung vorhanden sein können.

In den Tropen ist es infolge der geringen zeitlichen Änderungen möglich, durch Hinzunahme zeitlicher Mittelwerte das Datenmaterial zu verdichten.

Mittels vertikaler Extrapolation können Beobachtungen einer Fläche auf eine andere übertragen werden. DÖÖS u. EATON/10/ beschreiben hierzu ein Verfahren. Eine

gemeldete Höhe ϕ_0 einer Druckfläche p_0 mit der Temperatur T_0 soll auf das Niveau p_1 extrapoliert werden. Die Höhe ϕ_1 der Druckfläche p_1 wird durch Integration der hydrostatischen Grundgleichung erhalten

$$\phi_1 = \phi_0 - R_d \int_{p_0}^{p_1} T \frac{dp}{p} \quad (8)$$

Indem die mittlere Temperatur zwischen p_0 und p_1 in Termen des mittleren vertikalen Temperaturgradienten γ und T_0 ausgedrückt wird, ergibt sich nach der Integration aus Gl. (8)

$$\phi_1 = \phi_0 + R_d \left[T_0 - \frac{\gamma}{2} (p_0 - p_1) \right] \log \frac{p_0}{p_1} \quad (9)$$

Hierin ist γ die einzige Unbekannte, die von DÖÖS u. EATON/10/ aus umliegenden Radiosondenaufstiegen ermittelt wird. Mit γ_i soll der vertikale Temperaturgradient der einzelnen Aufstiege bezeichnet werden. Für diese seien ϕ_0 , ϕ_1 und T_0 bekannt. Durch Einsetzen dieser Größen in Gl. (9) können die γ_i berechnet werden. Der unbekannte, mittlere vertikale Temperaturgradient γ ergibt sich als gewichtetes Mittel der γ_i

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad (10)$$

$$\text{mit } w_i = \frac{4}{d_i^8 + 10} + \frac{10}{d_i^4 + 20} + 0,1 \quad ,$$

wobei die Wichtungsfaktoren w_i Funktionen des Abstandes d_i zwischen Extrapolationsort und Radiosondenstation sind; N ist die Anzahl der benutzten Aufstiege.

FINGER, WOOLF u. ANDERSON/13/ geben Extrapolationsprozeduren für die stratosphärischen Niveaus 50, 30 und 10 mb an, wenn knapp darunter ein Radiosondenaufstieg endet. Es gilt für die Temperatur:

- a) wenn die letzten beiden gemeldeten Flächen mehr als 3 mb differieren und das letzt gemessene Niveau nicht mehr als 10 mb von einer der Hauptdruckflächen entfernt ist, wird die Temperatur von den beiden letzten gemeldeten Temperaturen linear extrapoliert;
- b) wenn die letzten beiden gemeldeten Niveaus um 3 mb oder weniger differieren und die zuletzt gemessene Fläche nicht mehr als 10 mb von einer der Hauptdruckflächen entfernt ist, wird die extrapolierte Temperatur durch Gebrauch einer konstanten Inversionsrate ($0,8 \text{ }^{\circ}\text{C}/\text{mb}$ im Sommer, $0,4 \text{ }^{\circ}\text{C}/\text{mb}$ im Winter) zwischen dem endenden und dem Analysenniveau erhalten;
- c) falls der Aufstieg in 20 mb endet, wird die 10 mb-Temperatur durch Gebrauch der in b) genannten Inversionsrate extrapoliert.

Die geopotentielle Höhe der nichtgemeldeten Flächen wird dann aus dem erweiterten Temperaturprofil über die hydrostatische Grundgleichung berechnet.

Sind in 50 und 30 mb keine Winde gemeldet worden, so wird der nächste übernommen, der innerhalb eines Bereiches von ca. 1500 m oberhalb und 3000 m unterhalb der Hauptdruckniveaus gemessen wurde. Für 10 mb wird ein Bereich von 1500 m oberhalb und 4300 m unterhalb akzeptiert.

Eine Analyse von 24 Stunden vorher kann für die Stratosphäre ebenfalls als zusätzliche Informationsquelle dienen, da in diesen Höhen nur geringe tägliche Änderungen verzeichnet werden.

Eine weitere Möglichkeit, das Datenmaterial zu vervollkommen, besteht in einer zusätzlichen Berücksichtigung der seit Anfang der siebziger Jahre begonnenen Satellitenmessungen.

Das Satelliteninfrarotspektrometer (SIRS) mißt die aufwärtsgerichtete langwellige Strahlung der Erde (im "Fensterbereich" 11μ) und der Atmosphäre (im Bereich der 15μ -CO₂-Absorptionsbande). SMITH, WOOLF u. JACOB /34/ beschreiben eine Methode, wie aus den übermittelten Strahlungswerten Temperatur-Druck-Profile hergestellt werden können, die als mittlere Radiosondenaufstiege angesehen werden können. Der Gebrauch von SIRS-Daten in der stratosphärischen synoptischen Analyse wird in einem Artikel von JOHNSON u. McINTURFF/23/ behandelt, wo auch Quellenhinweise über die Arbeitsweise des Satelliteninfrarotspektrometers zu finden sind.

2.1.2.5. Datensammlung und Dekodierung

Die in der Literatur beschriebenen Systeme zur Sammlung und Dekodierung von Daten variieren hauptsächlich in der Weise, wie die Entschlüsselung vorgenommen wird.

Eine Gruppe von Systemen sammelt nur einen bestimmten Beobachtungstyp (z.B. nur Radiosondenmessungen oder gar nur solche von Landstationen) und verarbeitet diesen. Vorteilhaft ist diese Art, wenn ein Beobachtungstyp zur Erstellung einer Analyse ausreicht. Doch sollte dieses nicht der Fall sein, müssen mehrere verschiedene Programme nacheinander angewendet werden.

Die andere, allgemeinere Systemgruppe beginnt mit dem Sortieren des gesamten Datenmaterials nach Beobachtungstypen und verarbeitet jeden Typ nach einem besonderen Teilprogramm.

Für eingehende Betrachtungen der Datenübermittlung, Sammlung und Dekodierung sei auf das Buch von BELOUSOV, GANDIN u. MASHKOVICH/3/ verwiesen, das auch weitere spezielle Literaturangaben enthält.

3. MATHEMATISCHE HILFSMITTEL UND DEFINITIONEN

3.1. UMRECHNUNG DER GEOGRAPHISCHEN LÄNGE UND BREITE IN KARTESISCHE KOORDINATEN UND UMGEKEHRT

Die zur Darstellung des atmosphärischen Geschehens benutzten Karten sind Projektionen der Erdoberfläche auf eine Ebene. Über diese Karten wird ein Gitternetz gelegt, so daß jedem Punkt (ϕ, λ) auf der Erdoberfläche ein Punkt (x, y) auf der Projektionsebene zugewiesen werden kann. Die in der Meteorologie am häufigsten gebrauchte Projektionsart ist die stereographische (Abb. 4). Sie soll deshalb im folgenden betrachtet werden.

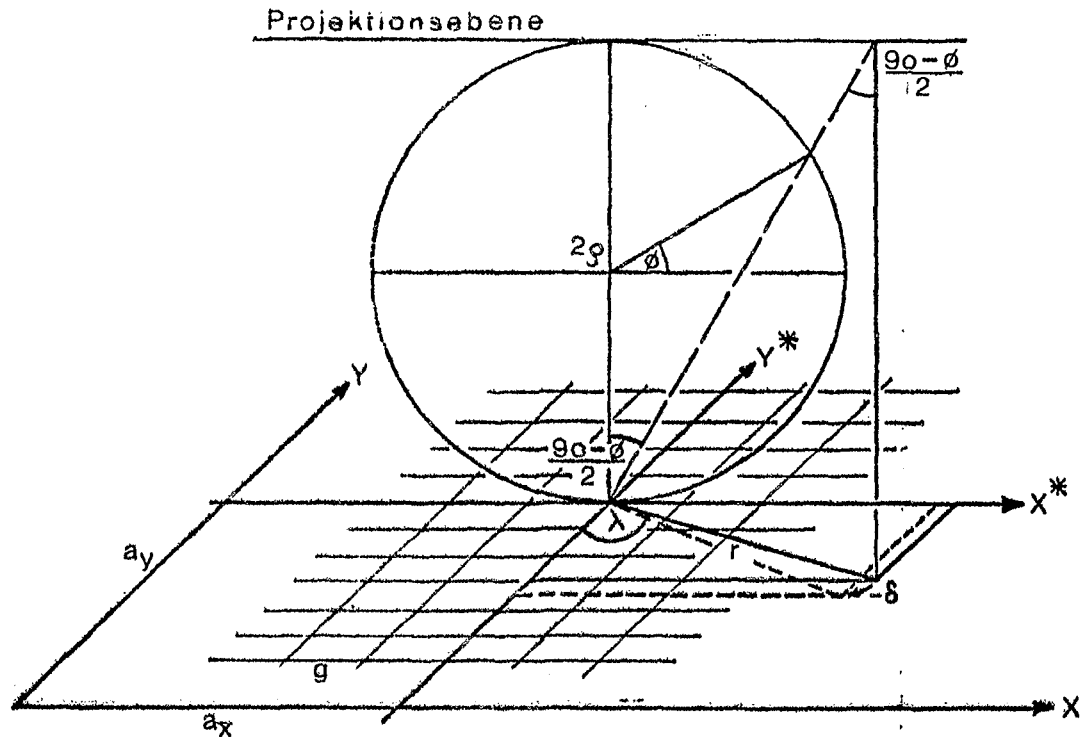


Abb. 4 Stereographische Projektion

Gemäß Abb. 4 gilt für x^* und y^*

$$x^* = \frac{r}{g} \cdot \sin \lambda \quad ; \quad y^* = \frac{r}{g} \cdot \cos \lambda \quad , \quad (1)$$

dabei ist g der Gitterabstand. Die Größe r errechnet

sich aus

$$r = 2 \rho \cdot \tan \left(\frac{90-\phi}{2} \right) \quad (2)$$

mit ρ als Erdradius. Gl. (2) in die von (1) eingesetzt, ergibt die Transformationsgleichungen

$$x^* = \frac{2\rho}{g} \cdot \tan \left(\frac{90-\phi}{2} \right) \cdot \sin \lambda \quad (3)$$

$$y^* = \frac{2\rho}{g} \cdot \tan \left(\frac{90-\phi}{2} \right) \cdot \cos \lambda. \quad (4)$$

Wird die Erdkugel um einen Winkel $(-\delta)$ um ihre Achse gedreht, so geht diese Rotation bei der Transformation bezogen auf das festgebliebene x^*, y^* -Koordinatensystem wie folgt ein

$$x^* = \frac{2\rho}{g} \cdot \tan \left(\frac{90-\phi}{2} \right) \cdot \sin (\lambda-\delta) \quad (3a)$$

$$y^* = \frac{2\rho}{g} \cdot \tan \left(\frac{90-\phi}{2} \right) \cdot \cos (\lambda-\delta) . \quad (4a)$$

Die Umrechnungsgleichungen ändern sich bei einer Translation des x^*, y^* -Systems zu

$$x = -a_x - x^* \quad (3b)$$

$$y = -a_y - y^* . \quad (4b)$$

Es ist sinnvoll, um später nur mit positiven kartesischen Koordinaten rechnen zu können, den Ursprung des x^*, y^* -Systems in die untere linke Ecke der jeweiligen Kartenprojektion zu verschieben.

Manchmal werden für eine objektive Analyse die Koordinaten der Gitterpunkte in geographischer Länge und Breite ausgedrückt benötigt. Aus

$$\tan (\lambda-\delta) = \frac{g(a_x+x)}{g(a_y+y)}$$

ergibt sich die Umrechnungsformel von kartesischen Koordinaten in die geographische Länge zu

$$\lambda = \arctan \left(\frac{a_x + x}{a_y + y} \right) + \delta . \quad (5)$$

Die Transformation in die geographische Breite folgt aus

$$\tan \left(\frac{90 - \phi}{2} \right) = \frac{r}{2\rho}$$

mit $r = g \sqrt{(a_x + x)^2 + (a_y + y)^2}$ zu

$$\phi = 90 - 2 \arctan \left(\frac{g \sqrt{(a_x + x)^2 + (a_y + y)^2}}{2\rho} \right) . \quad (6)$$

3.2. ABSTAND ZWEIER PUNKTE, MASSTABFAKTOR

Der Abstand zweier Punkte i und j wird auf einer Kartenebene durch

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (7)$$

(Einheit: Gitterlängen)

bestimmt, doch entspricht d_{ij} nicht der wirklichen Entfernung auf der Erdoberfläche, denn bei der Projektion treten Verzerrungen auf, d.h. bei einer Änderung des Urbildes ändert sich das Abbild nicht in gleichem Maße. Diese Verzerrung wird durch den Maßstabsfaktor m beschrieben, der bei der stereographischen Projektion eine Funktion der geographischen Breite ϕ ist. In der Abb. 5 wird dieser Sachverhalt veranschaulicht.

Die Strecken d_{ij} auf der Projektionsebene sind gleichgroß gewählt. Sie entsprechen unterschiedlichen Strecken d_{ij}^* auf der Erdoberfläche. Der Maßstabsfaktor ist für die stereographische Projektion definiert als

$$m = \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{90 - \phi}{2} \right)} \right) . \quad (8)$$

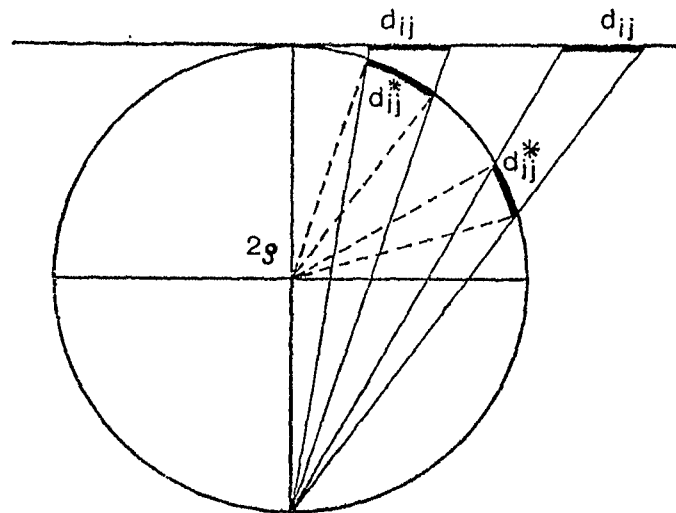


Abb. 5 Bei der stereographischen Projektion auftretende Verzerrungen

Jedem der beiden Punkte i und j ist gemäß ihrer geographischen Breitenlage ein Maßstabsfaktor m_i und m_j zuzuordnen. Um den wahren Abstand d_{ij}^* an der Erdoberfläche zu bekommen, ist d_{ij} mit dem Kehrwert von $m_{ij} = (m_i + m_j)/2$ zu multiplizieren

$$d_{ij}^* = d_{ij} / m_{ij} \quad (9)$$

Die Ergebnisse aus Gl. (9) erscheinen in Längeneinheiten, da im Maßstabsfaktor der Gitterabstand g enthalten ist.

3.3. BILINEARE INTERPOLATION ZUR BERECHNUNG EINES STATIONSWERTES AUS VIER UMLIEGENDEN GITTERWERTEN

Wenn die Werte einer meteorologischen Variablen f nur an Gitterpunkten spezifiziert sind, aber man benötigt ihren Wert auch an einem im Innern eines Gitterquadrates gelegenen Ort s (Abb. 6), kann eine Interpolation nach Gleichung

$$f_s = f_1 + \Delta x(f_2 - f_1) + \Delta y \left[(f_3 - f_1)(1 - \Delta x) + (f_4 - f_2)\Delta x \right] \quad (10)$$

vorgenommen werden, Δx und Δy in Bruchteilen der Maschengröße g (YANAI/41/).

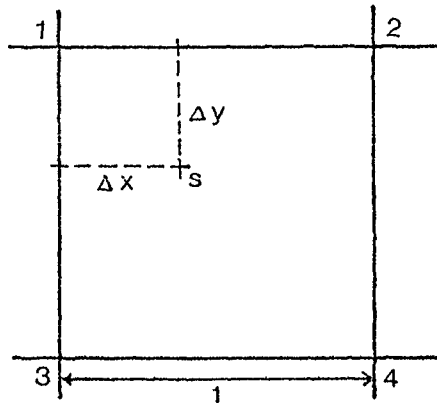


Abb. 6 Schema zur Interpolationsformel

3.4. KOVARIANZ- UND KORRELATIONSFUNKTIONEN

Bei der objektiven Analysenmethode "optimale Interpolation" (s. 4.4.) werden diese Funktionen von den Abweichungen des meteorologischen Elementes von seinem klimatologischen Mittel benötigt.

Die allgemeinste Definition einer Kovarianzfunktion ist durch

$$m_{fh}(x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2) = \overline{f'(x_1, y_1, z_1, t_1) h'(x_2, y_2, z_2, t_2)} \quad (11)$$

gegeben, wobei f und h zwei meteorologische Variable, x , y und z die Raumkoordinaten eines Punktes sind; t ist die Zeit; der Querstrich kennzeichnet die Mittelung und der Strich (') die Abweichung vom klimatologischen Mittel. Die Kovarianzfunktion stellt eine Korrelation zwischen den Werten der beiden Variablen an verschiedenen Punkten zu verschiedenen Zeiten her. Ist $f=h$, so wird (11) Autokovarianzfunktion genannt. Aus Gl. (11) ist ersichtlich, daß die Funktion von acht Argumenten abhängt, was ihr Studium schwierig werden läßt. Um die Anzahl zu reduzieren, werden räumliche ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$) und

zeitliche ($x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2, t_1 \neq t_2$) Kovarianzfunktionen unterschieden. Die ersteren können noch einmal nach "vertikalen" (zusätzlich $x_1=x_2, y_1=y_2$) und "horizontalen" (zusätzlich $z_1=z_2$) unterteilt werden.

Bei der Analyse eines meteorologischen Elementes f wird deren Verteilung in einer gegebenen Höhe z zu irgendeinem Zeitpunkt t betrachtet, d.h. man benutzt hier eine horizontale Autokovarianzfunktion

$$m_f(x_1, y_1, z, t, x_2, y_2, z, t) = \overline{f'(x_1, y_1, z, t) f'(x_2, y_2, z, t)} . \quad (12)$$

Eine weitere Reduzierung der jetzt vorhandenen vier Argumente, von denen die Funktion abhängt, wird durch Einführung der Annahme der Homogenität und Isotropie für das meteorologische Feld erreicht.

Es wird als homogen bezeichnet, wenn der Kovarianzwert der Gl. (12) für eine Verschiebung der Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) konstant bleibt, wobei der Abstand und die Richtung, die beide miteinander bilden, nicht geändert werden darf.

Für die Erfüllung der Isotropie darf bei einer Drehung der beiden Punkte um ihren Mittelpunkt ebenfalls keine Änderung im Wert der Autokovarianzfunktion eintreten. Dieses gilt jedoch nur, falls auch der Punkteabstand und die Lage des Mittelpunktes nicht variiert.

Befriedigt das Feld sowohl die Homogenität als auch die Isotropie, hängt Gl. (12) nur noch von dem Abstand d^* der beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ab.

$$m_f(d^*) = \overline{f'(x_1, y_1) f'(x_2, y_2)} . \quad (13)$$

Die sogenannte Varianz eines meteorologischen Elementes f läßt sich aus Gl. (13) ableiten, indem $x_1=x_2$ und $y_1=y_2$ gesetzt wird, also $d^*=0$ ist

$$m_f(0) = \overline{[f'(x_1, y_1)]^2} . \quad (14)$$

Mit Hilfe der beiden letztgenannten Gleichungen wird die normierte Autokovarianz- oder Autokorrelationsfunktion berechnet

$$\mu_f(d^*) = m_f(d^*)/m_f(0). \quad (15)$$

Der Gebrauch der normierten Autokovarianzfunktion gegenüber der unnormierten birgt den folgenden Vorteil: Die meisten meteorologischen Variablen ändern sich innerhalb eines Jahres in einem beträchtlichen Umfang, so daß auch die Autokovarianzfunktionen entsprechend differieren. Demgegenüber können die Autokorrelationsfunktionen in vielen Fällen als gleich zu verschiedenen Jahreszeiten betrachtet werden.

Die Berechnung der Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion geschieht wie folgt.

Als Daten dienen die Werte einer gegebenen meteorologischen Variablen f an N Beobachtungspunkten über M Beobachtungsperioden. Außerdem werden die klimatologischen Mittelwerte des Elementes f an den N Punkten benötigt.

Bei der Berechnung der Funktionen werden zunächst nur die Meldungen einer Beobachtungsperiode betrachtet. Nachdem die Abweichungen f' von den Normen an den Meßorten ermittelt worden sind, wird aus dem vorliegenden Material eine "erste" Station (x_1, y_1) ausgewählt, deren Abweichung mit sich selbst, sowie mit denen aller anderen gemeldeten Stationen $(x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ multipliziert wird

$$\begin{aligned} m_f^2(d_{11}^*) &= [f'(x_1, y_1)]^2 \\ m_f^2(d_{12}^*) &= f'(x_1, y_1) f'(x_2, y_2) \\ m_f^2(d_{13}^*) &= f'(x_1, y_1) f'(x_3, y_3) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Schlange deutet an, daß noch keine Mittelung erfolgte. Im Anschluß daran wird die "zweite" Station (x_2, y_2) hergenommen, mit der in gleicher Weise verfahren wird

$$\tilde{m}_f(d_{22}^*) = [f'(x_2, y_2)]^2$$

$$\tilde{m}_f(d_{23}^*) = f'(x_2, y_2) f'(x_3, y_3)$$

⋮

Dieses Schema wird fortgesetzt, bis jede Station mit sich selbst und mit jeder anderen einmal kombiniert worden ist.

Entsprechend diesem Muster wird das Datenmaterial der noch verbleibenden Beobachtungsperioden verarbeitet.

Parallel zu der Berechnung der $\tilde{m}_f(d_{ij}^*)$ werden die Abstände d_{ij}^* der jeweiligen Stationskombination bestimmt. Die $\tilde{m}_f(d_{ij}^*)$ -Werte werden gemäß der zu ihnen gehörenden Abstände d_{ij}^* von $d^*=0$ an fortlaufend geordnet. Die Skala der möglichen Stationsabstände wird in gleiche Abschnitte unterteilt. Es folgt die arithmetische Mittelung über die Anzahl der in den einzelnen Abschnitten liegenden Werte $\tilde{m}_f(d_{ij}^*)$. Diese gefundenen Mittelwerte entsprechen den gewünschten Werten der Autokovarianzfunktion $m_f(d^*)$. Um jetzt zu denen der Autokorrelationsfunktion $\mu_f(d^*)$ zu gelangen, werden entsprechend Gl. (15) die erhaltenen Werte $m_f(d^*)$ durch den für $d^*=0$ geteilt.

3.5. MATRIZENVERFAHREN ZUR LÖSUNG LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

Sei

$$\begin{aligned} \alpha_{11} a_1 + \alpha_{12} a_2 + \dots + \alpha_{1n} a_n &= \alpha_1 \\ \alpha_{21} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \dots + \alpha_{2n} a_n &= \alpha_2 \\ \dots & \\ \alpha_{n1} a_1 + \alpha_{n2} a_2 + \dots + \alpha_{nn} a_n &= \alpha_n \end{aligned}$$

ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem, dessen Koeffizientendeterminante ungleich Null sein soll, so daß die Unbekannten a_n eindeutig bestimmbar sind.

Das Matrizenverfahren ist eine Vereinfachung der Gaußschen Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Die erweiterte Matrix des Gleichungssystems läßt sich darstellen als

$$\left| \begin{array}{cccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \alpha_1 & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \alpha_2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \alpha_n & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccccc} \gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 & & \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & 0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} & & \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cccccc} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} & \beta_1 & \\ 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} & \beta_2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdots & \cdots & \beta_{nn} & \beta_n & \end{array} \right|.$$

Die Elemente β_{ii} der Hauptdiagonalen der Matrix "Beta" werden gleich eins gesetzt. Außerdem dürfen die γ_{ii} nicht Null werden, was man nötigenfalls durch Umordnen und Ummummern der Spalten der Matrix "Alpha" erreicht. Die γ_{ik} und β_{ik} werden aus den folgenden beiden Gleichungen ermittelt:

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik} - \gamma_{i1} \beta_{1k} - \gamma_{i2} \beta_{2k} \cdots - \gamma_{i,k-1} \beta_{k-1,k} \quad (i > k) \quad (16)$$

$$\beta_{ik} = (\alpha_{ik} - \gamma_{i1} \beta_{1k} - \gamma_{i2} \beta_{2k} \cdots - \gamma_{i,i-1} \beta_{i-1,k}) / \gamma_{ii} \quad (i < k) \quad (17)$$

Zuerst wird die erste Spalte der Matrix "Gamma" berechnet

$$\gamma_{i1} = \alpha_{i1}$$

dann die erste Zeile der Matrix "Beta"

$$\beta_{1k} = \alpha_{1k} / \gamma_{11} = \alpha_{1k} / \alpha_{11}$$

Im Anschluß daran folgt die zweite Spalte von "Gamma"

$$\gamma_{i2} = \alpha_{i2} - \gamma_{i1} \beta_{12}$$

und die zweite Zeile von "Beta"

$$\beta_{2k} = (\alpha_{2k} - \gamma_{21} \beta_{1k}) / \gamma_{22}$$

usw.. Diese Vorschrift gilt auch für die Glieder α_i und

β_i der letzten Spalte der Matrizen "Alpha" und "Beta".

Die Unbekannten a_n berechnen sich dann aus

$$a_i = \beta_i - a_n \beta_{i,n} - a_{n-1} \beta_{i,n-1} \cdots - a_{i+1} \beta_{i,i+1} \quad (18)$$

mit $i = n-1, \dots, 1$ und $a_n = \beta_n$

Detaillierte Beschreibungen des Matrizenverfahrens bzw. der Gaußschen Methode zur Lösung linearer Gleichungen sind in den Büchern von WILLERS/38/ und ZURMÜHL/42/ zu finden.

3.6. RELAXATIONSMETHODE ZUR LÖSUNG POISSONSCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Eine Poissonsche Differentialgleichung hat die Form

$$\nabla_p^2 f = F(x,y), \quad (19)$$

wobei ∇^2 der Laplace-Operator, f eine meteorologische Variable und $F(x,y)$ eine bekannte Funktion ist. Der Index p zeigt an, daß die Lösung der Differentialgleichung für f nur auf einer Druckfläche erfolgen soll. Das Relaxationsverfahren beruht auf einer endlichen Differenzenapproximation der Gl. (19).

Der Wert des Ausdruckes $\nabla_p^2 f$ kann für einen Punkt (x,y) approximativ aus $4(\bar{f} - f_{x,y})/g^2$ bestimmt werden, mit $\bar{f} = \frac{1}{4} (f_{x-1,y} + f_{x,y+1} + f_{x+1,y} + f_{x,y-1})$ und g als Gitterabstand (Abb. 7).

Mit dieser Approximation ergibt sich aus (19)

$$\bar{f} - f_{x,y} = \frac{g^2}{4} F(x,y). \quad (20)$$

Da die Werte von $F(x,y)$ an allen Punkten als bekannt vorausgesetzt werden, kann die rechte Seite von (20) berechnet werden. Um jetzt für f eine Lösung aus der oberen Differentialgleichung zu bekommen, ist es notwendig, eine möglichst genaue Näherung des zukünftigen f -Feldes zu kennen. Mit den genäherten f -Werten an den Gitterpunkten wird die

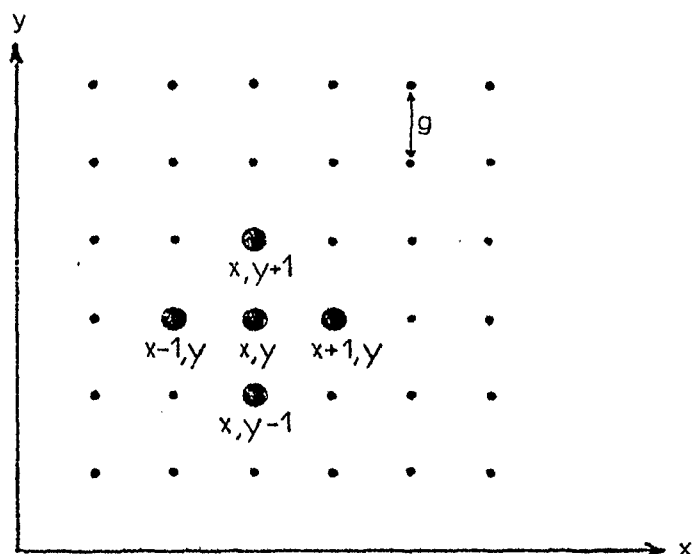


Abb. 7. Schema zur Differenzenapproximation

linke Seite der Gl. (20) bestimmt. Es wird sich eine Differenz zwischen der linken und rechten Seite einstellen

$$E(x, y) = (\bar{f} - f_{x, y}) - \frac{g^2}{4} F(x, y). \quad (21)$$

Indem E zu dem genäherten Wert $f_{x, y}$ addiert wird, kann der Fehler reduziert werden, der in dem Näherungswert steckt.

Die simultane Relaxationsmethode berechnet zuerst für alle Gitterpunkte die Differenz E aus dem Näherungsfeld von f und addiert diese dann alle "gleichzeitig" zu den entsprechenden Näherungswerten von f . So gelangt man zu einem zweiten Näherungsfeld, mit dem in gleicher Weise wie oben verfahren wird, worauf ein drittes entsteht.

Wird dieser Vorgang häufig genug vorgenommen, so wird der Fehler in den Näherungswerten von f kleiner und kleiner werden, bis das endgültige Feld die Gl. (20) mit ausreichender Genauigkeit erfüllt.

Eine andere Art der Relaxation ist die aufeinanderfolgende. Hier wird sofort, nachdem E für einen Punkt (x, y)

berechnet worden ist, die Differenz zu dem genäherten Wert $f_{x,y}$ addiert. Bei dieser E-Bestimmung werden noch korrigierte Näherungswerte mitberücksichtigt. Die in Abb. 8 eingekreisten Gitterpunkte deuten schon verbesserte Näherungswerte f^* an. Die Differenz E wird gemäß Gl. (21)

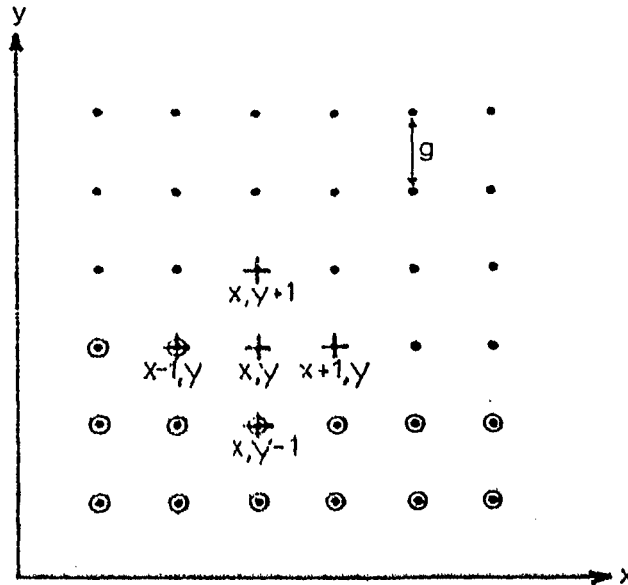


Abb. 8 Aufeinanderfolgende Relaxation

bestimmt, nur gilt für \bar{f} jetzt

$$\bar{f} = \frac{1}{4} (f_{x-1,y}^* + f_{x,y+1} + f_{x+1,y} + f_{x,y-1}^*).$$

Schematische Darstellungen der beiden Relaxationsverfahren werden in Abb. 9 und 10 gezeigt. Beschreibungen dieser Lösungsmethoden für die Poissonsche Differentialgleichung werden bei PANOFSKY/29/ und HALTNER/17/ gefunden.

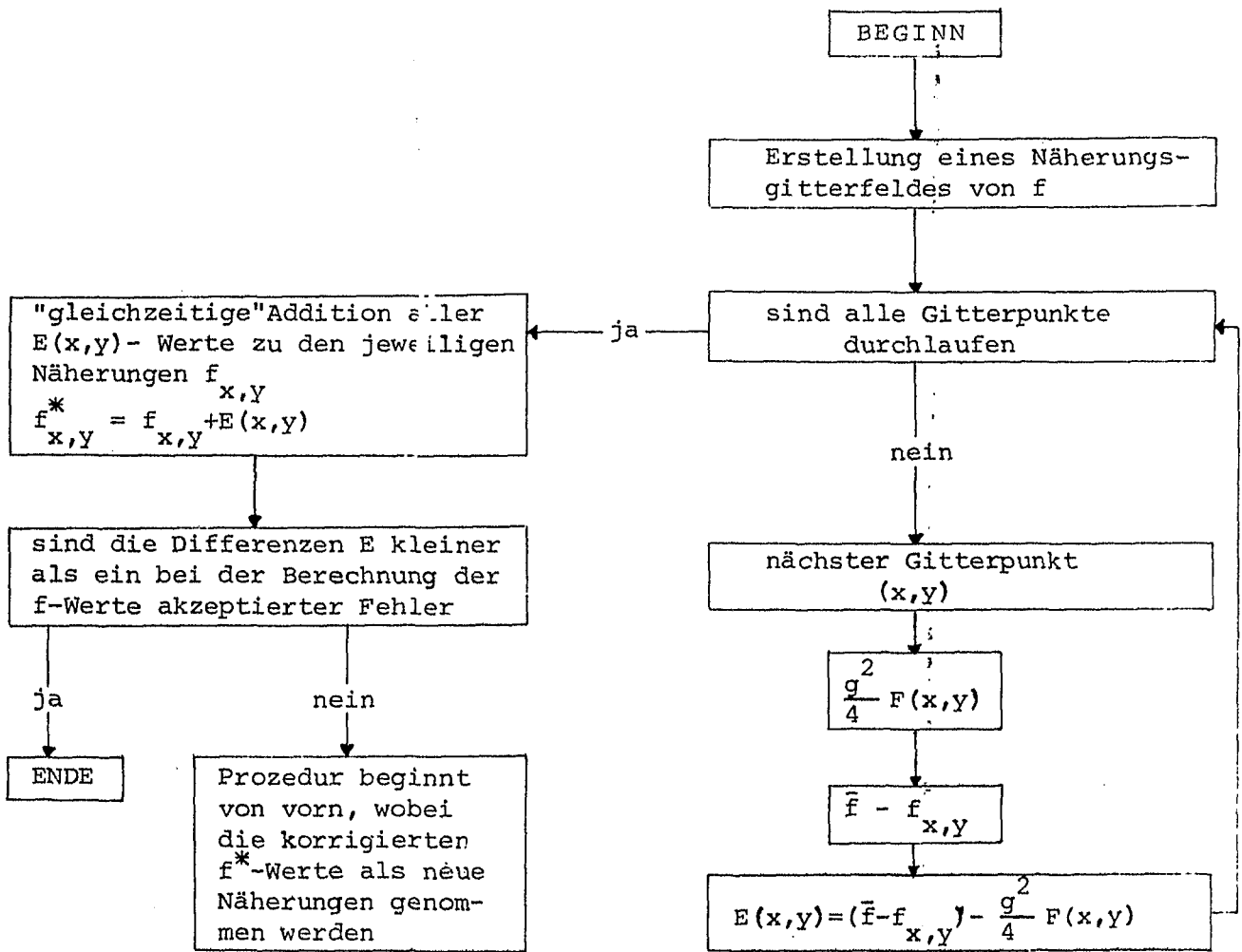


Abb. 9 Simultane Relaxation

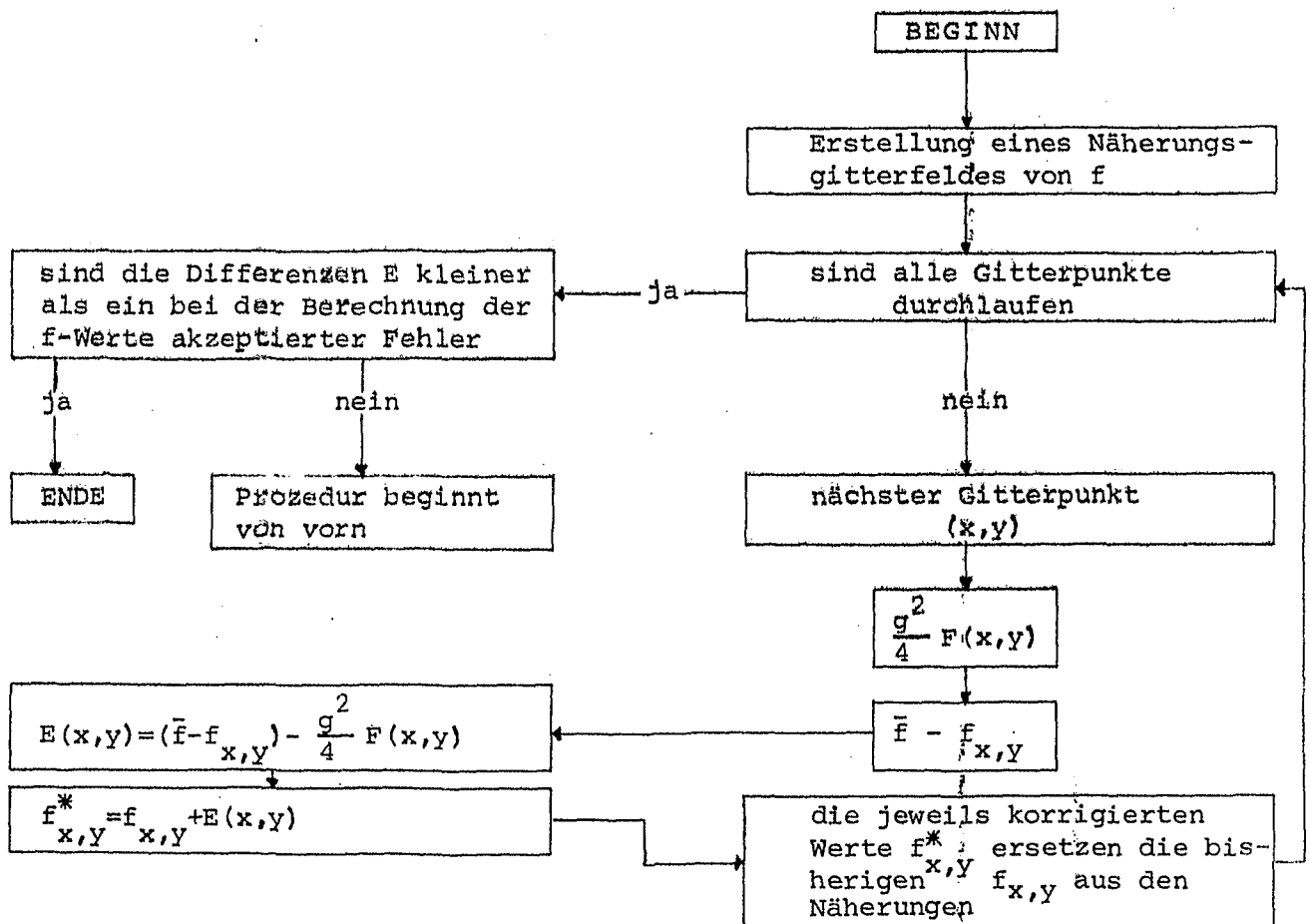


Abb. 10 Aufeinanderfolgende Relaxation

3.7. GLÄTTUNG VON ANALYSEN

Die fertige Analyse enthält häufig zahlreiche klein-skalige Störungen, die durch die kleinen Fehler in den Beobachtungen verursacht werden, die bei den Daten-checks nicht erfaßt werden. Außerdem können in einer Gitterpunktsanalyse keine Wellen mit Wellenlängen kleiner oder gleich dem doppelten Gitterpunktsabstand dargestellt werden, obwohl solche in den Meßwerten enthalten sind, so daß diese sich in einer Unregelmäßigkeit der Isolinienführung bemerkbar machen. Diesen unerwünschten, kurzwelligen Lärm aus der Analyse zu eliminieren ist die Aufgabe der Glättung. Dabei sollen die großskaligen Wellenstörungen und vor allem die bei der objektiven Analyse meist schon zu flach analysierten Hoch- und Tiefdruckgebiete unbeeinflusst bleiben.

Der DWD (s. KAESTNER/24/) benutzt einen 5-Punkte-Glättungsoperator

$$\bar{f}_{x,y} = \frac{(b-4) \cdot f_{x,y} + f_{x,y+1} + f_{x,y-1} + f_{x+1,y} + f_{x-1,y}}{b}, \quad (22)$$

wobei f der ungeglättete und \bar{f} der geglättete Gitterpunktswert ist. Mit b läßt sich die Abschwächung oder Verstärkung einer Welle bestimmter Wellenlänge variieren. In der nachfolgenden Tabelle ist die Wirkung des Operators (22) für verschiedene b auf die Amplitude einer zweidimensionalen Sinuswelle aufgezeigt. Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß beim Gebrauch des b aus der ersten Spalte sämtliche Amplituden und dabei besonders die von Wellen kleinerer Wellenlänge verstärkt werden. Für $b = +7$ tritt eine zu starke Dämpfung bei noch langwelligen Störungen ein. Der DWD benutzt eine Kombination aus beiden (dritte Spalte).

Damit die Zentren von Hoch- und Tiefdruckgebieten beim Glätten unversehrt bleiben, wird nicht an allen Gitterpunkten der Wert \bar{f} übernommen, sondern abhängig von der

Tab. 1 Amplitudenmodifikation durch Glättungsoperator (22)
für verschiedene b (nach KAESTNER/24/)

| Wellenlänge in x/y-Richtung | b=(-16) | b=+7 | b=(-16) ·7·(-16) |
|--------------------------------|---------|--------|---------------------|
| 12/12 | 1,033 | 0,926 | 0,99 |
| 8/ 8 | 1,074 | 0,834 | 0,96 |
| 6/ 6 | 1,125 | 0,714 | 0,91 |
| 4/ 4 | 1,250 | 0,429 | 0,67 |
| 3/ 3 | 1,375 | 0,143 | 0,27 |
| 2/ 2 | 1,500 | -0,143 | -0,31 |
| 12/∞ | 1,015 | 0,961 | 0,99 |
| 8/∞ | 1,037 | 0,917 | 0,99 |
| 6/∞ | 1,061 | 0,856 | 0,96 |
| 4/∞ | 1,125 | 0,71 | 0,89 |
| 3/∞ | 1,19 | 0,57 | 0,81 |
| 2/∞ | 1,25 | 0,43 | 0,67 |

Differenz $|f-\bar{f}|$ an manchen Orten der ungeglättete f oder ein Mittelwert zwischen beiden verwendet. Die Entscheidung, welcher Wert an einem Punkt für die endgültige Analyse übernommen wird, geht aus Abb. 11 hervor.

FINGER, WOOLF u. ANDERSON/13/ benutzen einen von SHUMAN /33/ entwickelten 9-Punkte-Glättungsoperator

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x,y} = & f_{x,y} + \frac{b'}{2}(1-b') (f_{x+1,y} + f_{x-1,y} + f_{x,y+1} + f_{x,y-1} - 4f_{x,y}) \\ & + \frac{b'^2}{4} (f_{x+1,y+1} + f_{x+1,y-1} + f_{x-1,y+1} + f_{x-1,y-1} - 4f_{x,y}). \end{aligned} \quad (23)$$

Dieser wird innerhalb des von ihnen gebrauchten, objektiven Analysenverfahrens mehrere Male mit $b'=0,5$ und $b'=1$ angewendet. Der bei diesem Operator eintretende Intensitätsverlust der Druckgebilde wird von den Autoren wieder ausgeglichen, indem die geglätteten Gitterpunktwerte der "endgültigen" Analyse, mit Ausnahme der Randpunkte, ersetzt werden durch

$$f_{x,y}^* = \bar{f}_{x,y} - \text{konst.} \cdot (L_{x,y})$$

$$\text{mit } L_{x,y} = \frac{1}{4} (\bar{f}_{x+2,y} + \bar{f}_{x-2,y} + \bar{f}_{x,y+2} + \bar{f}_{x,y-2}) - \bar{f}_{x,y}.$$

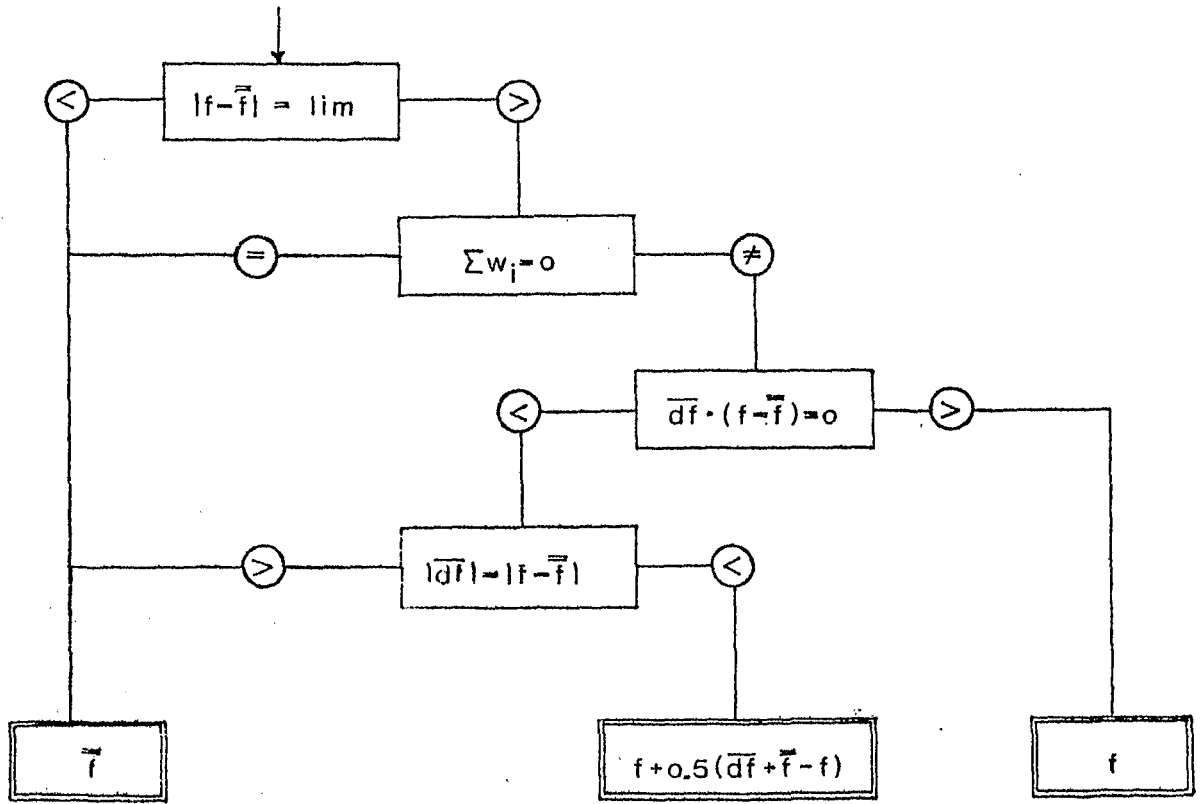


Abb. 11 Verwendung eines geglätteten Wertes (aus KÄESTNER/24/)
 (f ungeglätteter Gitterpunktwert; \bar{f} geglätteter Gitterpunktwert; $df = f_{o,stat.} - f_{stat.}$ mit $f_{o,stat.}$ beobachteter Stationswert; $f_{stat.}$ analysierter Stationswert; \bar{df} Mittelung über die Nachbarmeldungen des Gitterpunktes; w_i Gewicht der Nachbarmeldungen)

Die Konstante wurde von FINGER, WOOLF u. ANDERSON/13/ für ihre stratosphärischen Geopotentialanalysen gleich 0,21 gesetzt. Es handelt sich dabei um eine empirische Größe, die nötigenfalls zu ändern ist.

Andere Glättungsverfahren, aber in ihrer Art ähnlich den beschriebenen, sind in den Artikeln von HAUG/18/, MASUDA/27/ und CRESSMAN/8/ angegeben.

3.8. METHODEN ZUR AUSGABE DER ERGEBNISSE DER OBJEKTIVEN ANALYSE

Unter dem Ausdruck objektive Analyse versteht man im engeren Sinne nur die Berechnung von Werten an regelmäßig angeordneten Punkten mit Hilfe der unregelmäßig verteilten Beobachtungen (s. Einleitung), d.h. um zu einer fertigen, diagnostischen Karte zu gelangen, sind weitere zusätzliche Verfahren notwendig. In diesem Kapitel sollen die verschiedenen Möglichkeiten der automatischen Kartenherstellung aufgezählt und die entsprechende Literatur angegeben werden.

In /43/ wird eine von BEDIENT entwickelte Kartendarstellung diskutiert. Bei dieser werden die analysierten Gitterpunktwerte auf die Punkte eines wesentlich dichteren Gitternetzes interpoliert. Entsprechend den an diesen engeren Punkten berechneten Werten wird auf einer Karte ein bestimmtes Symbol ausgedruckt oder nicht. Verdeutlichen läßt sich diese Methode am besten an einem Beispiel. Es soll eine Analyse der 500 mb-Fläche betrachtet werden. An den Punkten, die einen Geopotentialwert zwischen 5000 und 5080 gpm besitzen, soll eine "0" ausgedruckt werden. Punkte mit Werten zwischen 5160 und 5240 werden durch die Ziffer "1" gekennzeichnet, 5320 bis 5400 mit einer "2" usw. Die Punkte, die geopotentielle Höhen zwischen diesen Intervallen besitzen, also zwischen 5080 und 5160 und 5240 und 5320 ... bekommen kein Symbol. Es ergibt sich am Ende eine Struktur auf der Karte, die der gewöhnlichen Isoliniendarstellung entspricht.

Eine Darstellung der objektiven Analyse in Isolinienform wird von WIPPERMANN/39/ erläutert. Er interpoliert die Gitterwerte auf ein neues Netz, dessen Punkte zweimal so dicht liegen. Als nächstes werden die Punkte der Gitterquadratseiten, die zu der gleichen Isolinie gehören, durch lineare Interpolation gefunden und durch gerade

Segmente verbunden. Die so erhaltenen Isolinien werden auf den Schirm einer Kathodenstrahlröhre projiziert. Um das Bild dauerhaft zu machen, wird es fotografiert.

DÖÖS u. EATON/10/ geben in ihrem Artikel eine von BRING entwickelte Methode der Kathodenstrahlabbildung an.

Eine andere Isoliniendarstellung mittels X-Y-Schreiber wird bei HINKELMANN/20/ und in /44/ und /45/ beschrieben. GANDIN/14/ und BELOUSOV, GANDIN u. MASHKOVICH/3/ behandeln die Methoden zur Ausgabe von Ergebnissen objektiver Analysen ausführlich.

4. DIE ANALYSENVERFAHREN

Grundsätzlich sind verschiedene Analysenarten zu unterscheiden. Die gebräuchlichste Form ist die sogenannte zweidimensionale, da hier das darzustellende meteorologische Element f nur eine Funktion $f=f(x,y)$ von zwei Variablen x und y ist. Für die dreidimensionale Analyse gilt entsprechend $f=f(x,y,p)$. Hierzu haben CORBY/7/, HOLMSTRÖM/21/ und DIXON, SPACKMAN, JONES u. FRANCIS/9/ Methoden entwickelt. Bei der nächsten zu unterscheidenden Analysenart, der vierdimensionalen, tritt zu den oberen drei unabhängigen Variablen noch die Zeit t , d.h. $f=f(x,y,p,t)$. Mit dieser Art haben sich KLUGE u. STAHNKE-JUNGHEIM/26/ beschäftigt.

Neben der objektiven Analyse von Horizontalverteilungen eines Elementes f ist es ebenso möglich, Vertikalschnitte der Atmosphäre objektiv zu analysieren. Näheres ist bei DUQUET, DANIENSEN u. PHARES/11/, SHAPIRO u. HASTINGS/32/ sowie DIXON, SPACKMAN, JONES u. FRANCIS/9/ zu finden.

CLARKE u. RENARD/6/ beschreiben eine über eine Analyse des Temperaturfeldes vorgenommene objektive Frontenanalyse. Ein Temperaturfeld eignet sich deshalb hierfür,

da eine Front mit einer stärkeren Temperaturänderung über einen nur kleinen Bereich hinweg verbunden ist.

Im folgenden wird sich diese Arbeit ausschließlich mit den zweidimensionalen objektiven Analysenmethoden befassen.

4.1. POLYNOMMETHODE

Dieses Verfahren wurde von PANOFSKY/28/ als überhaupt erster Beitrag zum Thema "objektive Analyse meteorologischer Felder" entwickelt. In den folgenden Jahren befaßten sich weitere Autoren wie GILCHRIST u. CRESSMAN/15/, JOHNSON/22/, BUSHBY u. HUCKLE/5/ und andere mit dieser Methode und modifizierten sie.

Bei diesem Verfahren kann mit Hilfe des Polynoms

$$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^v a_{ij} x^i y^j \quad \text{mit } 0 \leq i + j \leq v \quad (1)$$

an einem beliebigen Punkt einer durch Beobachtungen gegebenen Feldverteilung des Elementes f ein interpolierter Wert errechnet werden. So auch für die Gitterpunkte eines über das Feld gelegten Gitternetzes. Dabei sind x und y die Koordinaten der betreffenden Gitterpunkte und die a_{ij} Konstanten, die für jeden der Gitterpunkte neu zu bestimmen sind. Sie werden über die Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. Zu diesem Zweck sind mindestens $(v+1)(v+2)/2$ um den Gitterpunkt liegende Beobachtungswerte notwendig, d.h. ebenso viele wie unbekannte a_{ij} in der obigen Gl. (1) vorkommen. Da aber die Meßwerte mit Fehlern behaftet sind, ist es vorteilhaft, mehr Beobachtungen als die Mindestanzahl zu benutzen, um so den Einfluß dieser Fehler auf den interpolierten Wert möglichst klein zu halten.

Es wurde von den Autoren bei diesem objektiven Analysenverfahren bisher Polynome ersten, zweiten und dritten Grades verwandt, d.h. $v=1,2,3$.

Zur Bestimmung der Koeffizienten $a_{i,j}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate muß der Ausdruck

$$M = \sum_{s=1}^m \left[(f - f_0)^2 \right]_s = \sum_{s=1}^m \left[\left(\sum_{i,j=0}^v a_{ij} x^i y^j - f_0 \right)^2 \right]_s \quad (2)$$

minimal werden, d.h. die Differenz zwischen dem interpolierten Wert f und der Beobachtung f_0 an dem Stationsort s soll möglichst klein werden; m ist dabei die Anzahl der benutzten Meßwerte. Die mathematische Minimalbedingung fordert, daß die partiellen Ableitungen von M nach den a_{ij} Null ergeben müssen

$$\partial M / \partial a_{ij} = 0 \quad (3)$$

Dieses ergibt ein lineares Gleichungssystem mit einer Anzahl von Normalgleichungen, die der der unbekanntenen a_{ij} entspricht. Aus diesem System können mittels bekannter Lösungsmethoden (s. 3.5.) die a_{ij} eindeutig bestimmt werden. Der interpolierte Gitterpunktwert wird dadurch berechnet, daß man die ermittelten a_{ij} mit den Koordinaten des Gitterpunktes in die Gl. (1) einsetzt.

Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn der Ursprung des Koordinatensystems in dem Gitterpunkt liegt. Dann folgt nämlich aus der Gl. (1)

$$f(0,0) = a_{00} \quad (4)$$

Ebenso wie der Meteorologe bei seiner subjektiven Analyse der geopotentiellen Höhe einzelner Druckflächen die Windmessungen berücksichtigt, ist es sinnvoll, gleiches auch bei der objektiven zu tun, wodurch sich (2) wie folgt abändert

$$M = \sum_{s=1}^m \left[(\phi - \phi_0)^2 \right]_s + D^2 \sum_{s=1}^{m'} \left[(v_g - v_0)^2 \right]_s = \min \quad (2a)$$

mit $(v_g - v_0)^2 = (u_g - u_0)^2 + (v_g - v_0)^2$,

wobei neben den schon bekannten Symbolen ϕ das Geopotential,

D^2 ein relatives Gewicht zwischen den beiden Summationstermen, m' die Anzahl der benutzten Windbeobachtungen, v_g den geostrophischen und v_o den beobachteten Wind bezeichnen, u und v sind die entsprechenden Windkomponenten. Mit den geostrophischen Relationen

$$u_g = -\frac{1}{l} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v_g = \frac{1}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5)$$

(l : Coriolisparameter)

lautet (2a) ausgeschrieben

$$M = \sum_{s=1}^m \left[\left(\sum_{i,j=0}^v a_{ij} x^i y^j - \phi_o \right)^2 \right]_s + D^2 \sum_{s=1}^{m'} \left[\left(-\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i,j=0}^v a_{ij} x^i y^j \right) - u_o \right)^2 + \left(\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i,j=0}^v a_{ij} x^i y^j \right) - v_o \right)^2 \right]_s = \min.$$

Auch hier muß die Mindestanzahl von Beobachtungen gemäß dem Grad des verwendeten Polynoms gewährleistet sein. Diese ergibt sich aus der Summe der Geopotential- und Windmeßwerte, dabei ist die Windmeldung wegen ihrer Komponentenaufspaltung doppelt zu zählen.

Das Auffinden der nötigen Meßdaten kann in verschiedener Weise geschehen. GILCHRIST u. CRESSMAN/15/ und PENN, KUNKEL u. MOUNT/30/ haben quadratische bzw. kreisförmige Suchgebiete definiert, in deren Zentrum der Gitterpunkt liegt, für den die Interpolation vorgenommen werden soll. Sind in diesem Gebiet genügend Beobachtungen vorhanden, wird der Interpolationsvorgang ausgeführt; ist jedoch diese Bedingung nicht erfüllt, so wird dieser Gitterpunkt erst einmal bei der Bestimmung aller Gitterpunktwerte übersprungen und für den nächsten beginnt die Prozedur von neuem. Auf diese Art werden alle Punkte eines Gitternetzes durchlaufen. Bei einem zweiten Durchgang wird nun das Suchgebiet vergrößert und der gleiche Vorgang wiederholt sich für die bisher übergangenen Gitterpunkte.

Diese Suchroutine erfolgt so lange mit jeweils vergrößerten Gebieten, bis jeder Punkt eines Gitters einen interpolierten Wert bekommen hat.

GILCHRIST u. CRESSMAN/15/ modifizieren diesen Prozeß, indem sie bei den zweiten und folgenden Durchgängen die schon berechneten Gitterwerte, die innerhalb eines Suchgebietes liegen, zusätzlich zu den regulären Beobachtungen als sogenannte Pseudomeßwerte in die Rechnung einbeziehen.

In einem Artikel beschreiben BUSHBY u. HUCKLE/5/ eine andere Möglichkeit der Datenauffindung. Sie halten die Größe des Suchgebietes mit einem Radius, dem sogenannten Einflußradius, von ca. 1500 km konstant. Da es vorkommen kann, daß innerhalb des Gebietes weniger Beobachtungen als die Mindestanzahl zur Verfügung stehen, hilft man sich durch eine Hinzunahme von Vorhersagewerten für den zu analysierenden Kartentermin. Außerdem wird hierdurch ein Element der zeitlichen Kontinuität in die Analyse eingeführt. Dadurch erweitern sich die Gln. (2) und (2a)

$$M = \sum_{s=1}^m [(f - f_o)^2]_s + \sum_{s=1}^{m''} [(f - f_v)^2]_s = \min \quad (2b)$$

bzw.

$$M = \sum_{s=1}^m [(\phi - \phi_o)^2]_s + D^2 \sum_{s=1}^{m'} [(v_g - v_o)^2]_s + \sum_{s=1}^{m''} [(\phi - \phi_v)^2]_s = \min. \quad (2c)$$

Hierbei steht der Index V für die Vorhersagewerte und m'' ist deren benutzte Anzahl, die konstant neun beträgt; nämlich jene acht vorhergesagten Gitterwerte, die am nächsten zu dem zu bestimmenden liegen, plus dem Vorhersagewert an dem fraglichen Punkt selbst. Die Anzahl der zur Verfügung stehenden Daten berechnet sich dann aus der Zahl der Winde und der beobachteten und vorhergesagten Geopotentialwerte.

Sollten dennoch für die Bestimmung der Unbekannten a_{ij} nicht ausreichende Informationen vorhanden sein, wird der

vorhergesagte Gitterwert als "interpolierter" Wert übernommen.

Betrachtet man die Gln. (2), (2a), (2b) und (2c) und sieht sich die Verteilung der zur Berechnung der a_{ij} benutzten Beobachtungen an, so muß festgestellt werden, daß verschiedene Daten trotz verschiedener Entfernungen zum Gitterpunkt den gleichen Einfluß auf die schließlich sich ergebenden Gitterwerte haben. Um den näheren Messungen ein größeres Gewicht zu verleihen, werden Wichtungsfaktoren w eingeführt, die Funktionen des Abstandes Gitterpunkt-Beobachtung sind. So entwickelt sich die endgültige Form der Gln. (2)

$$M = \sum_{s=1}^m \left[w(f-f_0)^2 \right]_s + \sum_{s=1}^{m''} \left[w^*(f-f_V)^2 \right]_s = \min \quad (2d)$$

und

$$M = \sum_{s=1}^m \left[w(\phi-\phi_0)^2 \right]_s + D^2 \sum_{s=1}^{m'} \left[w(v_g-v_0)^2 \right]_s + \sum_{s=1}^{m''} \left[w^*(\phi-\phi_V)^2 \right]_s = \min. \quad (2e)$$

Der auftretende Faktor w^* ist ebenfalls eine Distanzwichtung und reguliert außerdem das Verhältnis der realen Meßwerte zu den benutzten Vorhersagewerten.

BUSHBY u. HUCKLE/5/ verwenden für die Wichtungsfaktoren w und w^* die folgenden Funktionen

$$w = 2^7 (1 + 2^{-33} \cdot 10^8 \cdot d^4)^{-1} \quad (6)$$

und

$$w^* = w/16, \quad (7)$$

wobei d der Abstand der meldenden Station vom Gitterpunkt, in Gitterlängen ausgedrückt ist.

Der Faktor D^2 regelt das Gewicht zwischen den Geopotential- und den Windmeßwerten und sollte bei objektiven Analysen der mittleren Atmosphäre so beschaffen sein, daß die beiden ersten Terme von (2c) gleiche Größenordnungen erhalten,

da sonst bei starken Differenzen der kleinere durch den Prozeß der kleinsten Quadrate ignoriert werden würde. D^2 ist dimensionsbehaftet, um gleiche Dimensionen in den beiden Termen zu bekommen und wird durch das Experiment bestimmt (JOHNSON/22/). Bei Analysen bodennaher Luftschichten ist durch die größere Abweichung der Windbeobachtungen von der geostrophischen Approximation der Wichtungsfaktor D^2 zu verringern.

PENN, KUNKEL u. MOUNT/30/ setzen für den Wichtungsfaktor w an

$$w = (R^2 - d^2)/(R^2 + d^2) \quad (8)$$

mit R als äußerem Radius des Suchgebietes und d als Abstand der Beobachtungsstation von dem Gitterpunkt, beides in Gittereinheiten.

Bei der Analyse von 100 mb-Karten führt WOODROFFE/40/ Änderungen bei einigen Analysenparametern ein. So sind in diesen Höhen die Geopotentialwerte als wesentlich ungenauer als die Windmeldungen zu betrachten, so daß im allgemeinen den Windmessungen mehr Vertrauen zu schenken ist, was sich in einer Erhöhung des D^2 -wertes ausdrückt.

Da Änderungen des Geopotentialfeldes in diesem Niveau nur sehr langsam vorsichgehen, benutzt der Autor in dem dritten Term der Gl. (2e) keine Vorhersagewerte, sondern verwendet stattdessen eine Analyse der 100 mb-Fläche von zwölf Stunden vorher. Aus dem gleichen Grund wird der Wichtungsfaktor w^* zu größerem Einfluß hin abgeändert

$$w^* = w/8. \quad (9)$$

Bei einer Analyse der Wolkenhöhe h beziehen PENN, KUNKEL und MOUNT/30/ die Frage nach dem Anwendungsbereich der hergestellten Karte ein, d.h., daß zum Beispiel in diesem Fall die Analyse für den Gebrauch an Flugplätzen möglichst geringe Fehler bei tiefen Wolkenhöhen aufweisen soll, da

diese Fehler für das Starten und Landen von Flugzeugen kritischer sind als größere Fehler bei hohen Wolkenhöhen. Genau dieses erreichen die Autoren, indem sie statt der Gl. (2) folgenden Ausdruck verwenden

$$M = \sum_{s=1}^m \left[w \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right)^2 \right]_s = \min.$$

Abb. 12 zeigt schematisch das Vorgehen bei der Erstellung einer objektiven Analyse mittels der Polynommethode nach dem von PENN, KUNKEL u. MOUNT/30/ und GILCHRIST u. CRESSMAN/15/ vorgeschlagenen System (vgl. dazu §. 42). Die Mindestanzahl der im Suchgebiet vorhandenen Beobachtungen muß größer oder gleich $(v+1)(v+2)/2$ sein (s.S. 40). Mit den Koordinaten und den Beobachtungen der gefundenen Stationen wird die erweiterte Matrix des Gleichungssystems (3) zahlenmäßig bestimmt, aus der dann nach dem Matrizenverfahren (s. 3.5.) die Unbekannten a_{ij} berechnet werden.

Als Beispiel für eine erweiterte Matrix soll eine Analyse mit einem Polynom ersten Grades vorgenommen werden. Das Gleichungssystem ergäbe sich aus der Gl. (2) mit dem Wichtungsfaktor w und der Bedingung (3)

$$\begin{aligned} a_{00}[w] + a_{10}[wx] + a_{01}[wy] &= [wf_0] \\ a_{00}[wx] + a_{10}[wx^2] + a_{01}[wxy] &= [wxf_0] \\ a_{00}[wy] + a_{10}[wxy] + a_{01}[wy^2] &= [wyf_0] \end{aligned}$$

mit $[] = \sum_{s=1}^m []_s$. Die Mindestanzahl an Beobachtungen muß in diesem Beispiel drei betragen. Nach Einsetzen der Koordinaten und Meßdaten sowie deren Wichtungsfaktoren (s.S. 45 u. 3.2.) lautet die erweiterte Matrix

$$\begin{vmatrix} w_1 + w_2 + w_3 & w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 & w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 & w_1 f_{01} + w_2 f_{02} + w_3 f_{03} \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 & w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2 & w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + w_3 x_3 y_3 & w_1 x_1 f_{01} + w_2 x_2 f_{02} + w_3 x_3 f_{03} \\ w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 & w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + w_3 x_3 y_3 & w_1 y_1^2 + w_2 y_2^2 + w_3 y_3^2 & w_1 y_1 f_{01} + w_2 y_2 f_{02} + w_3 y_3 f_{03} \end{vmatrix}$$

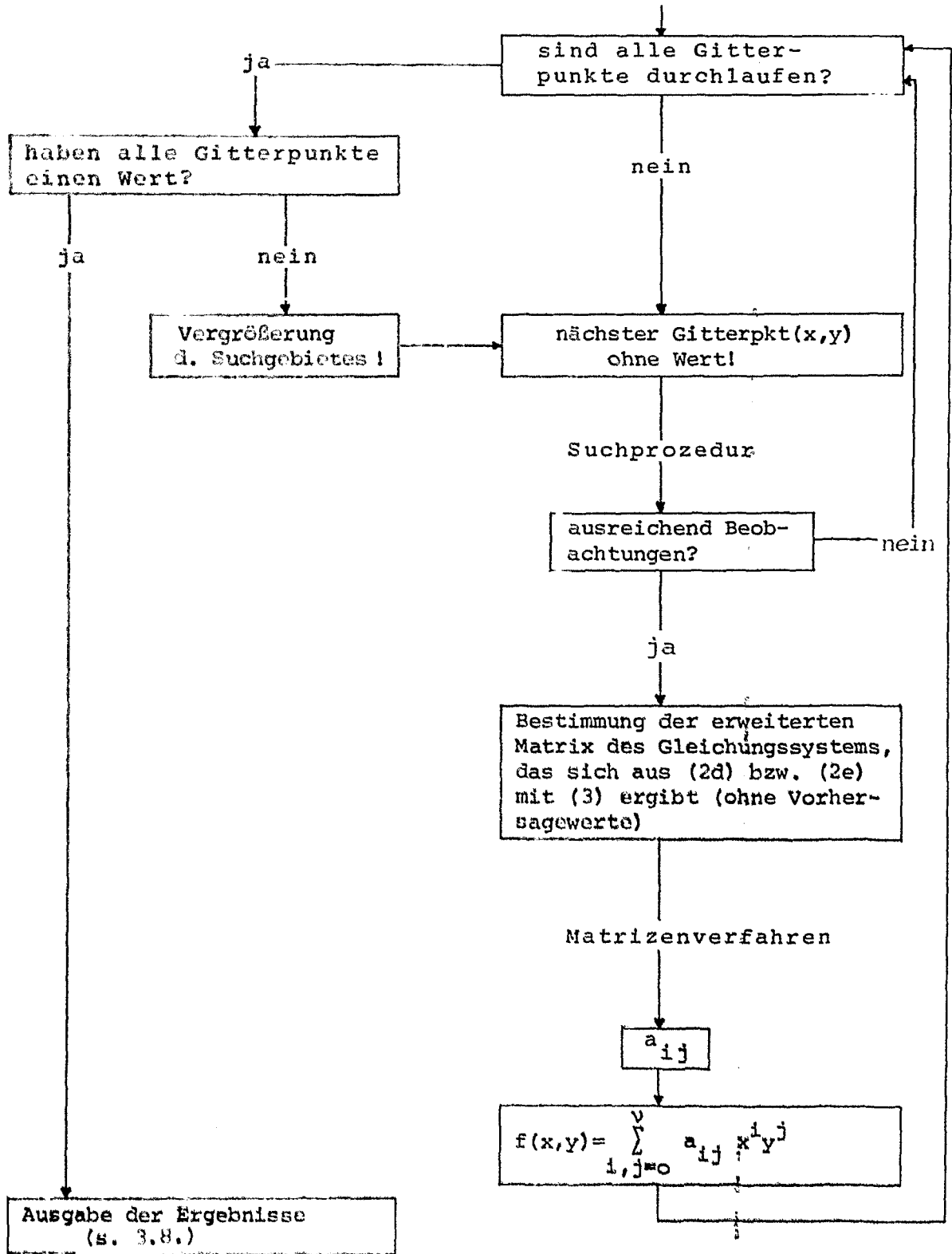


Abb. 13 Schematische Darstellung der Berechnung der Gitterwerte mittels der Polynommethode nach PENN, KUNKEL u. MOUNT/30/ und GILCHRIST u. CRFSSMAN/15/

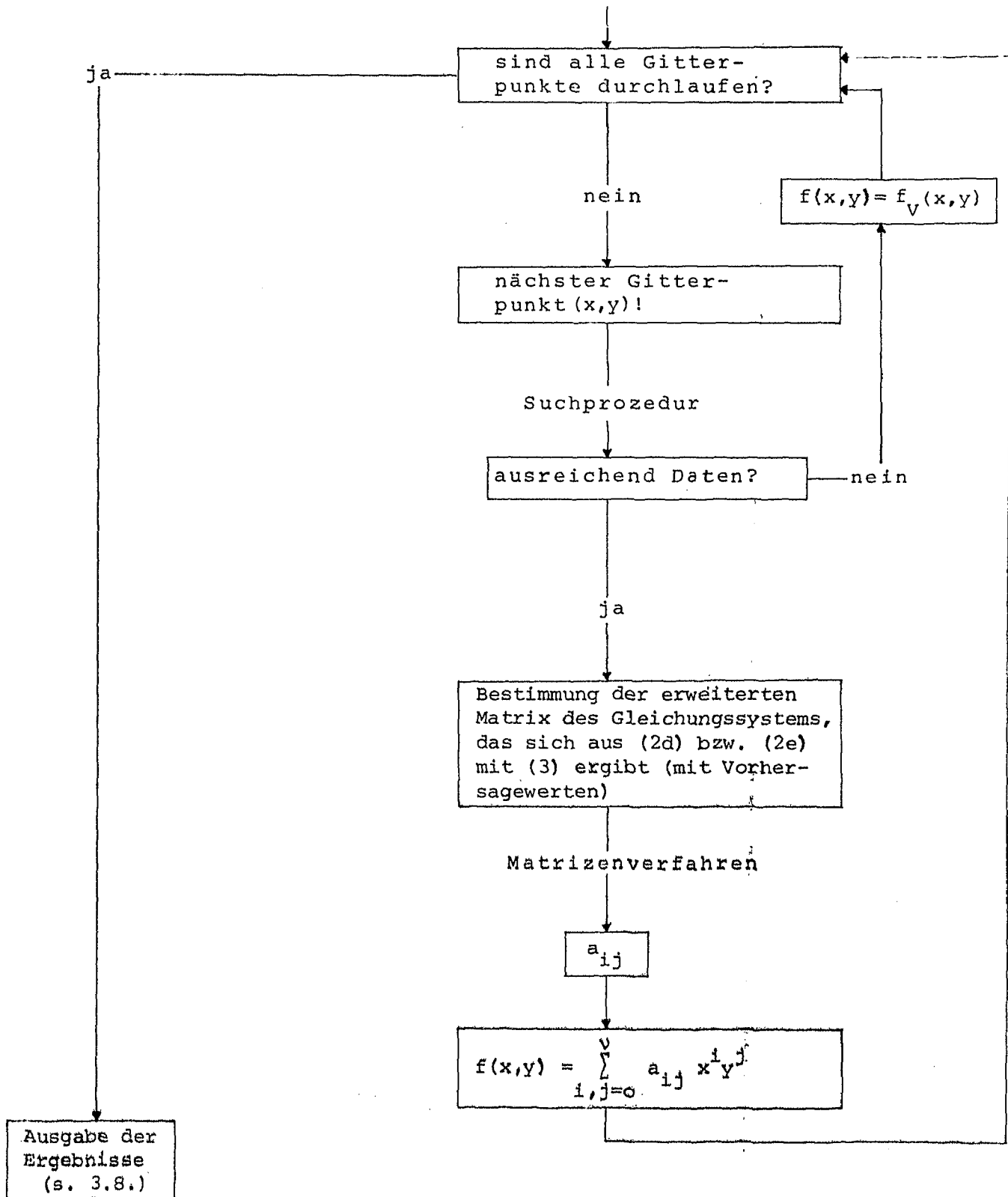


Abb. 13 Schematische Darstellung zur Berechnung der Gitterwerte mittels der Polynommethode nach BUSHBY u. HUCKLE/5/

Das von BUSHBY u. HUCKLE/5/ verwendete Verfahren wird in Abb. 13 gezeigt (vgl. dazu S. 43). Die Unterschiede zu dem vorhergehenden sind, daß die Autoren die Größe des Suchgebietes konstant halten, Vorhersagewerte zusätzlich zu den regulären Beobachtungen benutzen und falls einmal nicht genügend Informationsmaterial zur Bestimmung der a_{ij} für einen Gitterpunkt vorliegt, den vorhergesagten Wert an diesem Punkt übernehmen.

4.2. KORREKTIONSMETHODE

Das Prinzip dieses Verfahrens besteht darin, eine zu Beginn der Analyse zu bestimmende Anfangsfeldverteilung f^0 der meteorologischen Variablen f mittels der Beobachtungswerte f_0 zu korrigieren. Diese Anfangsnäherung nimmt innerhalb des gesamten Analysensystems eine wichtige Position ein, da mit ihr die Güte der fertigen Analyse, besonders in Gebieten mit wenigen oder überhaupt keinen Messungen, entscheidend mitbeeinflusst wird.

4.2.1. Nach BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/

Sie haben mit der Korrektionsmethode eine objektive Analyse des Geopotentials vorgenommen.

Die Werte der Anfangsnäherung wurden an den Schnittpunkten eines über das zu analysierende Gebiet gelegten Gitternetzes aus einem gewichteten Mittel der vorhergesagten Höhen ϕ_V und der Normalhöhen ϕ_N bestimmt. Dann ergibt sich für jeden Gitterpunkt

$$\phi^0 = \frac{w_V \phi_V + w_N \phi_N}{w_V + w_N}, \quad (10)$$

wobei $w_V = \text{const}/\epsilon_V$ und $w_N = \text{const}/\epsilon_N$ Wichtungsfaktoren sind, darin ϵ_V bzw. ϵ_N die mittlere Quadratwurzel der Abweichungen der täglichen Werte ϕ_0 von ϕ_V bzw. ϕ_N ist. Die Berechnung einer verbesserten Höhe ϕ^1 an einem Gitterpunkt erfolgt dann

durch ein gewichtetes Mittel von Höhenwerten, die über drei verschiedene Annahmen aus umliegenden Beobachtungen bestimmt werden, und der Anfangsnäherung ϕ^0 . Die drei Annahmen lauten:

- a) Die Differenz zwischen dem beobachteten Wert ϕ_{OS} und dem vorläufigen ϕ_S^0 an der Station sei gleich der zwischen einer hergeleiteten Höhe ϕ_1^1 und der vorläufigen ϕ^0 am Gitter (Abb. 14)

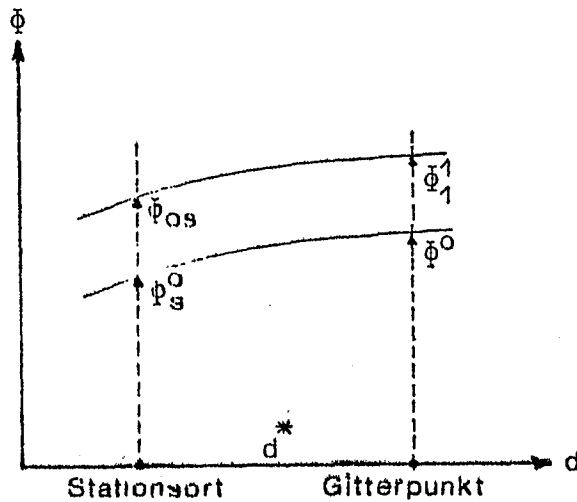


Abb. 14

$$\phi_1^1 = \phi^0 + (\phi_{OS} - \phi_S^0) ; \quad (11)$$

- b) Der beobachtete Wind sei geostrophisch und repräsentativ für das Gebiet zwischen dem Gitterpunkt und dem Beobachtungsort; dann kann aus dem Wind der Gradient von ϕ berechnet werden, woraus sich eine weitere Höhe ϕ_2^1 herleitet (Abb. 15)

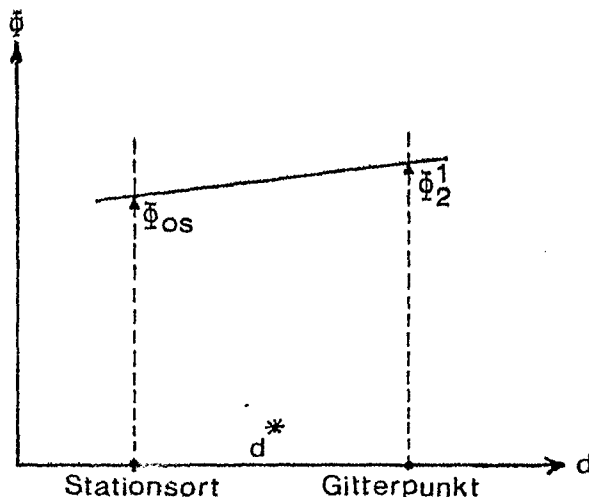


Abb. 15

$$\phi_2^1 = \phi_{OS} + \left[\frac{\partial \phi}{\partial d} \right]_{OS} \cdot d^* ; \quad (12)$$

d^* ist der Abstand zwischen Gitterpunkt und Station;
die Gl. (12) kann umgeformt werden zu

$$\phi_2^1 = \phi_{OS} + \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{OS} \Delta x^* + \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{OS} \Delta y^*$$

oder mit den geostrophischen Relationen (5)

$$\phi_2^1 = \phi_{OS} + l (v_{OS} \Delta x^* - u_{OS} \Delta y^*) , \quad (13)$$

u_{OS} und v_{OS} sind die Komponenten des beobachteten Stationswindes v_{OS} , Δx^* und Δy^* sind die Anteile des Abstandes in X- und Y-Richtung;

- c) der Gradient des Näherungsfeldes am Gitterpunkt sei repräsentativ für das Gebiet zwischen Gitterpunkt und Station (Abb. 16)

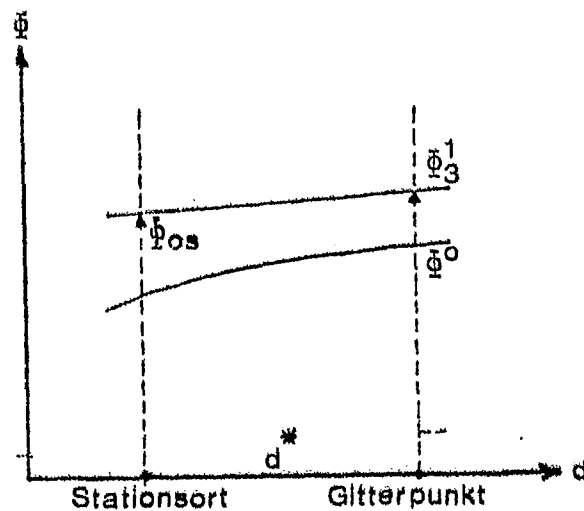


Abb. 16

$$\phi_3^1 = \phi_{OS} + \left[\frac{\partial \phi}{\partial d} \right]^0 \cdot d^* . \quad (14)$$

In der Gl. (11) soll eine Differenz zwischen dem vorläufigen Wert ϕ_S^0 und der Messung ϕ_{OS} an der Station bestimmt werden. Da das Näherungsfeld nur an den Gitterpunkten spezi-

fiziert ist, muß eine Interpolation der Gitterwerte ϕ^0 auf den Beobachtungsort erfolgen (s. 3.3.).

Die benutzten Meßdaten liegen innerhalb eines Einzugsgebietes um den zu verbessernden Gitterpunkt und mit Hilfe von Distanzwichtungsfaktoren wird ihr Einfluß auf die Gesamtkorrektur des Anfangsfeldes reguliert. Die korrigierte Höhe ϕ^1 an einem Gitterpunkt wird nach der Gleichung

$$\phi^1 = \frac{w_V \phi_V + w_N \phi_N + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} (w_1 \phi_1^1 + w_2 \phi_2^1 + w_3 \phi_3^1)_i + \sum_{j=1}^{m'} \frac{1}{\tau_j} (w_H \phi_H)_j}{w_V + w_N + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i} (w_1 + w_2 + w_3)_i + \sum_{j=1}^{m'} \frac{1}{\tau_j} (w_H)_j} \quad (15)$$

erhalten. Im ersten Summationsterm ist m die Anzahl der Stationen, die innerhalb eines Radius von drei Gittereinheiten um den Gitterpunkt Winde und Höhen gemessen haben, während im zweiten nur die erfaßt werden, die nur die Höhe gemeldet haben oder soweit ($>$ drei Gittereinheiten) entfernt liegen, daß nur das Geopotential von Bedeutung ist, da die dort gemessenen Winde keinen Informationswert mehr für die Korrektur besitzen. Dabei wird ϕ_H gemäß Gl. (11) berechnet.

Die Distanzwichtungsfaktoren w wurden von BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/ empirisch bestimmt

$$w_1 = \frac{30}{d^4 + 150} - 0,04, \quad (16)$$

$$w_2 = w_3 = \frac{27}{d^8 + 70}, \quad (17)$$

$$w_H = \frac{2,25}{d^8 + 5} + \frac{10}{d^4 + 20} - 0,01 \quad (18)$$

mit d als Abstand Gitterpunkt-Beobachtungsort in Gittereinheiten. Der Wichtungsfaktor w_H wurde größer als w_1 gewählt, da ϕ_H der einzige Beitrag einer Station ist. Für Höhenmeldungen, die weiter als fünf Gittereinheiten entfernt liegen, wird w_H sehr klein, so daß diese nur noch

einen geringen Einfluß auf die Korrektur hätten. Deshalb wird die zweite Summation auf Beobachtungen beschränkt, für die der Abstand weniger als fünf Einheiten beträgt.

Einige Stationen können sehr geschlossen beieinander liegen und so Beiträge liefern, die stark korreliert sind, während andere, entferntere es mehr oder weniger nicht sind. Aus diesem Grunde wird ein Faktor $1/\tau_{i,j}$ eingeführt, der das Gewicht der Beiträge einer Station invers proportional zu der sie umgebenden Stationsdichte vermindert. So ist $\tau_{i,j}$ die Anzahl der Beobachtungen, die innerhalb eines Radius von ungefähr 375 km um eine Station herum vorhanden sind, wobei die Station selbst mitgezählt wird.

Wenn mittels Gl. (15) die Werte ϕ^1 nacheinander an allen Punkten eines Gitternetzes bestimmt worden sind, so kann ein zweiter Korrektionslauf erfolgen, bei dem die Ergebnisse ϕ^1 des ersteren als neue Anfangsnäherung benutzt werden.

Das von BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/ beschriebene Verfahren ließe sich auf andere Analysengrößen f übertragen, indem der erste Summationsterm aus Gl. (15) weggelassen werden würde. Der Wichtungsfaktor w_H sollte aus obigen Gründen beibehalten werden. Außerdem müßte die Anfangsnäherung geändert werden, da für die wenigsten meteorologischen Elemente f eine Vorhersage gemacht wird und die Normalwerte allein eine zu ungenaue Anfangsfeldverteilung sein würde, mit Ausnahme für die Tropen, da hier nur geringe Schwankungen vom Mittelwert zu verzeichnen sind. Formal würde sich dann der korrigierte Wert an einem Gitterpunkt ergeben aus

$$f^1 = \frac{w\phi^0 + \sum_{j=1}^{m'} \frac{1}{\tau_j} (w_H f_H)_j}{w + \sum_{j=1}^{m'} \frac{1}{\tau_j} (w_H)_j} \quad (19)$$

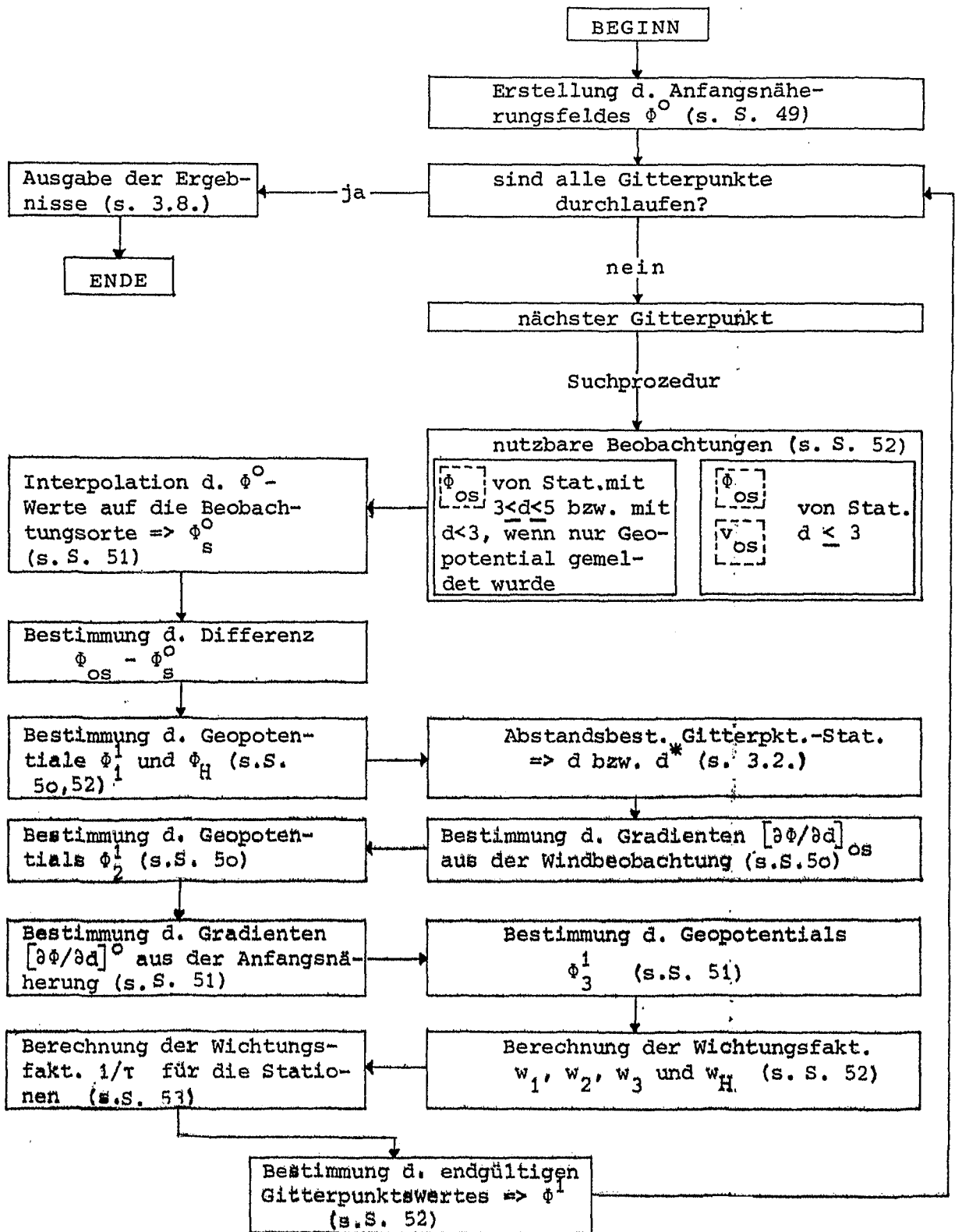


Abb. 17 Schema zur Erstellung einer objektiven Geopotentialanalyse nach der von BERGTHORSSON u. DÜÖS/4/ beschriebenen Methode (Erläuterungen sind aus dem Text entsprechend den Seiten- und Kapitelangaben zu entnehmen)

dabei ist ϕ^0 die mit w gewichtete Anfangsnäherung, alle anderen Symbole wie geübt.

Abb. 17 zeigt eine schematische Darstellung der beschriebenen Methode für einen Korrektionslauf.

4.2.2. Nach CRESSMAN/8/

Während BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/ (vgl. 4.2.1.) die Korrektur der Anfangsnäherung durch ein gewichtetes Mittel verschieden abgeleiteter Höhenwerte anbringen, bestimmt CRESSMAN/8/ in seiner Arbeit einen gewichtet gemittelten Korrekturwert, der zu der Näherung addiert wird. Das im DWD benutzte Analysenverfahren, das in einer Weiterentwicklung von KAESTNER/24/ beschrieben wird, basiert auf dieser von CRESSMAN/8/ modifizierten Korrektionsmethode.

Mit dem zu beschreibenden Verfahren werden beim DWD routinemäßige Geopotentialanalysen bis hinauf zur 50 mb-Fläche hergestellt. Hierzu sind bis zur endgültigen Analyse zwei bzw. oberhalb 200 mb drei Korrektionsläufer (Iterationen) notwendig. Außerdem werden natürlich mit diesem System auch andere meteorologische Variable analysiert, doch sollen zunächst die Geopotentialanalysen betrachtet werden. Aus einer für einen Gitterpunkt angegebenen Anfangs- bzw. nach v Iterationen v -ten Näherung ϕ^v wird die nächste ϕ^{v+1}

$$\phi^{v+1} = \phi^v + \frac{G \sum_{l=1}^m w_l C_l^H + G' \sum_{j=1}^{m'} w_j C_j^{HW} + G'' \sum_{k=1}^{m''} w_k C_k^{PS}}{G \sum_{l=1}^m w_l + G' \sum_{j=1}^{m'} w_j + G'' \sum_{k=1}^{m''} w_k} \quad (20)$$

gefunden. Im folgenden sollen die einzelnen Korrekturterme C , die Wichtungsfaktoren w , G , G' , G'' und die Summationen näher erläutert werden.

Das Symbol H in C^H deutet an, daß sich dieser Term nur

mit einer Korrektur auf Grund der vorhandenen Höhenmeldungen befaßt. Dazu wird von der gleichen Annahme ausgegangen, die von BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/ gemacht worden ist (vgl. 4.2.1. Annahme a.)

$$C^H = \phi^{v+1} - \phi^v = \phi_{OS} - \phi_S^v, \quad (21)$$

wobei ϕ_S^v ebenfalls durch eine Interpolation der Näherungsgitterwerte ϕ^v auf den Stationsort bestimmt werden muß.

Die bei der Geopotentialanalyse verwendeten Windmeldungen gehen in den Korrekturterm C^{HW} ein, der außerdem noch einmal die Höhendaten der Beobachtungsstationen berücksichtigt, die auch Winde gemeldet haben. Nach der Gleichung für die Geostrophie wird aus den Windbeobachtungen der dazugehörige Gradient berechnet und zur Verbesserung des Gradienten der Näherung ϕ^v benutzt. Die Näherung ϕ^v an einem Gitterpunkt kann durch

$$\phi^v = \phi_S^v - [\partial\phi/\partial d]^v \cdot d^*$$

dargestellt werden und in ähnlicher Weise die darauffolgende ϕ^{v+1}

$$\phi^{v+1} = \phi_{OS} - [\partial\phi/\partial d]_{OS} \cdot d^* .$$

Mit den letzten beiden Gleichungen ergibt sich also für die Korrektur C^{HW}

$$C^{HW} = \phi^{v+1} - \phi^v = (\phi_{OS} - \phi_S^v) - \left(\left[\frac{\partial\phi}{\partial d} \right]_{OS} - \left[\frac{\partial\phi}{\partial d} \right]^v \right) \cdot d^* . \quad (22)$$

Die zur Verbesserung verwendeten Meßdaten liegen innerhalb eines Einflußkreises um den Gitterpunkt und die aus ihnen resultierenden Korrekturen werden nach der Entfernung zwischen Beobachtungsort und Gitterpunkt gewichtet (s.S. 58).

Stationen, die nur das Geopotential gemeldet haben, werden in der Summe über i der Gl. (20) erfaßt, die anderen mit Wind- und Höhenmeldungen in dem zweiten Term über j

und deren Höhenbeobachtungen noch einmal über i . Sollte nur der Wind am Meßort bekannt sein, so wird dieser ebenfalls in die Summation über j mit der Annahme einbezogen, daß die Näherung an dem Beobachtungsort richtig, also $(\phi_{OS} - \phi_S^V) = 0$ ist. Die m und m' geben jeweils die Anzahl der benutzten Stationen an.

Bei der Ausführung der Analyse wird nun so vorgegangen, daß in einem ersten Durchgang nur diejenigen Punkte eines Gitternetzes herausgesucht werden, die eine genügend große Anzahl von Beobachtungen in ihrem Einflußkreis aufzuweisen haben. Für diese erfolgt dann eine Korrektur des Näherungswertes gemäß Gl. (20), ohne daß der letzte Term berücksichtigt wird. In dem folgenden zweiten Durchgang werden solche Gitterpunkte aufgesucht und korrigiert, die bisher nicht verbessert worden sind und jetzt innerhalb eines vergrößerten Einflußkreises ausreichend Daten besitzen. Auf diese Weise werden mehrere Durchgänge mit jeweils vergrößerten Radien für die Einflußkreise getätigt, bis jeder Gitterpunkt einmal korrigiert worden ist. Außerdem werden ab dem zweiten Durchgang schon verbesserte Gitterpunkte als Pseudobeobachtungen durch die Summe über k der Gl. (20) in der Rechnung berücksichtigt, wobei m'' deren verwendete Anzahl ist. Der Term C^{PS} wird formal nach der Gl. (21) bestimmt.

Mit Hilfe der Gewichtungsfaktoren G , G' , G'' kann den Geopotential-, Wind- und Pseudobeobachtungen unterschiedlicher Einfluß auf die Gesamtkorrektur eingeräumt werden.

KAESTNER/24/ führt einen weiteren Wichtungsfaktor ein. Hierzu bestimmt er die Streuung σ der Korrekturen C_1^H , C_j^{HW} und C_k^{PS} und läßt den reziproken Wert in die Gl. (20) eingehen, d.h. bei großen Streuungen der Korrekturterme der drei Beobachtungsarten wird ihr Einfluß gemäß der Stärke ihres Streuens reduziert.

Ausgeschrieben lautet die Gl. (2o)

$$\phi^{v+1} = \phi^v + \frac{G \frac{1}{\sigma_H} \sum_{i=1}^m w_i (\phi_{OS} - \phi_S^v)_i + G' \frac{1}{\sigma_{HW}} \sum_{j=1}^{m'} w_j \left[(\phi_{OS} - \phi_S^v)_j \cdot \left(\left[\frac{\partial \phi}{\partial d} \right]_{OS} - \left[\frac{\partial \phi}{\partial d} \right]^v \right) \cdot d^* \right]_j + G'' \cdot J \frac{1}{\sigma_{PS}} \sum_{k=1}^{m''} w_k (\phi^{v+1} - \phi^v)_k}{G \frac{1}{\sigma_H} \sum_{i=1}^m w_i + G' \frac{1}{\sigma_{HW}} \sum_{j=1}^{m'} w_j + G'' \frac{1}{\sigma_{PS}} \sum_{k=1}^{m''} w_k} \quad (20a)$$

Der Faktor J im letzten Term ist im allgemeinen gleich eins, doch sollten im ganzen Einflußgebiet nur Pseudobeobachtungen vorhanden, also die Summation über i und j gleich null sein, wird der Wert kleiner eins gewählt, damit sich die Analyse in diesem Gebiet ohne reale Daten der Näherung angleicht. Die $w_{i,j,k}$ der Gln. (2o) und (20a) sind Distanzwichtungsfaktoren, die nach

$$w = (R^2 - d^2) / (R^2 + d^2) \quad (\text{in Gittereinheiten}) \quad (23)$$

berechnet werden, wobei R der Einflußkreisradius und d der Abstand des Beobachtungsortes von dem Gitterpunkt ist.

Sind alle Punkte eines Gitters einmal verbessert worden, so wird der zweite bzw. anschließend der dritte Korrektionslauf mit den Ergebnissen des vorhergehenden als Anfangsnäherung und geänderten Einflußradien (s. Tab. 2) vorgenommen.

Tab. 2 Zwei Beispiele für die Änderung der Einflußkreisradien R
(nach KAESTNER/24/)

| 850 mb | | | | 50 mb | | | |
|-----------------|-----------|-------|-------|-----------------|-----------|-------|-------|
| Korrektionslauf | Durchgang | R_H | R_W | Korrektionslauf | Durchgang | R_H | R_W |
| 1 | 1 | 1,0 | 1,0 | 1 | 1 | 2,5 | 2,5 |
| | 2 | 1,5 | 1,5 | | 2 | 3,5 | 3,0 |
| | 3 | 2,0 | 2,0 | | 3 | 4,5 | 3,0 |
| | 4 | 2,75 | 2,75 | | 4 | 5,5 | 3,0 |
| | 5 | 3,5 | 3,0 | | 5 | 6,5 | 3,0 |
| | 6 | 4,5 | 3,0 | | 6 | 6,5 | 3,0 |
| | 7 | 5,5 | 3,0 | | | | |
| | 8 | 6,5 | 3,0 | | | | |
| 2 | 1 | 0,75 | 0,75 | 2 | 1 | 2,0 | 2,0 |
| | 2 | 1,0 | 1,0 | | 2 | 2,75 | 2,75 |
| | 3 | 1,5 | 1,5 | | 3 | 3,5 | 3,0 |
| | 4 | 2,0 | 2,0 | | 4 | 4,5 | 3,0 |
| | 5 | 3,0 | 3,0 | | 5 | 4,5 | 3,0 |
| | | | | 3 | 1 | 1,0 | 1,0 |
| | | | | | 2 | 1,5 | 1,5 |
| | | | | | 3 | 2,0 | 2,0 |
| | | | | | 4 | 3,0 | 3,0 |
| | | | | | | | |

Wie aus der Tab. 2 ersichtlich, gelten unterschiedliche Radien oberhalb drei Gittereinheiten für Höhen- und Windmeldungen. Bei der Berücksichtigung von entfernteren Windbeobachtungen wird der Bereich, für den sie repräsentativ sein sollen, zu weit, woraufhin die aus ihnen resultierenden Korrekturen unrealistisch werden können (vgl. hierzu 4.2.1.).

Das eben beschriebene Verfahren läßt sich auf andere meteorologische Elemente f wie Temperatur, Taupunkt usw. anwenden, indem der zweite Summationsterm aus Gl. (20a) weggelassen wird

$$f^{v+1} = f^v + \frac{G \frac{1}{\sigma_f} \sum_{i=1}^m w_i (f_{OS}^v - f_s^v)_i + G'' \cdot J \frac{1}{\sigma_{PS}} \sum_{k=1}^{m''} w_k (f^{v+1} - f^v)_k}{G \frac{1}{\sigma_f} \sum_{i=1}^m w_i + G'' \frac{1}{\sigma_{PS}} \sum_{k=1}^{m''} w_k} \quad (24)$$

Ebenfalls nach der von CRESSMÄN/8/ modifizierten objektiven Analysenmethode erstellten FINGER, WOOLF u. ANDERSON/13/, basierend auf einer Arbeit von TEWELES u. SNIDERO/36/, Geopotentialanalysen der Hauptdruckflächen von 100 bis 10 mb aufwärts. Die bei stratosphärischen Analysen ab 50 mb auftretende geringe Meßwertdichte wird durch geeignete Verfahren erhöht (s. 2.1.2.4.).

Bis zur fertigen Analyse benötigen die Autoren fünf Iterationen, bei denen die Gitterpunkte in einem einzigen Durchgang nacheinander korrigiert werden. Im ersten Korrektionslauf werden nur die gemeldeten Geopotentialwerte gebraucht, da in diesem Lauf der Radius des Einflußgebietes mit sechs Gittereinheiten so groß gewählt wurde, daß eine Windmeldung keinen Informationswert mehr für die Korrektur besitzt (s.o.)

$$\phi^1 = \phi^0 + w_{\max} \left(\frac{\sum_i w_i C_i^H}{\sum_i w_i} \right), \quad (25)$$

dabei ist ϕ^0 wie gehabt die Anfangsnäherung. In dieser Gleichung ist w der Distanzwichtungsfaktor nach (23) und

w_{\max} entspricht dem Gewicht der am nächsten zum Gitterpunkt gelegenen benutzten Beobachtung. Der Korrekturterm C^H wird gemäß (21) bestimmt.

Der Einflußradius, R wird in der zweiten Iteration auf $R=4,2$ Gittereinheiten verringert, so daß in dieser sowohl Höhen als auch gemeldete Winde Verwendung finden

$$\phi^2 = \phi^1 + w_{\max} \left(\frac{M \sum_i w_i C_i^H + \sum_j w_j C_j^{HW} + N \sum_k w_k C_k^W}{M \sum_i w_i + \sum_j w_j + N \sum_k w_k} \right), \quad (26)$$

wobei C^{HW} dem Ausdruck (22) entspricht. Der Term C^W berücksichtigt ausschließlich Windmeldungen und geht aus C^{HW} hervor, indem die Differenz zwischen beobachtetem Geopotential ϕ_{OS} und der auf den Meßort interpolierten Näherung ϕ_S^1 gleich Null gesetzt wird. Den Konstanten M und N werden die Werte 0,125 bzw. 0,5 zugeschrieben, was eine viermal höhere Wichtung der Wind- gegenüber den Höhendaten bedeutet. Der Grund hierfür liegt in der geringeren Fehlerhaftigkeit der Windmessungen in diesen zu analysierenden Höhen.

Während des dritten Korrektionslaufes ergibt sich ϕ^3 mit Hilfe von ϕ^2 und der gleichen Formel (26). Allerdings wurde der Radius des Einflußkreises auf drei Gittereinheiten reduziert und die Konstante N in 0,7 abgeändert.

Mit der Begründung, größeres Vertrauen in die Richtigkeit der Windmessungen setzen zu können, werden die beiden letzten Iterationen nur mit Windbeobachtungen vorgenommen

$$\phi^4 = \phi^3 + \sum_k w_k C_k^W / \sum_k w_k \quad (27)$$

und

$$\phi^5 = \phi^4 + \sum_k w_k C_k^W / m, \quad (28)$$

mit m als Anzahl der verwendeten Windmeldungen. Der Einflußradius wird von zwei im vorletzten auf 1,5 Gittereinheiten im letzten Korrektionslauf vermindert.

Außer den Geopotentialanalysen fertigen FINGER, WOOLF u. ANDERSON/13/ auch Temperaturanalysen für die stratosphärischen Druckflächen. Bis zur endgültigen Analyse werden ebenfalls fünf Korrektionsläufe benötigt, wobei nach jedem die gleiche Verringerung des Einflußradius wie oben erfolgt. Für alle fünf Iterationen wird ein und dieselbe Gleichung verwendet

$$T^{v+1} = T^v + w_{\max} \left(\frac{\sum_i w_i (T_{os} - T_s^v)}{\sum_i w_i} \right). \quad (29)$$

Neben der schon erwähnten, von BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/ gebrauchten Anfangsnäherung ist eine Vielzahl anderer möglich, von denen im folgenden einige aufgezählt werden sollen.

So kann ein Anfangsfeld aus den zu analysierenden Meßdaten selbst hergestellt werden, wie es KOSS/25/ praktizierte. Er fertigte mit Hilfe eines Polynoms sechsten Grades nach der in 4.1. erläuterten Polynommethode eine erste Näherung, die er dann mit den gleichen Daten verbesserte, die zuvor zu der Erstellung des Anfangsfeldes gebraucht wurden.

Eine weitere Möglichkeit, die Beobachtungen des Analysentermins sowohl für das eine als auch für das andere zu benutzen, besteht, indem zuerst eine manuell gezeichnete Analyse gefertigt und anschließend numerisch korrigiert wird.

Bei objektiven Analysenprogrammen, die nacheinander die verschiedenen Druckniveaus analysieren, wird ausgehend von der vorher fertiggestellten eine Näherung auf das neue Niveau extrapoliert.

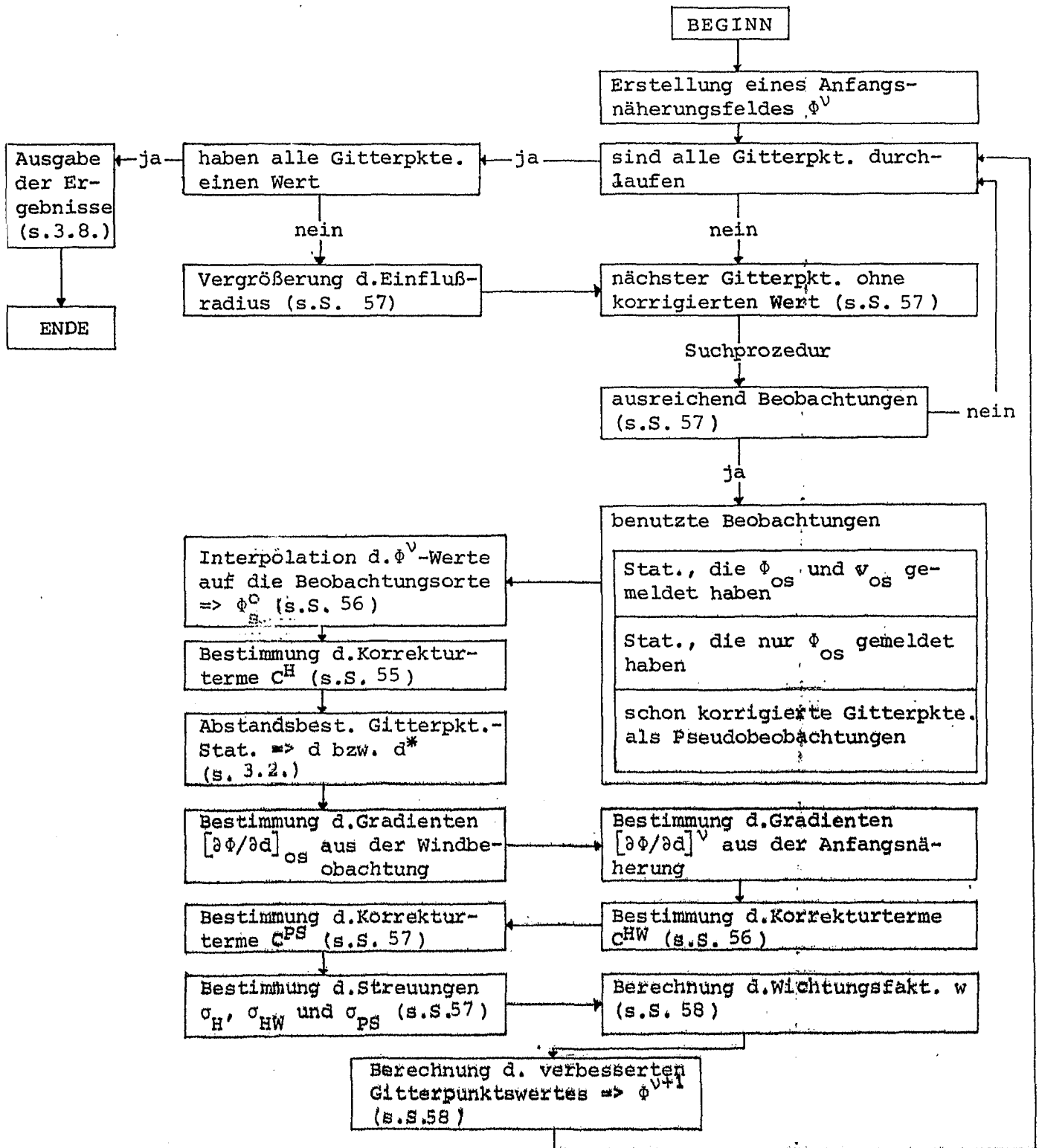


Abb. 18 Schematische Darstellung der objektiven Geopotentialanalyse nach KAESTNER/24/ (Erläuterungen sind aus dem Text entsprechend den Seiten- und Kapitelangaben zu entnehmen)

Die vorhergesagte Feldverteilung kann ebenfalls als Anfangsnäherung dienen.

Analysen vom vorangegangenen Termin können am besten bei Untersuchungen in der Stratosphäre als Approximation benutzt werden, da diese, wie erwähnt, geringe zeitliche Änderungen aufweist.

Auch durch klimatologische Mittelwerte ist es möglich, die Verteilung einer meteorologischen Variablen anzunähern, dieses gilt vor allem für tropische Gebiete.

Außer den bisher gezeigten Arten, eine Anfangsnäherung zu erhalten, sind sie untereinander kombinierbar (s. 4.2.1.). Ein anderes Beispiel wäre eine Kombination aus extrapoliertem und prognostischem Feld.

Die Abb. 18 beinhaltet eine schematische Darstellung zur objektiven Geopotentialanalyse nach KAESTNER/24/. Dabei wird nur ein Korrektionslauf aufgezeigt, d.h., sollen mehrere nacheinander folgen, ist das korrigierte Feld als neue Anfangsnäherung einzusetzen und der dargestellte Vorgang zu wiederholen.

4.3. ITERATIVES VERFAHREN

HAUG/18/ hat mit dieser Methode Höhenanalysen isobarer Flächen vorgenommen, doch kann das Verfahren auf jede regelmäßig gemessene meteorologische Variable f angewendet werden.

Es soll zunächst ein Gitterpunkt und die ihm am nächsten gelegene Beobachtung betrachtet werden. Dann kann das Geopotential am Gitterpunkt durch

$$\phi = \phi_{os} + \int_{d^*} \nabla \phi \cdot d d^* \quad (30)$$

bestimmt werden, d.h. aus der Beobachtung und dem Gradienten, der zwischen dem Gitterpunkt und dem Meßort herrscht. Dabei ist d^* der Integrationsweg zwischen den

beiden Punkten.

Die Station habe nun sowohl die geopotentielle Höhe ϕ_{OS} als auch den Wind v_{OS} gemeldet. Eine erste Näherung für den Geopotentialwert am Gitterpunkt erhält HAUG/18/ durch

$$\phi^1 = \phi_{OS} + \left(\Delta x^* \frac{(\Delta\phi_x)_{OS}}{2g} + \Delta y^* \frac{(\Delta\phi_y)_{OS}}{2g} \right), \quad (31)$$

$(\Delta\phi_x)_{OS}$ und $(\Delta\phi_y)_{OS}$ werden aus dem beobachteten Wind mittels der geostrophischen Beziehungen ermittelt und stellen Höhendifferenzen über eine Distanz von $2g$ dar; g ist der Gitterabstand und Δx^* und Δy^* sind die Abstände des Stationsortes vom Gitterpunkt in X- bzw. Y-Richtung.

Sollte die meldende Station nur die Höhe gemessen haben, so wird in erster Näherung der Geopotentialwert am Gitterpunkt gleich dem der Beobachtung gesetzt

$$\phi^1 = \phi_{OS} . \quad (32)$$

In einer zweiten Näherung für einen Gitterpunkt, welche dann erfolgt, wenn alle Punkte eines Gitters eine erste Näherung erhalten haben, wird Gebrauch von den Gradienten gemacht, die sich aus der ersten Geopotentialnäherung der umliegenden Gitterpunkte errechnen lassen. Dann werden (31) und (32) ersetzt durch

$$\phi^2 = \phi_{OS} + \frac{1}{2} \left(\Delta x^* \frac{(\Delta\phi_x)_{OS}}{2g} + \Delta y^* \frac{(\Delta\phi_y)_{OS}}{2g} \right) + \frac{1}{2} \left(\Delta x^* \frac{(\Delta\phi_x)^1}{2g} + \Delta y^* \frac{(\Delta\phi_y)^1}{2g} \right) \quad (33)$$

und

$$\phi^2 = \phi_{OS} + \left(\Delta x^* \frac{(\Delta\phi_x)^1}{2g} + \Delta y^* \frac{(\Delta\phi_y)^1}{2g} \right) \quad (34)$$

mit $(\Delta\phi_x)^1 = \phi^1_{x+1,y} - \phi^1_{x-1,y}$ und $(\Delta\phi_y)^1 = \phi^1_{x,y+1} - \phi^1_{x,y-1}$.

Die Indizes geben die kartesischen Koordinaten der verwendeten Gitterpunkte an.

Mit den letzten beiden Gleichungen wird das Verfahren mehrere Male wiederholt, wobei die sich ergebende Nähe-

rung jeweils in die neue Iteration eingeht. Dieser Iterationsprozeß konvergiert, wenn ein Stabilitätskriterium erfüllt wird. So muß für die Entfernung $d^* = \sqrt{(\Delta x^*)^2 + (\Delta y^*)^2}$ der Beobachtungsstation von dem Gitterpunkt im Falle, das Geopotential und Wind gemeldet wurde, gelten:

$$d^* < \sqrt{2} g ,$$

und falls nur das Geopotential gemessen wurde, gilt:

$$d^* < \frac{1}{2} \sqrt{2} g .$$

Sollte dieses Kriterium für einen Gitterpunkt und seiner nächsten Beobachtung nicht zutreffen, werden die Gradienten für diesen Gitterpunkt über die Entfernung $4g$ bestimmt.

Damit die Gradienten auch an den Rändern eines Analysengebietes berechnet werden können, muß eine Randbedingung gegeben sein. HAUG/18/ nimmt an, daß die Werte der ersten Gitterpunktsreihe außerhalb des Analysenbereiches gleich den entsprechenden Werten der Randpunkte sind.

Damit auch sämtliche Beobachtungen bei dieser Analyse-methode Verwendung finden, wird mit jeder meldenden Station eine Höhe für den der Station am nächsten gelegenen Gitterpunkt berechnet. Werden so in Gebieten mit guter Datenabdeckung für einen Gitterpunkt mehrere Höhen erhalten, wird von ihnen das arithmetische Mittel bestimmt und als Gitterpunktwert übernommen.

Für objektive Analysen anderer meteorologischer Elemente f nach diesem Verfahren sind die Gln. (32) und (34) zu benutzen (ϕ ist durch f zu ersetzen).

Die Abb. 19 zeigt eine schematische Darstellung des iterativen Analysenverfahrens wie von HAUG/18/ beschrieben. Wie bisher gibt das Symbol v die Iterationszahl an.

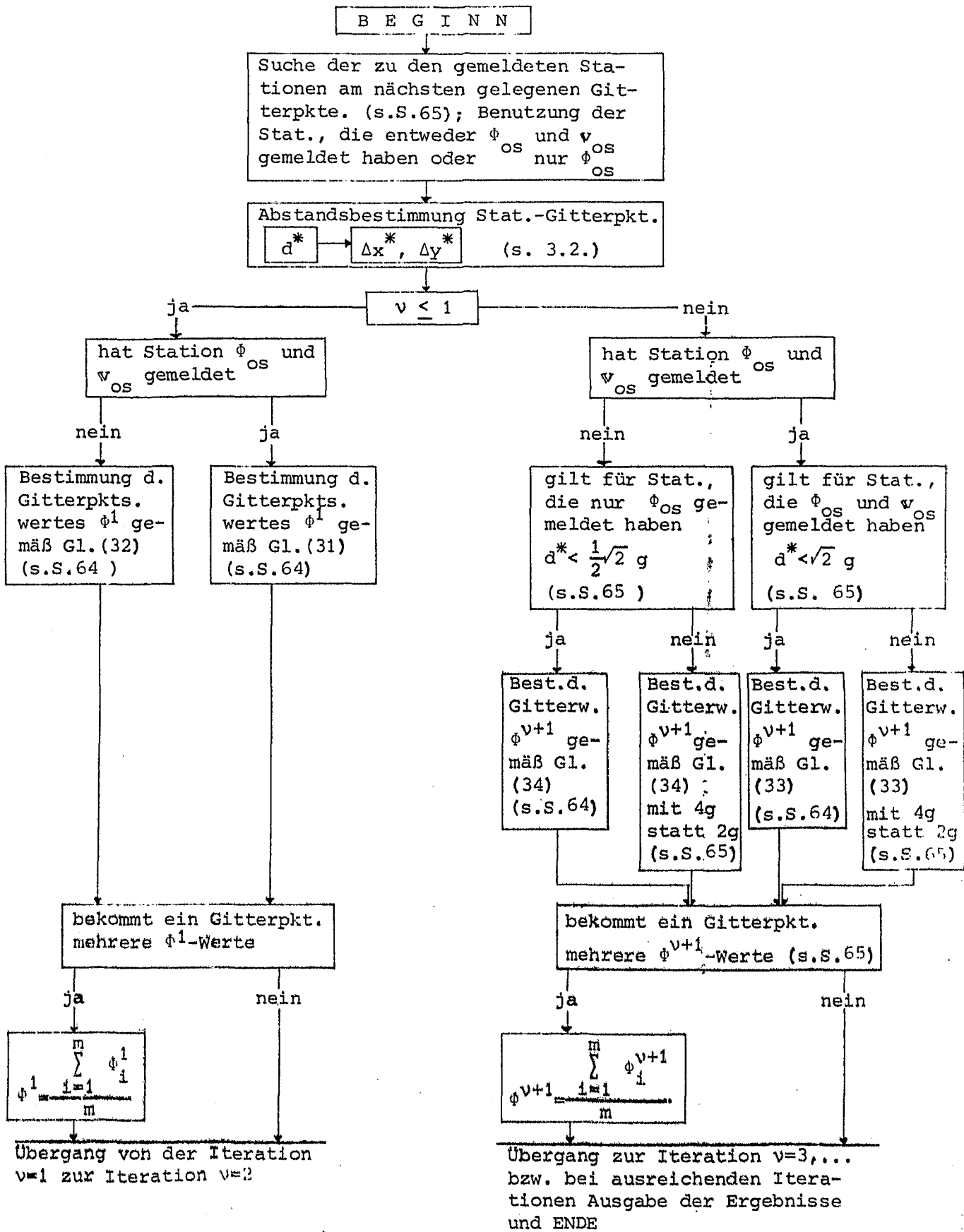


Abb. 19 Schematische Darstellung des iterativen Analyseverfahrens nach HAUG/18/ (Erläuterungen sind aus dem Text entsprechend den Seiten- und Kapitelangaben zu entnehmen)

4.4. OPTIMALES INTERPOLATIONSVERFAHREN

In der von GANDIN/14/ und BELOUSOV, GANDIN u. MASHKOVICH/3/ erläuterten objektiven Analyse wird ein Verfahren verwendet, mit dem sich zuvor, neben weiteren sowjetischen Autoren, ELIASSEN/12/ und WIENER/37/ beschäftigt haben, wobei der letztere den obigen Begriff prägte, unter dem diese Methode bekannt ist. Als optimale Interpolation wird hier eine Interpolation verstanden, bei der der mittlere quadratische Interpolationsfehler zu einem Minimum wird.

4.4.1. Optimale Interpolation für exakte Beobachtungswerte

Die Werte irgendeiner meteorologischen Variablen f seien an n Beobachtungspunkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ mit exakter Genauigkeit als bekannt angenommen

$$f_{oi} = f_o(x_i, y_i) \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n,$$

und die Forderung nach der Kenntnis des Wertes f_g an einem beliebigen Punkt (x_g, y_g) wird gestellt.

Jeder Wert des Elementes f kann durch eine Summe des klimatologischen Mittels \bar{f} und der Abweichung f' von diesem dargestellt werden

$$f_{oi} = \bar{f}_{oi} + f'_{oi} \quad (35)$$

$$f_g = \bar{f}_g + f'_g. \quad (36)$$

Bei diesem Interpolationsverfahren werden nicht die Werte f_{oi} selbst betrachtet, sondern deren Abweichungen f'_{oi} , d.h. man sucht mit Hilfe der Abweichungen f'_{oi} die Abweichung f'_g am Punkt (x_g, y_g) . Diese kann als Linearkombination der f'_{oi} geschrieben werden

$$f'_g = \sum_{i=1}^n w_i f'_{oi}, \quad (37)$$

wobei die Wichtungsfaktoren w_i noch zu bestimmen sind.

Es ist nicht möglich, daß durch die Wahl der w_i die Gl. (37) in allen Fällen exakt befriedigt wird, d.h. erfolgt eine Interpolation nach Gl. (37) auf den Punkt (x_g, y_g) , für den darüberhinaus die exakte Abweichung f_g exakt bekannt sein soll, so wird sich zwischen den beiden eine Differenz einstellen

$$f_g' \neq f_{g \text{ exakt}}'$$

Hieraus ergibt sich die Forderung, daß der mittlere quadratische Fehler für die Gl. (37)

$$E = \overline{(f_g' - \sum_{i=1}^n w_i f_{oi}')^2} \quad (38)$$

in Hinblick auf die Wichtungsfaktoren ein Minimum werden soll.

Eine Interpolation, bei der durch die Wahl der w_i der mittlere quadratische Fehler minimiert wird, bezeichnet man als optimal.

Um die Wichtungsfaktoren zu berechnen, werde zuerst die Quadrierung in Gl. (38) ausgeführt

$$E = \overline{f_g'^2} - 2 \sum_{i=1}^n w_i \overline{f_g' f_{oi}'} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \overline{f_{oi}' f_{oj}'} \quad (39)$$

bzw.

$$E = m_{oo} - 2 \sum_{i=1}^n w_i m_{gi} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j m_{ij} \quad (40)$$

Wenn m_{oo} die Varianz, m_{gi} und m_{ij} die Werte der Autokovarianzfunktion für die Variable f darstellen (s. 3.4.).

Da angenommen wird, daß das Feld dieses Elementes statistisch homogen und isotrop ist, was für das Feld der Abweichungen f_{oi}' eher zutrifft als für das beobachtete Feld f_{oi}' , hängen m_{oo} , m_{gi} und m_{ij} nur von der Distanz zwischen den Punkten ab

$$m_{gi} = m_f (d_{gi}^*)$$

$$m_{ij} = m_f (d_{ij}^*)$$

$$m_{oo} = m_f (d^*=o) .$$

Statt dieses dimensionsbehafteten mittleren quadratischen Fehlers ist es vorteilhaft, zur dimensionslosen Größe e , dem Maß des Interpolationsfehlers, überzugehen

$$e = E / m_f(o) . \quad (41)$$

Wird nun (40) in (41) eingesetzt, erhält man

$$e = 1 - 2 \sum_{i=1}^n w_i \mu_{gi} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \mu_{ij} , \quad (42)$$

wobei μ_{gi} und μ_{ij} die Werte der normierten Autokovarianzfunktion (Autokorrelationskoeffizienten) des meteorologischen Elementes kennzeichnen. Da e in Hinblick auf die Wahl der Wichtungsfaktoren w_i minimal werden soll, muß die dazu notwendige Bedingung erfüllt sein

$$\partial e / \partial w_i = -2 \mu_{gi} + 2 \sum_{j=1}^n w_j \mu_{ij} = 0 \quad (43)$$

mit $i = 1, 2, \dots, n$.

Diese ergibt ein Gleichungssystem mit n linearen Gleichungen

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij} w_j = \mu_{gi} \quad (44)$$

für die Wichtungsfaktoren w_i , dessen Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu_{12} & \mu_{13} & \dots & \mu_{1n} & \mu_{g1} \\ \mu_{21} & 1 & \mu_{23} & \dots & \mu_{2n} & \mu_{g2} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 1 & \dots & \mu_{3n} & \mu_{g3} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \mu_{n1} & \dots & \dots & & 1 & \mu_{gn} \end{vmatrix}$$

symmetrisch ist. Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems sei auf 3.5. verwiesen.

Mit den ermittelten w_i wird anschließend in die Gl. (37) eingegangen und f'_g berechnet. Um den eigentlichen Wert f_g zu bekommen, nach dem gefragt wird, ist die Kenntnis des klimatologischen Mittels am Punkt (x_g, y_g) erforderlich (Gl. (36)).

4.4.2. Berücksichtigung zufälliger Beobachtungsfehler bei der optimalen Interpolation

Die Meßdaten an den n Beobachtungspunkten (x_i, y_i) sind nicht als exakt anzusehen, d.h. daß der beobachtete Wert \hat{f}_{oi} mit dem genauen f_{oi} um einen Fehler δ_{oi} differiert

$$\hat{f}_{oi} = f_{oi} + \delta_{oi} .$$

Es wird angenommen, daß es sich um rein zufällige Fehler handelt, was an die folgenden Voraussetzungen gebunden ist:

a) der mittlere Fehler an jedem Punkt ist null

$$\overline{\delta_{oi}} = 0 ; \quad (45)$$

b) die Fehler an den verschiedenen Punkten sind nicht miteinander korreliert

$$\overline{\delta_{oi} \delta_{oj}} = 0 \quad (i \neq j) ; \quad (46)$$

c) die Fehler sind an keinem Punkt in keiner Weise mit den wirklichen Werten der Variablen korreliert

$$\overline{\delta_{oi} f_{oj}} = 0 . \quad (47)$$

Statt f'_{oi} wird jetzt die Abweichung \hat{f}'_{oi} der fehlerhaften Beobachtung vom klimatologischen Mittel betrachtet

$$\hat{f}'_{oi} = f'_{oi} + \delta_{oi} .$$

Da es sich im folgenden dem Prinzip nach um die gleiche Ableitung wie in 4.4.1. handelt, sei für Erläuterungen auf dieses Kapitel verwiesen.

Die Linearkombination (37) ändert sich zu

$$f'_g = \sum_{i=1}^n w_i (f'_{oi} + \delta_{oi}) \quad (48)$$

und damit die mittlere quadratische Differenz

$$\begin{aligned} E &= \overline{\left[f'_g - \sum_{i=1}^n w_i (f'_{oi} + \delta_{oi}) \right]^2} \quad (49) \\ &= \overline{f_g'^2} - 2 \sum_{i=1}^n w_i \overline{f'_g f'_{oi}} - 2 \sum_{i=1}^n w_i \overline{f'_g \delta_{oi}} + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \overline{f'_{oi} \delta_{oj}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \overline{\delta_{oi} \delta_{oj}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \overline{f'_{oi} f'_{oj}}. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung (47) ergibt sich, daß der dritte und vierte Term der rechten Seite verschwindet; im fünften differenzieren nach (46) nur diejenigen Komponenten von null, für die $i=j$ gilt

$$E = \overline{f_g'^2} - 2 \sum_{i=1}^n w_i \overline{f'_g f'_{oi}} + \sum_{i=1}^n w_i^2 \overline{\delta_{oi}^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \overline{f'_{oi} f'_{oj}},$$

daraus folgt für das Maß e des Interpolationsfehlers

$$e = 1 - 2 \sum_{i=1}^n w_i \mu_{gi} + \sum_{i=1}^n w_i^2 \eta_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \mu_{ij}, \quad (50)$$

wobei $\eta_i = \overline{\delta_{oi}^2} / m_F(o)$ die Genauigkeit der Beobachtungen beschreibt und als Maß der Beobachtungsfehler bezeichnet wird.

Bei einem Vergleich der Gln. (42) und (50) differenzieren beide nur um den dritten Term, so daß (50) in (42) übergeht, wenn $\eta_i \equiv 0$, d.h. die Beobachtungen keine zufälligen Fehler enthalten.

Die Bedingung, damit e minimal wird

$$\partial e / \partial w_i = 0 ,$$

liefert dann ein Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^n w_j \mu_{ij} + \eta_i w_i = \mu_{gi} \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (51)$$

aus dem die Wichtungsfaktoren ermittelt werden. Im allgemeinen wird bei der Ausführung der objektiven Analyse

$$\eta_i = \eta$$

gesetzt, da die Genauigkeit der Beobachtungen an verschiedenen Stationen als ungefähr gleich angesehen werden kann, d.h. δ_{oi} ist unabhängig von i . Hiermit ergibt sich die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+\eta & \mu_{12} & \mu_{13} & \dots & \mu_{1n} & \mu_{g1} \\ \mu_{21} & 1+\eta & \mu_{23} & \dots & \mu_{2n} & \mu_{g2} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 1+\eta & \dots & \mu_{3n} & \mu_{g3} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \mu_{n1} \dots & & & \dots & 1+\eta & \mu_{gn} \end{pmatrix}$$

für das Gleichungssystem (51) (zur Lösung s. 3.5.).

4.4.3. Anwendung der optimalen Interpolation in der objektiven Analyse

Wie bisher sind die beliebigen Punkte, für die die Interpolation vorgenommen werden soll, die Gitterpunkte eines über ein zu analysierendes Gebiet gelegten Gitternetzes. In der Praxis sind verschiedene Varianten von regelmäßigen Gittern in Gebrauch, so rechteckige, dreieckige und geographische. Im folgenden wird bei der Beschreibung dieses Analysensystems sowohl ein rechteckiges als auch ein geographisches Gitter verwen-

det, dessen Punkte mit den Schnittpunkten zwischen den Meridianen und Breitenkreisen zusammenfallen. Für die Ausführung der Interpolation ist es notwendig, eine ausreichende Anzahl von Stationen aufzufinden, welche möglichst in nächster Nähe zu den interessierenden Gitterpunkten Meßdaten übermittelt haben.

4.4.3.1. Auffinden der notwendigen Stationen

Die geographische Karte des Gebietes, über dem die Analyse erfolgen soll, wird in $m \cdot n$ Quadrate mit der Seitenlänge g^* aufgetilt, die durchnummeriert werden (s. Abb. 20); m bzw. n gibt die Anzahl der Quadrate in einer Reihe bzw. in einer Spalte an. Werden nun kartesische Koordinaten x und y eingeführt und g^* als Einheitslänge betrachtet, so variiert x von null bis m und y von null bis n . In einem Beispiel wird $m=n=10$ gesetzt (s. Abb. 20).

Wird eine Analyse der nördlichen Hemisphäre mittels eines geographisch regelmäßigen Gitters gefertigt, so werden die Koordinaten der zu analysierenden Punkte in Polarkoordinaten d_i und λ_k angegeben, wobei d_i der Abstand der i -ten Breite zum Pol in Einheiten von g^* und $\lambda_k = k\Delta\lambda$ die geographische Länge ist (k : = Nummer des Gitterpunktes auf dem i -ten Breitenkreis; $\Delta\lambda$: = Gitterschritt entlang der Breitenkreise).

Aus Gründen der Methodik, die zur Interpolation notwendigen Stationsdaten aufzufinden, müssen die Polarkoordinaten der Gitterpunkte in die obigen kartesischen transformiert werden. Die Transformationsgleichungen lauten (Abb. 21)

$$\begin{aligned}x_{ik} &= x_0 - d_i \cos \lambda_k = x_0 - d_i \cos (k\Delta\lambda) \\y_{ik} &= y_0 + d_i \sin \lambda_k = y_0 + d_i \sin (k\Delta\lambda),\end{aligned}\tag{52}$$

wobei x_0 und y_0 die Koordinaten des Nordpols sind.

Es sei in unserem Beispiel angenommen, daß für einen

Gitterpunkt mittels der Transformationsgleichungen die kartesischen Koordinaten $x_{ik} = 4,4$ und $y_{ik} = 5,4$ ermittelt worden sind. Mit Hilfe dieser wird nun die Nummer des Quadrates, in dem der interessierende Gitterpunkt liegt, nach der Gleichung

$$\text{Nr. d. Quad.} = x'' + my'' \quad (53)$$

bestimmt, dabei sind x'' und y'' die ganzzahligen Anteile der Koordinaten x_{ik}, y_{ik} (also $x'' = 4$ und $y'' = 5$). Außerdem gibt x'' und y'' die Spaltennummer bzw. die Liniennummer an, wo das Quadrat mit dem Gitterpunkt zu finden ist. Eingesetzt in Gl. (53) ergibt sich für die gesuchte Quadratnummer $4+10 \cdot 5 = 54$ (s. Abb. 20).

Die nachfolgende Diskussion wird deutlich machen, warum eine Einteilung des Analysegebietes in Quadrate vorgenommen wird, und warum eine Transformation der Polarkoordinaten des geographischen Gitters in die entsprechenden Koordinaten des durch die Quadrataufteilung entstandenen Systems durchgeführt wird.

GANDIN/14/ geht davon aus, daß für die objektive Analyse ein festes Beobachtungsnetz zur Verfügung steht, so daß ein für alle Mal die Anzahl der in den Quadraten liegenden Stationen bestimmt ist. In der Folge der Durchnummerierung der Quadrate wird nun das Informationsmaterial der in ihnen vorhandenen Stationen im Computer gespeichert. Sollte es vorkommen, daß ein Meßort innerhalb des festen Netzes für einen Analysetermin keine Daten gemeldet hat, so wird dieser für die Dauer dieser einen Analyse aus dem Speicher des Computers eliminiert. Mit der Ermittlung der Nummer des Quadrates, in dem der zu analysierende Gitterpunkt liegt, können mit einem Male alle gemeldeten Stationen vom Computer abgerufen werden, die in diesem liegen. Ist ihre Anzahl nicht ausreichend, so werden weitere Beobachtungsstationen von benachbarten Quadraten hinzugenommen, die nach einer bestimmten Reihenfolge ausgewählt werden. Diese wird durch die

Ziffernfolge in Abb. 22 angegeben.

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 8 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
| 7 | 5 | 4 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 |
| 7 | 4 | 2 | 1 | 2 | 4 | 7 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 |
| 6 | 3 | 1 | 0 | 1 | 3 | 6 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 |
| 7 | 4 | 2 | 1 | 2 | 4 | 7 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 |
| 7 | 5 | 4 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 |
| 8 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 8 |

Abb. 22 Reihenfolge zur Auswahl zusätzlicher Quadrate (die Zahl in der oberen rechten Ecke gibt die Quadratnummer entsprechend Abb. 20 an)

Im allgemeinen wird vor der Ausführung der objektiven Analyse festgelegt, wie viele Stationen zur Interpolation benötigt werden. In den vorliegenden Arbeiten von GANDIN/14/ und BELOUSOV, GANDIN u. MASHKOVICH/3/ werden acht gemeldete Stationen als notwendig erachtet.

Die zu (52) entsprechenden Transformationsgleichungen für ein rechteckiges Grundgitter zur Berechnung der Koordinaten des k-ten Gitterpunktes auf der i-ten Linie lauten

$$x_{ik} = x_0 + bk + ai \tag{54}$$

$$y_{ik} = y_0 - bi + ak$$

mit $a = g^* \sin \alpha$ und $b = g^* \cos \alpha$, wobei g^* die Maschengröße des neuen Gitters, entstanden durch die Quadranteilung, und α der Drehwinkel des neuen Gitters relativ zum rechteckigen Grundgitter ist; x_0 und y_0 sind die Koordinaten der linken Ecke des Grundgitters im neuen System (Abb. 23). Ansonsten wird wie oben verfahren.

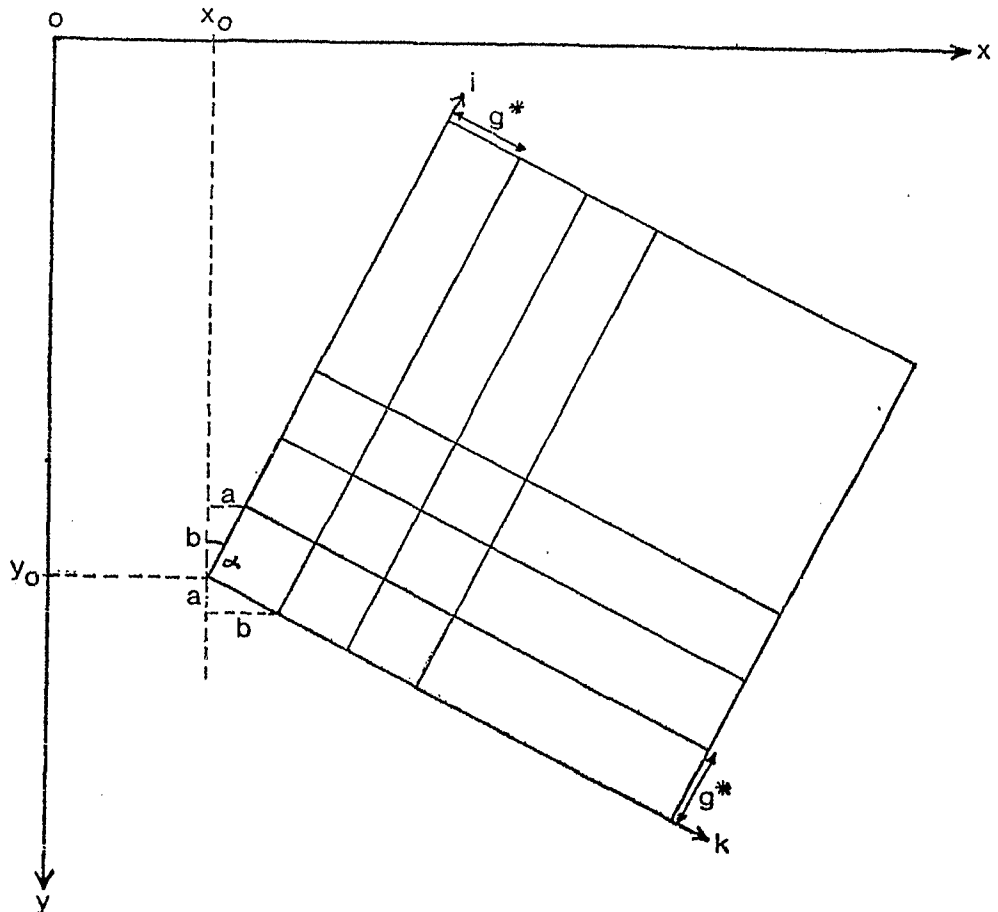


Abb. 23 Transformation eines rechteckigen Grundgitters auf das durch die Quadrateinteilung entstandene neue Gitter

4.4.3.2. Berechnung der interpolierten Gitterwerte

Bei der optimalen Interpolation wird der Wert f_g einer meteorologischen Variablen f an einem Punkt eines regelmäßigen Gitters mittels umliegender Meßdaten f_{oi} , die zuvor nach der in 4.4.3.1. beschriebenen Methode gefunden worden sind, durch die Gleichung

$$f_g = \overline{f}_g + \sum_{i=1}^n w_i f'_{oi} \quad (55)$$

berechnet. Hierbei ist \overline{f}_g das klimatologische Mittel am Gitterpunkt selbst. Um die Gleichung überhaupt anwenden zu können, müssen zuvor die Abweichungen f'_{oi} der Beobachtungen f_{oi} von den klimatologischen Mitteln \overline{f}_{oi} an den Stationsorten nach

$$f'_{oi} = f_{oi} - \overline{f}_{oi}$$

ermittelt werden. Die Anzahl der Stationen, die bei diesem Interpolationsprozeß beteiligt sind, wird durch n gekennzeichnet. Die Wichtungsfaktoren w_i werden aus dem Gleichungssystem bestimmt, das zuvor in 4.4.2. abgeleitet worden ist

$$\sum_{j=1}^n w_j \mu_{ij} + \eta w_i = \mu_{gi} \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Dieses kann jedoch nur geschehen, wenn die entsprechenden Werte μ_{ij} , μ_{gi} der normierten Autokovarianzfunktion und das Maß η des Beobachtungsfehlers bekannt sind. Da nach der Annahme der Isotropie und Homogenität (s. 3.4.) die normierten Autokovarianzen μ_{ij} nur von dem Abstand des i -ten von dem j -ten Beobachtungspunkt abhängen bzw. die μ_{gi} von dem Abstand Station-Gitterpunkt, sind diese Distanzen d_{ij} und d_{gi} zu bestimmen (s. 3.2.). Doch werden im weiteren nicht die Abstände in Gittereinheiten benötigt, sondern vielmehr die wahren Entfernungen d^* auf der Erdoberfläche (s. 3.2.).

Um nun die Werte μ_{ij} und μ_{gi} der Autokorrelationsfunktion entsprechend den ermittelten Abständen d^* zu erhalten, wird wie folgt verfahren:

Die Kurve der normierten Autokovarianzfunktion der zu analysierenden Variablen f , die zuvor entweder selbst berechnet (s. 3.4.) oder von anderen Autoren übernommen worden ist, wird in Form einer Tabelle im Computer gespeichert. Diese enthält zu den verschiedenen Abständen d^* die entsprechenden Werte der Autokorrelationsfunktion $\mu_f(d^*)$. Die μ_{ij} und μ_{gi} werden gemäß der Distanzen d_{ij}^* und d_{gi}^* durch lineare Interpolation der tabellierten Werte gefunden.

Mit ihnen und dem vorher bestimmten Maß des Beobachtungsfehlers η wird in das lineare Gleichungssystem (51) eingegangen, und es erfolgt eine Lösung in Hinblick auf die Wichtungsfaktoren w_i . Nachdem auch diese berechnet

worden sind, wird mittels Gl. (55) der Wert f_g des Gitterpunktes bestimmt.

GANDIN/14/ fertigte mit Hilfe dieser beschriebenen Methode objektive Geopotentialanalysen des 850, 500 und 300 mb-Niveaus, wobei er für alle drei isobaren Flächen die Werte der Autokorrelationsfunktion des Geopotentials in 500 mb verwendet hat (s. Tab. 3). Außerdem wurde das Maß η des Beobachtungsfehlers konstant gleich 0,02 gesetzt. Dieser Zahlenwert entspricht ungefähr 14 % der Variabilität des Geopotentials. Eine Rechtfertigung dafür ist durch den Umstand begründet, daß bei einer Zunahme der Höhe innerhalb troposphärischer Grenzen sowohl der Beobachtungsfehler als auch die Variabilität wächst, so daß am Ende η als konstant angesehen werden kann.

Tab. 3 Werte der normierten Autokovarianzfunktion für das Geopotential der 500 mb-Fläche

| | | | | | | | |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $d^* [10^3 \text{ km}]$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,75 |
| $\mu_\phi (d^*)$ | 1 | 0,992 | 0,972 | 0,940 | 0,897 | 0,846 | 0,691 |
| d^* | 1,0 | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2,0 | 2,25 | 2,5 |
| μ_ϕ | 0,522 | 0,368 | 0,240 | 0,148 | 0,083 | 0,044 | 0,022 |
| d^* | 2,75 | 3,0 | 3,25 | 3,5 | | | |
| μ_ϕ | 0,010 | 0,004 | 0,002 | 0,000 | | | |

Zusammenfassend sind folgende Grundinformationen für diese Analyse notwendig:

- a) Beobachtungen an den Stationen
- b) klimatologische Mittel an den Stationen
- c) klimatologische Mittel an den Gitterpunkten
- d) kartesische Koordinaten der Gitterpunkte
- e) kartesische Koordinaten der Stationen bzw. ihre geographische Lage, um aus ihr die Koordinaten zu ermitteln (s. 3.1.)

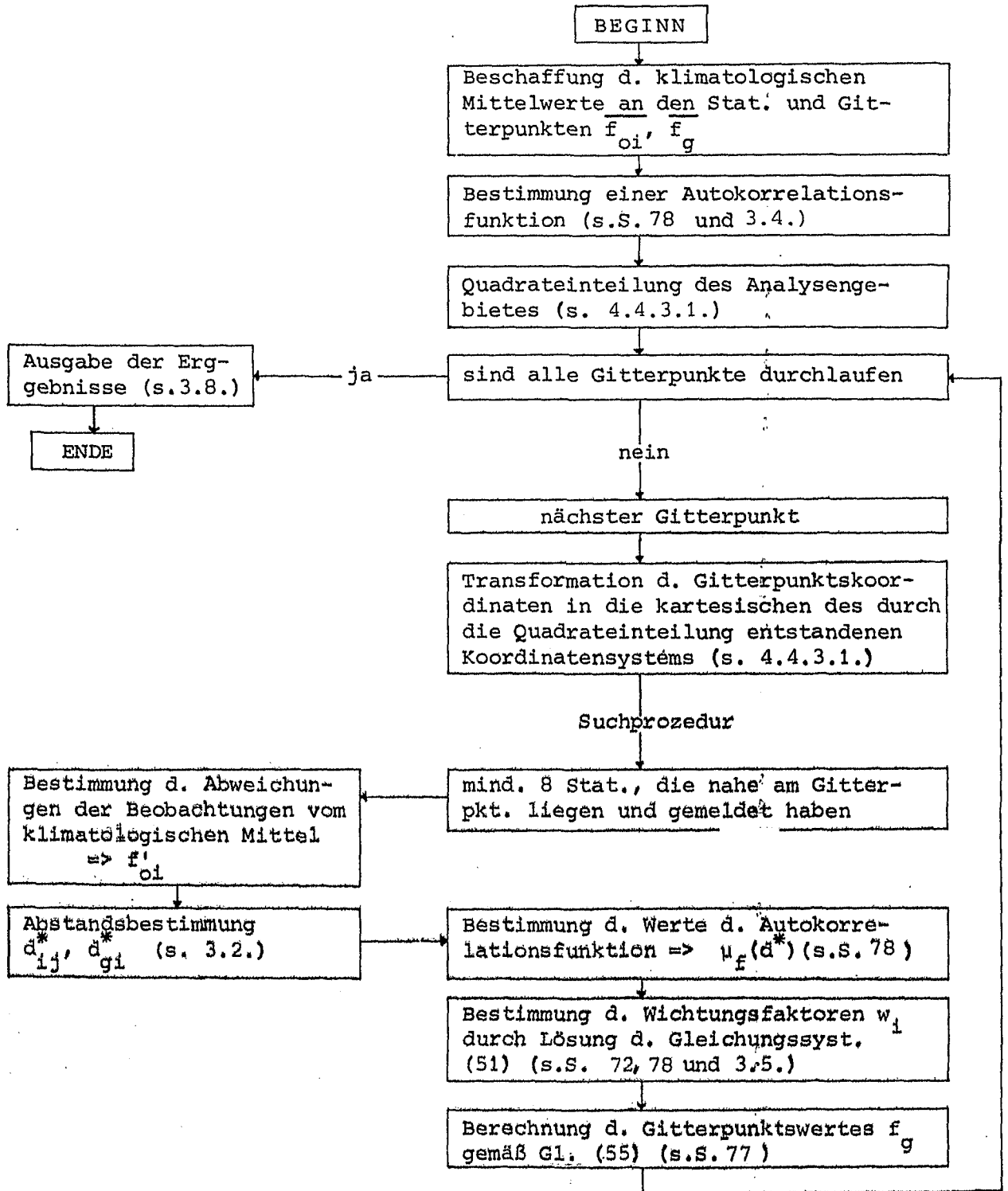


Abb. 24 Schematische Darstellung der objektiven Analyse-
 methode "optimale Interpolation"
 (Erläuterungen sind aus dem Text entsprechend
 den Seiten- und Kapitelangaben zu entnehmen)

- f) die Werte der Autokorrelationsfunktion der zu analysierenden Variablen
- g) das Maß des Beobachtungsfehlers.

Die Abb. 24 zeigt das in diesem Kapitel beschriebene objektive Analysenverfahren noch einmal in einer schematischen Darstellung.

4.5. DYNAMISCHE METHODE

Große Schwierigkeiten entstehen bei objektiven Analysen immer wieder, wenn die zu analysierenden Gebiete nur *sehr wenige oder überhaupt keine* Beobachtungsdaten besitzen. THOMPSON/35/ und RICHARDSON/31/ haben eine dynamische Methode entwickelt, um auch in diesen Gebieten eine Aussage über den Zustand der Atmosphäre machen zu können. Die Grundlage für dieses Verfahren bildet das Prinzip von der Erhaltung der absoluten Vorticity, welches besagt, daß die absolute Vorticity jedes Luftpartikels an allen Punkten längs der Horizontalprojektion seiner Trajektorie die gleiche ist. Dieses Prinzip kann nur auf nichtdivergierende Flüsse angewendet werden, was für die realen Bewegungen in den mittleren troposphärischen Flächen mit ausreichender Genauigkeit zutrifft.

Das eben Gesagte wird mathematisch durch die beiden Beziehungen

$$d \zeta_a / dt = 0 \quad (56)$$

und

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (57)$$

beschrieben, mit

$$d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

$$\zeta_a = l + \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$$

$$\zeta_a = \text{absolute Vorticity}$$

$$l = \text{Coriolisparameter}$$

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v} = \text{relative Vorticity } \zeta$$

$$\mathbf{v} = \text{Horizontalprojektion des Geschwindigkeitsvektors}$$

$$\nabla = \text{horizontaler Vektorgradient}$$

$$\mathbf{k} = \text{aufwärts gerichteter Einheitsvektor}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{horizontale Divergenz von } \mathbf{v}$$

$$t = \text{verstrichene Zeit}$$

Aus Gl. (57) kann gefolgert werden, daß eine Stromfunktion ψ derart existiert, daß

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \psi . \quad (58)$$

Mit dieser Gleichung in den Ausdruck $\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$ für die relative Vorticity eingegangen, ergibt für diese

$$\zeta = \nabla^2 \psi$$

und damit für die absolute Vorticity ζ_a

$$\zeta_a = 1 + \nabla^2 \psi . \quad (59)$$

Es soll nun im folgenden angenommen werden, daß ein Gebiet O, für das regelmäßig an allen Punkten eine beobachtete Verteilung von ψ bekannt ist, ein zweites Gebiet A (ein sogenanntes "Datenloch") umgibt, welches überhaupt keine Meßdaten aufzuweisen hat (Abb. 25). Aus diesem beobachteten ψ -Feld wird für das Gebiet außerhalb des Loches mittels der Gl. (59) ein ζ_a -Feld bestimmt. Als nächstes ist für das Loch selbst ein absolutes Vorticity-

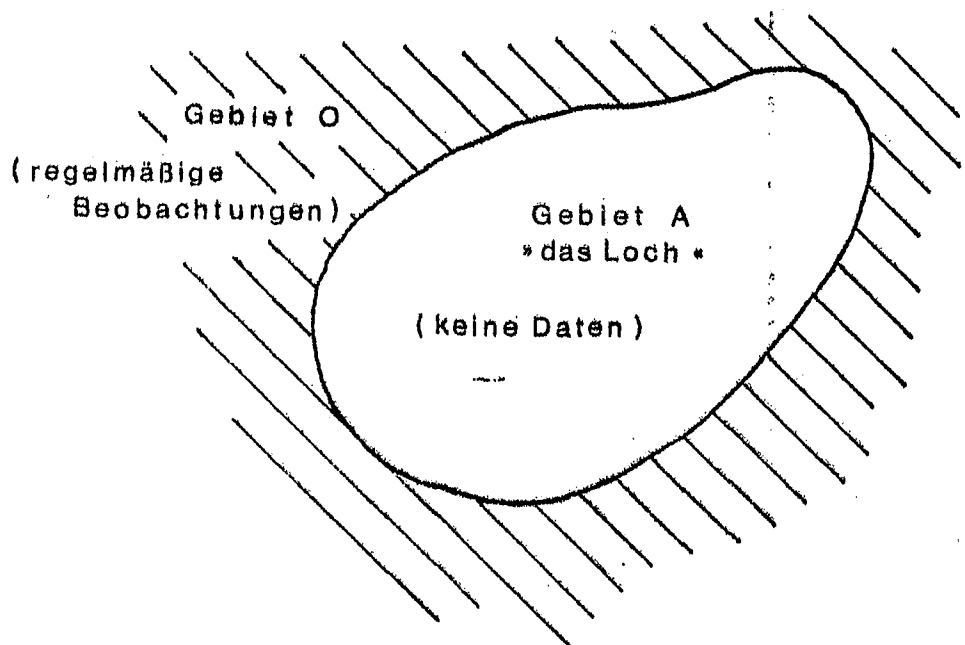


Abb. 25 Schematische Darstellung eines Datenloches

feld abzuschätzen. Wenn das Gebiet A nicht zu groß ist, scheint es vernünftig anzunehmen, daß die relative Vorticity in dem Loch überall einheitlich und gleich einem Durchschnitt über A ist. Die relative Vorticity kann aus der Beziehung

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{A} \oint \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = \frac{1}{A} \oint v_s ds \quad (60)$$

ermittelt werden, wobei A die Fläche des Loches ist, die Ableitung nach n ist normal zur Berandung des Gebietes A nach außen gerichtet; ds ist ein kleines Längenintervall der Berandung und v_s die tangentielle Komponente des herrschenden Windes an der Berandung. So ergibt sich das abzuschätzende ζ_a -Feld des Loches mittels des relativen Vorticityfeldes.

Um Diskontinuitäten an den Grenzen der beiden Gebiete A und O zu eliminieren, wird dieses approximierte Feld unter Einbeziehung der Werte der ersten Gitterreihe außerhalb des Loches geglättet (s. 3.7.). Als weiterer Schritt wird durch Relaxation ein ψ -Feld innerhalb des Loches aus dem geglätteten, abgeschätzten ζ_a -Feld und den bekannten ψ -Werten an der Grenze des Gebietes A ermittelt (Gl. (59)). Dann wird ein neues ζ_a^* -Feld aus der Kombination der Stromfunktionsfelder der beiden Gebiete A und O für das Gesamtgebiet berechnet, was die Vorticitywerte weder außerhalb noch innerhalb des Loches abändert, sondern nur längs der Berandung. Alle bisher berechneten Felder seien für die Beobachtungszeit $t=0$ erstellt worden. Weiterhin werden aus den ψ -Feldern gemäß Gl. (58) die Windgeschwindigkeiten v zur Zeit $t=0$ für A und O bestimmt. Mit ihrem Gebrauch werden die Trajektorien aller Luftpartikel in A und O über eine kurze Zeitperiode Δt berechnet. Es folgt aus der Gl. (56), daß der Wert ζ_a am Ende jeder Trajektorie der gleiche ist wie am Anfang. Auf diese Weise können die ζ_a -Werte an allen Punkten der beiden Gebiete für die Zeit $t = \Delta t$ vorhergesagt werden (quasi-Lagrangesches Advektionsschema; s. HALTNER /17/). Ein ψ -Vorhersagefeld für das Gesamtgebiet wird durch Relaxation aus dem vorhergesagten ζ_a -Feld mittels Gl. (59) erhalten. Das Advektionsschema wird N-mal für

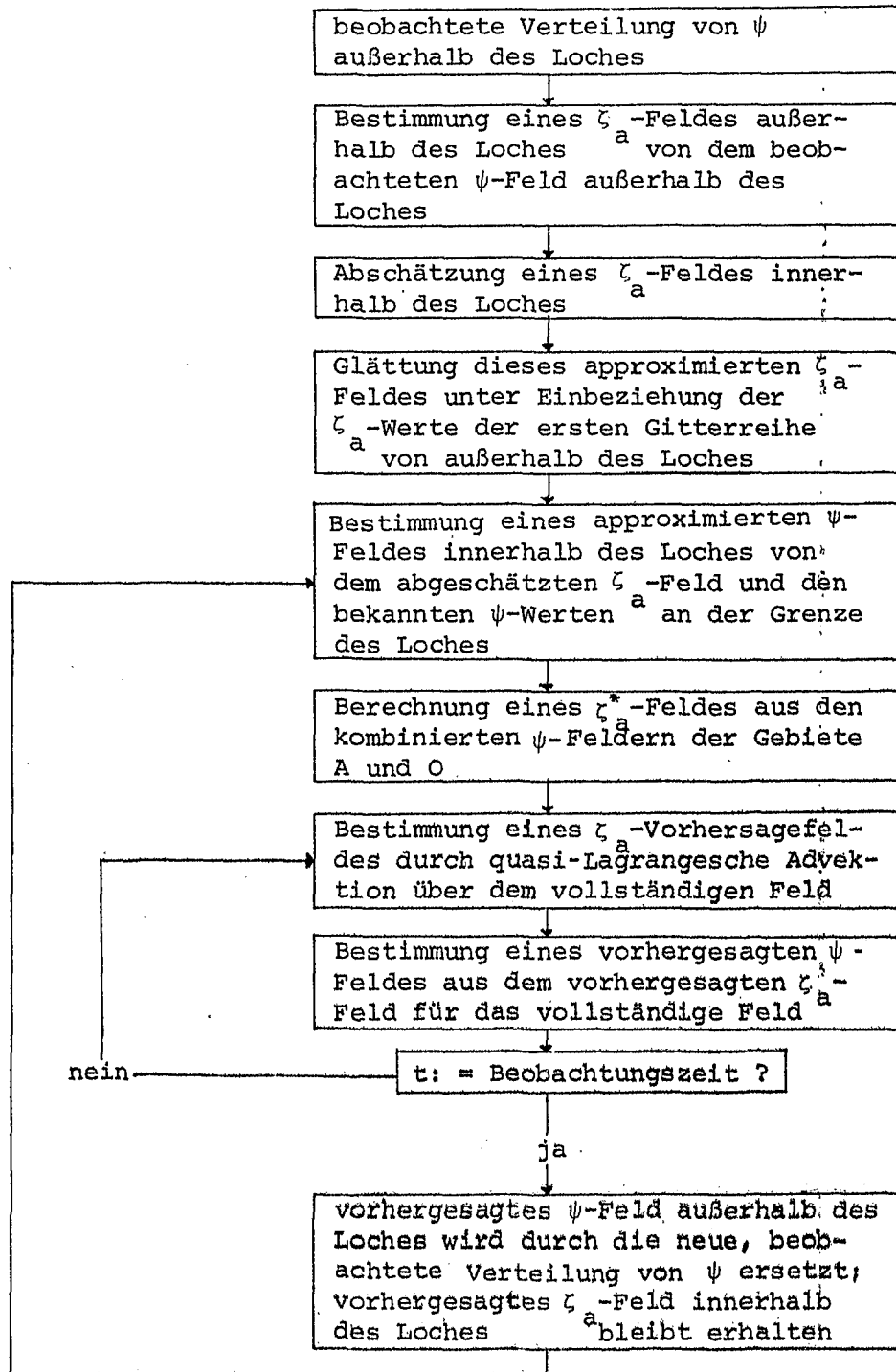


Abb. 26 Zusammenfassendes Schema für die dynamische Analysenmethode

das Zeitintervall Δt wiederholt, bis eine neue Beobachtungszeit $t = N\Delta t$ erreicht wird. Zur Zeit $t = N\Delta t$ werden die neuen Beobachtungen von ψ im Gebiet O erhalten. Diese ersetzen die vorhergesagten ψ -Werte außerhalb des Loches. Innerhalb des Gebietes A wird das vorhergesagte ζ_a -Feld beibehalten und mit ihm und den neu beobachteten ψ -Werten an der Grenze des Loches ein neues ψ -Feld für A berechnet. Im weiteren Verlauf wird dann wie oben verfahren, indem aus dem neuen Stromfunktionsfeld für das Loch, kombiniert mit dem neu beobachteten des Gebietes O , das neue ζ_a^* -Feld erstellt wird, usw.. Die Abb. 26 zeigt die eben beschriebene Prozedur noch einmal anhand eines zusammenfassenden Schemas.

Zum Zeitpunkt $t = N\Delta t$ ist nicht nur eine neue beobachtete Verteilung von ψ in O bekannt, sondern auch eine vorhergesagte, approximierete Vorticityverteilung in A , die sich zum Teil aus der Anfangsabschätzung und zum anderen, auf der windwärtigen Seite des Loches, aus der korrekten Verteilung der Vorticity zusammensetzt, d.h., daß eine Advektion von korrekter Vorticity, die aus dem beobachteten ψ -Feld bestimmt wurde, in das Gebiet A hinein stattgefunden hat. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß die Verteilung von ψ im Gebiet A zur Zeit $t = N\Delta t$ besser ist als zur Zeit $t=0$. Folglich ist die erläuterte Prozedur über das Intervall $t = N\Delta t$ bis $t = 2N\Delta t$ usw. zu wiederholen, um so den Fehler in A auf einen minimalen Wert zu reduzieren.

4.6. GEOPOTENTIALANALYSE MIT HILFE VON ZIRKULATION UND VORTICITY

Wie schon in der Kapitelüberschrift angedeutet, baut die von AUBERT/2/ beschriebene dynamische Analysetechnik auf der Beziehung zwischen Zirkulation und relativer Vorticity auf. Die Zirkulation Z für eine Fläche A berechnet sich aus

$$Z = \oint v_s ds, \quad (61)$$

wobei ds ein infinitesimal kleines Stück der Flächenberandung ist und v_s die Windkomponente längs des Integrationsweges. Die Integration erfolgt gegen den Uhrzeigersinn. Die relative Vorticity, geostrophisch approximiert, hat die Form

$$\zeta = \frac{1}{f} \nabla^2 \phi, \quad (62)$$

mit f = Coriolisparameter. Der Zusammenhang zwischen Zirkulation und Vorticity wird durch die Beziehung

$$\bar{\zeta} = Z / A \quad (63)$$

hergestellt, d.h., daß die mittlere Zirkulation über einem Gebiet als ein Maß für die mittlere relative Vorticity über dem gleichen Gebiet angesehen werden kann.

Die Grundgleichung für das AUBERTSche Analysensystem ergibt sich dann im Mittel aus (61), (62) und (63)

$$\nabla^2 \phi = \frac{f}{A} \oint v_s ds. \quad (64)$$

Dieses ist eine Poissonsche Differentialgleichung, die für ϕ numerisch durch Relaxation zu lösen ist (s. 3.6.).

Zur Berechnung der rechten Seite der Differentialgleichung wird das Analysengebiet, über das ein Gitternetz gelegt ist, in Dreiecke aufgeteilt, die sich nicht überlappen und an deren Eckpunkten die Windbeobachtungen zu finden sind. Die Zirkulation wird nun um jede dieser entstandenen dreieckigen Flächen bestimmt. Um dieses tun zu können, erfolgt eine lineare Interpolation der Windwerte an den Eckpunkten längs den Dreiecksseiten. Diese Interpolation kann zu großen Ungenauigkeiten führen, wenn nicht der Abstand der Eckpunkte im Vergleich zu den zu analysierenden Störungen klein ist. Außerdem ist es augenscheinlich, je kleiner die Dreiecksfläche, desto detaillierter kann eine Lösung für das Geopotential erfolgen. Es ergibt sich also für die Gestalt der Dreiecke die Forderung,

daß deren Seitenlängen und Flächen möglichst klein zu halten sind. Dieses geschieht, indem mittels der vorhandenen Windbeobachtungen versucht wird, gleichseitige Dreiecke herzustellen.

Während die Zirkulation auf ein Gebiet angewendet wird, ist im Gegensatz dazu die Vorticity ein Punktwert, d.h., daß aus diesem Grunde bei der Berechnung der Zirkulation für ein abgeschlossenes Gebiet nach Gl. (64) eine mittlere Vorticity über diesem Gebiet ermittelt wird. Folglich ist jedem Punkt innerhalb des Dreiecks diese durchschnittliche, relative Vorticity zuzuordnen, also auch den in den Dreiecken gelegenen Gitterpunkten. Mit Hilfe der Relaxationsmethode (s. 3.6.) wird im Anschluß daran eine Lösung für das Geopotential ϕ an den Gitterpunkten bestimmt.

Um auch an den Rädern des Analysegebietes die Lösung der rechten Seite der Gl. (64) zu gewährleisten, wurde hier aus bekannten Geopotentialdaten geostrophische Winde berechnet und statt gemessener Winde verwendet.

Bis zu diesem Stadium sind ausschließlich Winde für die Analyse benutzt worden. Nun besteht durch die geostrophische Beziehung ein Zusammenhang zwischen den gemessenen Winden und den Gradienten des Geopotentials an den Meßorten. Um auch diese Information in die Analyse eingehen zu lassen, werden die aus der Relaxation für die Gitterpunkte berechneten Geopotentialwerte auf die Windbeobachtungsstationen interpoliert. Mit diesen interpolierten Daten werden die Höhen für die vier der Stationen benachbarten Gitterpunkte entsprechend dem geostrophisch abgeleiteten Geopotentialgradienten bestimmt. Die Sätze der vier Gitterpunkte, die jede Windbeobachtung umgeben, gehen für eine neuerliche Lösung der Gl. (64) in die Analyse ein.

Die Abb. 27 beschränkt sich bei der in ihr enthaltenen schematischen Darstellung der AUBERTSchen Analysetechnik auf das Vorgehen bei der Bestimmung der Geopotential-

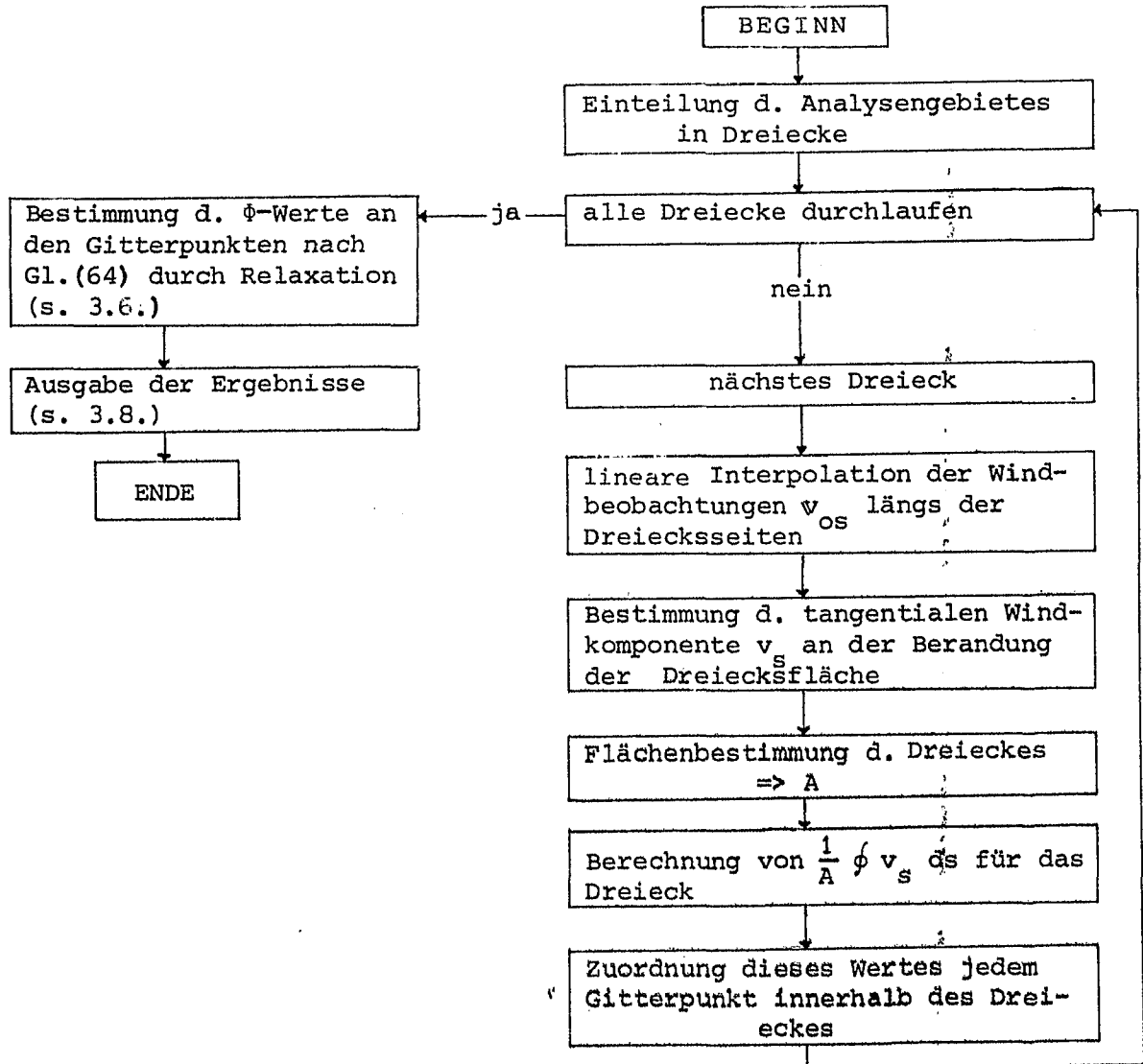


Abb. 27 Schematische Darstellung der Geopotentialanalyse mittels Zirkulation und Vorticity

werte mittels Zirkulation und Vorticity. Da die Modifizierung der vier die Windbeobachtungen umgebenden nach Relaxation berechneten geopotentiellen Gitterwerte nichts mit dem Prinzip der Analysentechnik zu tun hat, ist auf ihre schematische Abbildung verzichtet worden.

4.7. OBJEKTIVE ANALYSE MITTELS KUGELFLÄCHENFUNKTIONEN

Dieses Verfahren ist formal mit der Polynommethode identisch (s. 4.1.). Es ist in der Abteilung Maritime Meteorologie des Instituts für Meereskunde, Kiel, zu zahlreichen objektiven Analysen verschiedener meteorologischer Variabler für die Nordhalbkugel der Erde herangezogen worden, besonders durch K. ARPE. Bei dieser Methode wird eine empirische Funktion, die durch die Beobachtungen f_0 gegeben ist, mit Hilfe einer Reihenentwicklung nach Kugelflächenfunktionen möglichst genau angenähert.

Bevor die Analysenmethode selbst erläutert wird, soll zunächst die Frage nach dem Aussehen der Kugelflächenfunktionen interessieren. Sie sind auf das engste mit der Laplaceschen Differentialgleichung verknüpft. Diese lautet in Kugelkoordinaten

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} \right] = 0 \quad (65)$$

mit der Lösung

$$U_n(\rho \sin \theta \cos \lambda, \rho \sin \theta \sin \lambda, \rho \cos \theta) \cong \rho^n S_n(\theta, \lambda), \quad (66)$$

wobei ρ der Kugelradius, θ die Poldistanz und λ die geographische Länge ist. U_n wird als räumliche Kugelfunktion bezeichnet und S_n als die zu U_n gehörige Kugelflächenfunktion oder einfach Kugelfunktion n -ten Grades. S_n genügt der aus (65) hervorgehenden Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \lambda^2} + n(n+1) S_n = 0. \quad (67)$$

Es sollen nun explizite Ausdrücke für die Kugelflächenfunktionen gefunden werden; dazu wird der Ansatz

$$S_n = \Theta(\theta) \Lambda(\lambda) \quad (68)$$

gemacht. Diesen in Gl. (67) eingesetzt und die Gleichung mit $\sin^2 \theta / \Theta \Lambda$ multipliziert, ergibt

$$n(n+1) \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) = - \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \quad (69)$$

Nach der Differentiation von (69) nach λ folgt

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \right) = 0. \quad (70)$$

Da (70) gleich Null ist, muß die Klammer gleich einer Konstanten sein

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = - m^2 \quad (71)$$

mit

$$\Lambda = A_m \cos m \lambda + B_m \sin m \lambda. \quad (72)$$

Als nächster Schritt wird (71) in (69) eingesetzt und anschließend eine Multiplikation mit $\theta/\sin^2 \theta$ vorgenommen

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \theta = 0. \quad (73)$$

Führt man statt der Poldistanz θ die Veränderliche $\xi = \cos \theta$ ein, so kann (73) mit $d\xi/d\theta = -\sin \theta$ und $\sin^2 \theta = 1 - \xi^2$ umgeformt werden zu

$$(1-\xi^2) \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\theta}{d\xi} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right] \theta = 0. \quad (74)$$

Dieses ist eine Legendresche Differentialgleichung, die durch die zugeordneten Legendreschen Funktionen

$$\theta = P_n^m(\xi) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1-\xi^2)^{m/2} \frac{d^{m+n} (\xi^2-1)^n}{d\xi^{m+n}} \quad (75)$$

befriedigt wird. Sie sind Polynome $(n-m)$ -ten Grades in ξ , multipliziert mit $(1-\xi^2)^{m/2}$; besitzen $(n-m)$ -einfache zwischen -1 und $+1$ gelegene Nullstellen, die symmetrisch zu $\xi=0$, also spiegelbildlich zum Äquator liegen (s. Abb. 28).

Werden nun die Ergebnisse (72) und (75) in den Absatz (68) eingesetzt, ergibt sich die allgemeinste Form der Kugelflächenfunktion

$$S_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (A_m \cos m \lambda + B_m \sin m \lambda) P_n^m(\cos \theta). \quad (76)$$

Die speziellen Lösungen $\cos m \lambda P_n^m(\cos \theta)$ und $\sin m \lambda P_n^m(\cos \theta)$ der Gl. (76) werden bezeichnet als:

- a) für $m=1, \dots, n-1$: tesserale Kugelfunktionen;
diese verschwinden auf den Rändern von sphärischen Vierecken, die von den Meridianen $\lambda = \pi/2m, 3\pi/2m, \dots$ bzw. $\lambda = 0, \pi/m, 2\pi/m, \dots$ und den Breitenkreisen, entsprechend den Nullstellen der $P_n^m(\cos \theta)$ begrenzt werden;
- b) für $m=n$: sektorielle Kugelfunktionen;
diese haben bis auf einen konstanten Faktor die Form $\cos n \lambda \sin^n \theta$ bzw. $\sin n \lambda \sin^n \theta ((1-\xi^2)^{m/2}) = \sin^m \theta$, (s. Gl. (75)); $\sin^n \theta$ verschwindet nur an den Polen, $\cos n \lambda$ und $\sin n \lambda$ längs von Meridianen;
- c) für $m=0$: zonale Kugelfunktionen;
diese sind, entsprechend den Nullstellen der $P_n^0(\cos \theta)$, auf den Breitenkreisen gleich null (Abb. 28).

Nachdem nun die Form und die Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen geklärt sind, soll nun das Analysenverfahren mit ihnen diskutiert werden. Wie bereits oben erwähnt, wird mit Hilfe einer Reihendarstellung nach Kugelflächenfunktionen

$$F(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\theta, \lambda) \quad (77)$$

eine empirische Funktion $f_0(\theta, \lambda)$, die durch die Beobachtungen f_0 gegeben ist, möglichst genau angenähert.

Im folgenden sollen aus Gründen der Platzersparnis die Kugelfunktionen durch die Eulersche Formel dargestellt werden

$$S_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=-n}^{+n} c_{nm} e^{im\lambda} P_n^m(\cos \theta), \quad (78)$$

wobei jetzt von $m=-n$ bis $m=+n$ summiert wird, da die speziellen Lösungen der Differentialgleichung in der Eulerschen Schreibweise $e^{im\lambda} P_n^m(\cos \theta)$ und $e^{-im\lambda} P_n^m(\cos \theta)$ lauten.

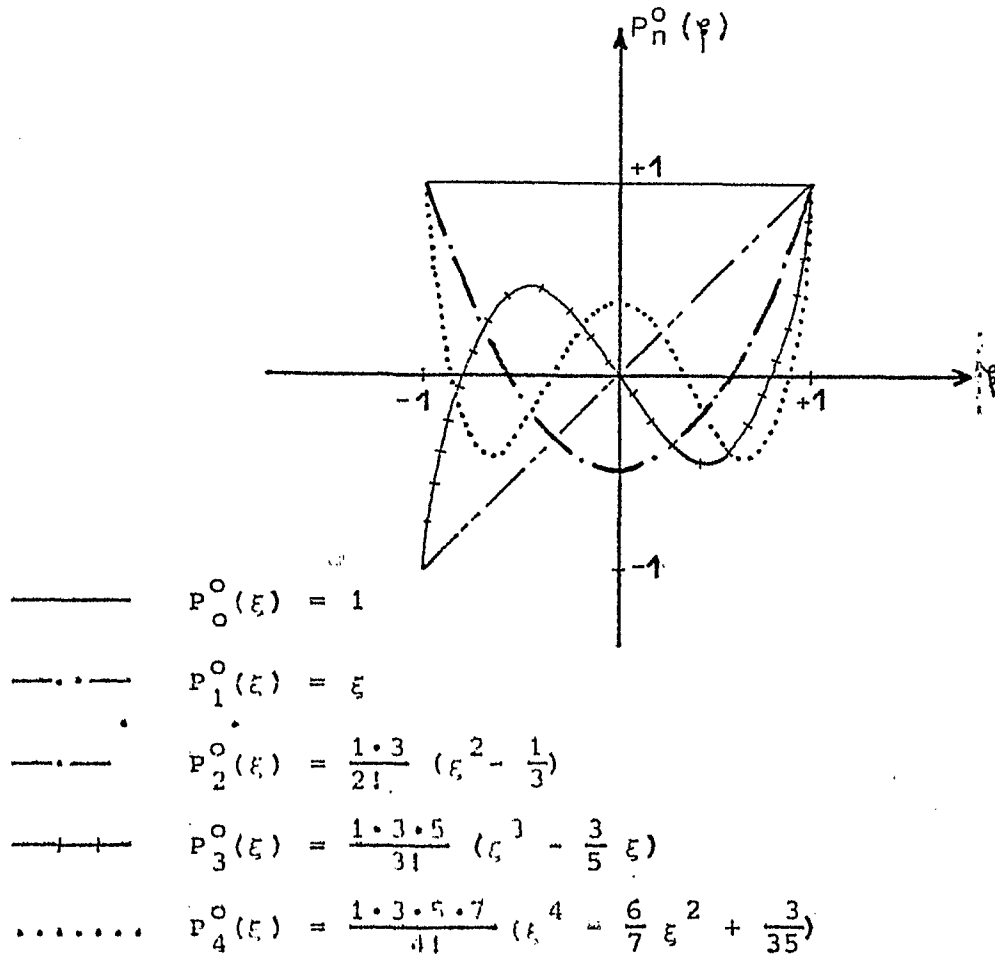


Abb. 28 Funktionsverlauf der ersten fünf Legendreschen Polynome für $m=0$ in Abhängigkeit von ξ . Man erkennt die n zwischen -1 und $+1$ zu $\xi=0$ symmetrisch liegenden Nullstellen. Aus den mit aufgeführten Formeln läßt sich ersehen, daß n mit dem Grad der Polynome übereinstimmt. Es treten in einer Gleichung immer nur gerade oder ungerade Potenzen auf.

Innerhalb der Summe der Gl. (77) gibt n jene Wellenzahl an, die noch bei der objektiven Analyse erfaßt werden soll. Wenn auch die Summation von $n=0$ bis $n=\infty$ die genaueste Darstellung eines meteorologischen Feldes-ergeben würde, so ist diese praktisch nicht ausführbar, d.h. die Reihenentwicklung wird bei einem endlichen Wert $n=p$ abgebrochen. Dieser Wert hängt einmal von rechenökonomischen Überlegungen ab, d.h. inwieweit eine Vergrößerung der Wellenzahl die Genauigkeit der Analyse beeinflusst, sowie von der Beobachtungsdichte des zu analysierenden Gebietes.

Ausgeschrieben bis zur Wellenzahl $n=p$ ergibt sich für (77)

$$F(\theta, \lambda) = c_{0,0} P_0^0 + c_{1,-1} e^{-i\lambda} P_1^{-1} + c_{1,0} P_1^0 + c_{1,1} e^{i\lambda} P_1^1 + \dots + c_{p,-p} e^{-pi\lambda} P_p^{-p} + \dots + c_{p,-1} e^{-i\lambda} P_p^{-1} + c_{p,0} P_p^0 + \dots + c_{p,p} e^{pi\lambda} P_p^p \quad (79)$$

Die noch unbekanntenen Koeffizienten $c_{n,m}$ werden mittels der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Dieses bedeutet, daß durch die Wahl der $c_{n,m}$ die Differenz zwischen der empirischen Funktion $f_o(\theta, \lambda)$ und der durch die Kugelflächenfunktionen angenäherten $F(\theta, \lambda)$ minimal werden soll

$$M = \sum_s \left[(F(\theta, \lambda) - f_o(\theta, \lambda))^2 \right]_s = \min, \quad (80)$$

hierbei ist s die Anzahl der benutzten Beobachtungen. Um die Gl. (80) zu erfüllen, wird gefordert, daß die partiellen Ableitungen von M nach den Koeffizienten $c_{n,m}$ null ergeben müssen

$$\partial M / \partial c_{n,m} = 0. \quad (81)$$

Die Bedingung ergibt ein lineares Gleichungssystem, deren Anzahl von Normalgleichungen der der $c_{n,m}$ entspricht

$$\begin{aligned} c_{0,0} \left[(P_o^o)^2 \right] + c_{1,-1} \left[e^{-i\lambda} P_o^o P_1^{-1} \right] + c_{1,0} \left[P_o^o P_1^o \right] + c_{1,1} \left[e^{i\lambda} P_o^o P_1^1 \right] + \dots + c_{p,p} \left[e^{pi\lambda} P_o^o P_p^p \right] &= \left[P_o^o f_o \right] \\ c_{0,0} \left[e^{-i\lambda} P_o^o P_1^{-1} \right] + c_{1,-1} \left[(e^{-i\lambda} P_1^{-1})^2 \right] + c_{1,0} \left[e^{-i\lambda} P_1^{-1} P_1^o \right] + c_{1,1} \left[e^{-i\lambda} e^{i\lambda} P_1^{-1} P_1^1 \right] + \dots \\ \dots + c_{p,p} \left[e^{-i\lambda} e^{pi\lambda} P_1^{-1} P_p^p \right] &= \left[e^{-i\lambda} P_1^{-1} f_o \right] \\ c_{0,0} \left[P_o^o P_1^o \right] + c_{1,-1} \left[e^{-i\lambda} P_1^{-1} P_1^o \right] + c_{1,0} \left[(P_1^o)^2 \right] + c_{1,1} \left[e^{i\lambda} P_1^o P_1^1 \right] + \dots \\ \dots + c_{p,p} \left[e^{pi\lambda} P_1^o P_p^p \right] &= \left[P_1^o f_o \right] \\ \vdots & \\ c_{0,0} \left[e^{pi\lambda} P_o^o P_p^p \right] + \dots \dots + c_{p,p} \left[(e^{pi\lambda} P_p^p)^2 \right] &= \left[e^{pi\lambda} P_p^p f_o \right]. \end{aligned} \quad (82)$$

Hieraus können mit Hilfe bekannter Lösungsmethoden die Unbekannten $c_{n,m}$ bestimmt werden (s. 3.5.). Die eckige Klammer [] zeigt die Summation über s Beobachtungen an.

Mittels des beschriebenen Systems können Feldverteilungen von der gesamten Erde dargestellt werden. Sollte dagegen nur eine Hemisphäre interessieren, so ist es ausreichend, nur diejenigen Kugelflächenfunktionen bei der Analyse zu betrachten, die spiegelbildlich zum Äquator liegen. Für symmetrische Kugelflächenfunktionen $S_n(\theta, \lambda)$ gilt: $(n+m)$ gerade, was für das Beispiel $m=0$ aus der Abb. 28 zu ersehen ist. Damit ändert sich die Gl. (79) wie folgt ab

$$F(\theta, \lambda) = c_{0,0} P_0^0 + c_{1,-1} e^{-i\lambda} P_1^{-1} + c_{1,1} e^{i\lambda} P_1^1 + \dots + c_{p,-p} e^{-pi\lambda} P_p^{-p} + c_{p,-(p-2)} e^{-(p-2)i\lambda} P_p^{-(p-2)} + \dots + c_{p,p} e^{pi\lambda} P_p^p. \quad (79a)$$

Das formale Vorgehen bei der Berechnung der Koeffizienten geschieht wie oben. Es ergibt sich dann ein neues, zu lösendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_{0,0} \left[(P_0^0)^2 \right] + c_{1,-1} \left[e^{-i\lambda} P_0^0 P_1^{-1} \right] + c_{1,1} \left[e^{i\lambda} P_0^0 P_1^1 \right] + \dots + c_{p,p} \left[e^{pi\lambda} P_0^0 P_p^p \right] &= \left[P_0^0 f_0 \right] \\ c_{0,0} \left[e^{-i\lambda} P_0^0 P_1^{-1} \right] + c_{1,-1} \left[(e^{-i\lambda} P_1^{-1})^2 \right] + c_{1,1} \left[e^{-i\lambda} e^{i\lambda} P_1^{-1} P_1^1 \right] + \dots & \\ \dots + c_{p,p} \left[e^{-i\lambda} e^{pi\lambda} P_1^{-1} P_p^p \right] &= \left[e^{-i\lambda} P_1^{-1} f_0 \right] \\ c_{0,0} \left[e^{i\lambda} P_0^0 P_1^1 \right] + c_{1,-1} \left[e^{-i\lambda} e^{i\lambda} P_1^{-1} P_1^1 \right] + c_{1,1} \left[(e^{i\lambda} P_1^1)^2 \right] + \dots & \\ \dots + c_{p,p} \left[e^{i\lambda} e^{pi\lambda} P_1^1 P_p^p \right] &= \left[e^{i\lambda} P_1^1 f_0 \right] \\ \vdots & \vdots \\ c_{0,0} \left[e^{pi\lambda} P_0^0 P_p^p \right] + \dots \dots + c_{p,p} \left[(e^{pi\lambda} P_p^p)^2 \right] &= \left[e^{pi\lambda} P_p^p f_0 \right]. \end{aligned} \quad (82a)$$

Häufig bleiben bei verschiedenen Analysen die benutzten Beobachtungsstationen die gleichen, d.h., daß der Wert der Determinante, die sich aus der linken Seite des Gleichungssystems ergibt, gleich bleibt, da hier nur die

geographische Lage der Beobachtungspunkte eingeht. Daraus folgt eine Vereinfachung bei der Berechnung der Koeffizienten $c_{n,m}$. Im weiteren Verlauf soll mit der Gl. (79a) und dem Gleichungssystem (82a) weitergerechnet werden, doch gilt für (79) und (82) entsprechendes.

Der Einfachheit halber sollen die folgenden Abkürzungen eingeführt werden

$$q_1 = P_0^0, q_2 = e^{-i\lambda P_1^{-1}}, q_3 = e^{i\lambda P_1^1}, q_4 = e^{-2i\lambda P_2^{-2}}, \dots, q_l = e^{pi\lambda P_p^p}$$

und

$$c_1^* = c_{0,0}, c_2^* = c_{1,-1}, c_3^* = c_{1,1}, c_4^* = c_{2,-2}, \dots, c_j^* = c_{p,p}.$$

Außerdem werden mit $D_1, D_2, D_3, \dots, D_j$ Determinanten bezeichnet, bei denen jeweils die erste, zweite, dritte oder j -te Spalte der einfachen Matrix des Gleichungssystems durch die Spalte der erweiterten Matrix ersetzt worden ist. Die Berechnung der Determinanten D_j erfolgt nach den Elementen, die die Beobachtungen enthalten

$$\begin{aligned} D_1 &= [q_1 f_0] A_{11} + [q_2 f_0] A_{21} + [q_3 f_0] A_{31} + \dots + [q_l f_0] A_{l1} \\ D_2 &= [q_1 f_0] A_{12} + [q_2 f_0] A_{22} + [q_3 f_0] A_{32} + \dots + [q_l f_0] A_{l2} \\ &\vdots \\ D_j &= [q_1 f_0] A_{1j} + [q_2 f_0] A_{2j} + [q_3 f_0] A_{3j} + \dots + [q_l f_0] A_{lj} \end{aligned} \quad (83)$$

Mit A_{ij} werden die sich ergebenden Unterdeterminanten bezeichnet, wobei i die Zeile und j die Spalte angibt, in denen das Element steht, nach dem entwickelt wird.

Nach der Kramerschen Regel ergeben sich die c_j^* aus

$$c_j^* = D_j / D, \quad (84)$$

dabei ist D die Determinante der einfachen Matrix des Gleichungssystems (82a). Setzt man die D_j aus (83) in (84)

ein, so folgt

$$c_j^* = \sum_i \frac{A_{ij}}{D} [q_i f_o] = \sum_i \frac{A_{ij}}{D} \left(\sum_s q_{is} f_{os} \right). \quad (85)$$

Diese Gl. (85) stellt für die Annahme gleicher Beobachtungspunkte für verschiedene Analysen eine wesentliche Vereinfachung bei der Berechnung der Koeffizienten $c_{n,m}$ dar, denn die Faktoren A_{ij}/D und q_i brauchen nur einmal berechnet zu werden.

Mit den ermittelten Koeffizienten wird in die Ausgangsgleichung (79a) eingegangen und Gitterwerte für eine meteorologische Variable berechnet, indem die Poldistanz θ und die geographische Länge λ entsprechend den kartesischen Gitterpunktskoordinaten eingesetzt wird. Eine Transformation der kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten wird in 3.1. gegeben.

ARPE hat bei der Erstellung der objektiven Analysen über der Nordhalbkugel über sämtliche in dem zu analysierenden Gebiet vorhandenen Beobachtungen in einem Rechengang summiert. Die Schwierigkeiten, die sich bei der Berechnung der Analyse auf Grund der geringen Beobachtungsdichte über dem Pazifik einstellten, wurden dadurch beseitigt, daß an gewissen Orten des Ozeans (sogenannte fiktive Stationen) klimatologische Mittelwerte als zusätzliche Beobachtungen eingesetzt wurden.

Ebenso wie bei der Polynommethode kann jeder Beobachtung durch Einführen von Wichtungsfaktoren in Formel (80) ein Gewicht verliehen werden, was in der Praxis auch getan wurde. Diese wurden von ARPE subjektiv nach Erfahrungswerten gewählt, dabei bekamen dichtliegende Stationen oder solche mit erfahrungsgemäß fehlerhaften Meldungen kleine Gewichte, während in dem umgekehrten Fall große verliehen wurden.

Doch können die Wichtungen auch objektiv verteilt werden, wie es z.B. BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/ bei ihrer Korrek-

tionsmethode getan haben (s. 4.2.1.). Um einen Beobachtungsort herum wird ein Kreis mit einem vorher zu bestimmenden Radius geschlagen und die darin enthaltene Stationszahl ermittelt, wobei der obige Beobachtungspunkt mitgezählt wird. Der reziproke Wert der Stationsdichte ist dann das Gewicht, mit dem die Beobachtung multipliziert wird.

Eine andere Art der objektiven Wichtungsfindung geht auf FECHNER zurück. Zwischen den einzelnen Meßorten werden Liniensegmente gezogen, derart, daß sich Dreiecke ergeben. Dem Gewicht einer Beobachtung entspricht dann die Summe der sie umgebenden Dreiecksflächen. Es bestehen verschiedene Möglichkeiten, Dreiecke zu bilden. AKIMA/1/ beschreibt eine Methode, bei der zuerst die beiden Beobachtungspunkte herausgesucht werden müssen, die den geringsten Abstand voneinander haben. Beide werden mit einer Linie verbunden. Anschließend ist das nächste Punktepaar mit dem kleinsten Abstand ausfindig zu machen und mit einem Liniensegment zu verbinden, falls dieses das erstere nicht schneidet. Der zweite Schritt wird solange wiederholt, bis alle möglichen Stationspaare erschöpft sind.

Die objektive Analyse mit Hilfe von Kugelflächenfunktionen wurde von ARPE bis zur Wellenzahl $n=15$ vorgenommen, was einer noch bei der Felddarstellung erfaßten Wellenlänge von ca. 2600 km entspricht. Um noch kleinere Wellenstörungen zu beschreiben, muß die Wellenzahl n demgemäß erhöht werden, was bei ARPE aus rechentechnischen Gründen nicht möglich war.

Abb. 29 zeigt schematisch das Vorgehen zur Berechnung einer objektiven Analyse für ein variierendes Beobachtungsnetz. Die gemeldeten Beobachtungen f_0 sowie die dazugehörigen geographischen Lagen der Meßorte (θ, λ) werden in das Gleichungssystem (82) bzw. (82a) eingesetzt und mit der in 3.5. aufgezeigten Methode die unbekanntenen Koeffizienten $c_{n,m}$ ermittelt. Mit diesen wird dann in die Gl.

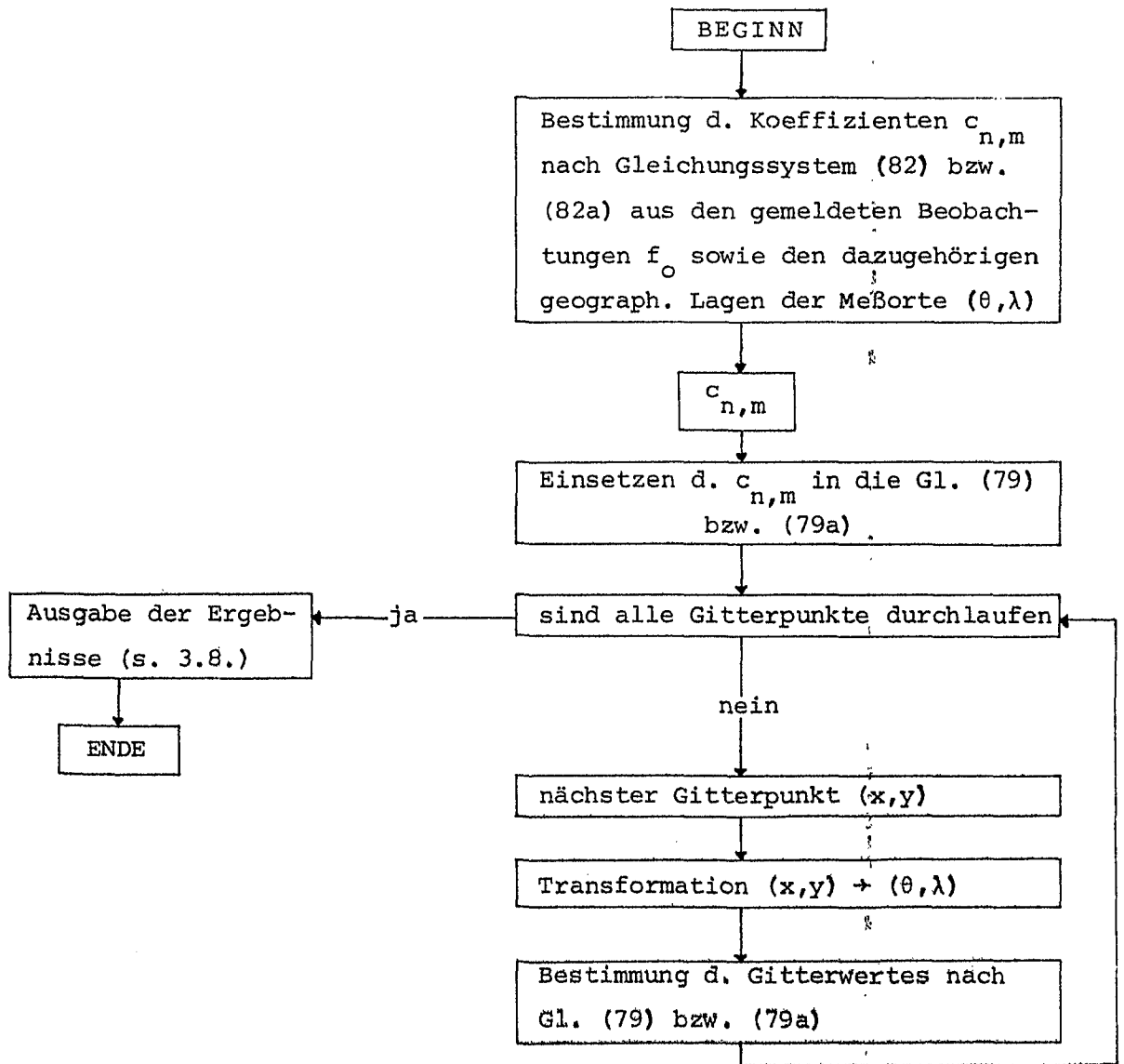


Abb. 29 Schema zur Erstellung einer objektiven Analyse mittels Kugelflächenfunktionen (variierendes Beobachtungsnetz)

(79) bzw. (79a) eingegangen. Zur Bestimmung der Gitterwerte der Analyse werden die Koordinaten der Gitterpunkte in θ und λ nacheinander in die Gl. (79) bzw. (79a) eingesetzt. (Umrechnung kartesischer in Kugelkoordinaten, s. 3.1.).

Die folgende Abb. 30 zeigt das gleiche Analysensystem für ein konstantes Beobachtungsnetz. Aus der geographischen Lage der Meßorte werden die Determinante D , die Unterdeterminanten A_{ij} und für jede Station die Werte der Funk-

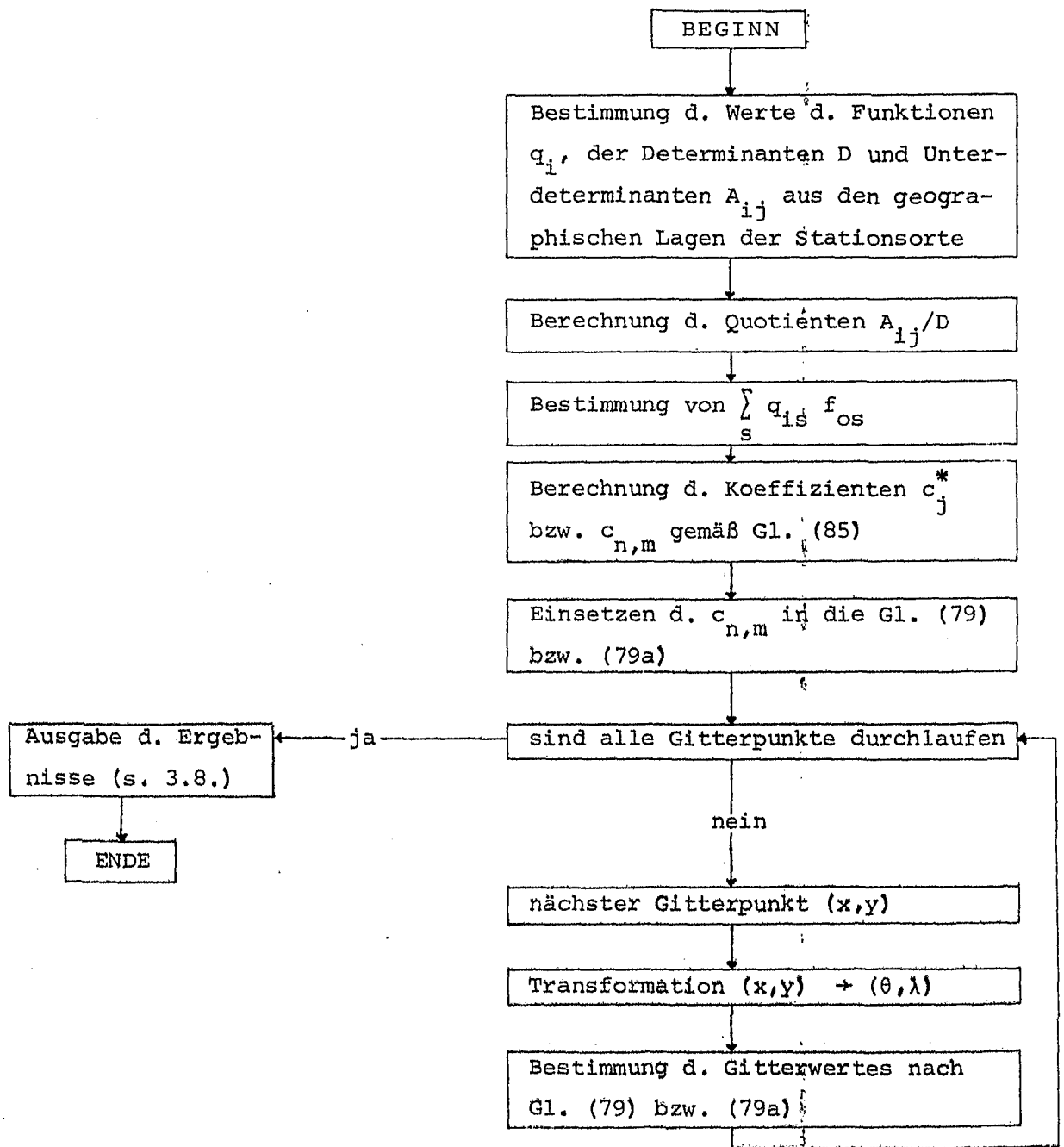


Abb. 30 Schema zur Erstellung einer objektiven Analyse mittels Kugelflächenfunktionen (konstantes Beobachtungsnetz)

tionen q_i berechnet. Daran anschließend werden die Beobachtungen f_{os} mit ihren entsprechenden Stationswerten q_{is} der Funktionen q_i multipliziert und alle Produkte der einzelnen Funktionen q_i aufsummiert. Die Bestimmung der Unbekannten c_j^* bzw. $c_{n,m}$ erfolgt dann gemäß Gl. (85).

Die Gitterwerte der Analyse werden wie oben ermittelt.

Die Quotienten A_{ij}/D und die Werte g_{is} brauchen bei dem festen Beobachtungsnetz nur einmal berechnet zu werden und können dann als Konstanten für weitere Analysen im Computer gespeichert werden.

5. ABSCHLIESSENDE BETRACHTUNGEN

Die Wahl, welches der Analysenverfahren für eine objektive Felddarstellung benutzt werden soll, hängt von verschiedenen Gesichtspunkten ab. Grundsätzlich ist man natürlich daran interessiert, eine möglichst genaue Analyse zu erhalten. Doch sind auch hier Kompromisse zu schließen, die von dem Verwendungszweck der Analyse sowie von der Bauart der zur Verfügung stehenden Rechenmaschine abhängen. Bei rein wissenschaftlichen Anwendungen wird sicher eine sehr ausführliche Analyse bevorzugt, die möglichst auch noch die kleinskaligen Störungen miteinschließt. Hier sind Einschränkungen nur bei der Erstellung der Analyse zu berücksichtigen, die sich aus den technischen Daten der verwendeten Rechenmaschine ergeben (Anzahl der Speicherplätze...), während die Rechenzeit mehr eine untergeordnete Rolle spielt. Dagegen müssen die routinemäßigen Analysen im Wetterdienst unter einem Zeitzwang gefertigt werden, da sie zu einem bestimmten Termin zur Verfügung stehen müssen und außerdem noch die Anfangswerte für eine numerische Wettervorhersage liefern, die ebenfalls termingerecht erstellt werden muß. Nun braucht eine sehr genaue Analyse nicht unbedingt eine sehr gute Vorhersage zu ergeben, da kleinskalige Störungen in der Analyse durch numerische Vorhersagemodelle in einer Weise eine Verstärkung erfahren können, die der Wirklichkeit nicht entspricht. Folglich wird man als Anfangswerte einer Vorhersage eine etwas geglättete Analyse fordern als für wissenschaftliche Zwecke.

Die Eignung der Verfahren soll unabhängig von ihrer Verwendung bei Vorhersagen betrachtet werden, d.h. also, nur

im Hinblick auf wissenschaftliche Untersuchungen. Hier wird, wie oben erwähnt, eine hohe Genauigkeit von der objektiv ermittelten Felddarstellung verlangt, so daß das Kriterium "Genauigkeit" in der Hauptsache den Ausschlag für die Auswahl eines objektiven Analyseverfahrens bildet.

Nun ist es schwierig, eine absolute Aussage über die Genauigkeit einer Analyse zu machen, da die genaueste, dem wirklichen Zustand der Atmosphäre entsprechende Feldverteilung einer meteorologischen Variablen, unbekannt ist, an der dann die objektiv ermittelte gemessen werden könnte. Bekannt ist der Atmosphärenzustand nur an einzelnen Punkten, den Beobachtungsstationen, während zwischen ihnen nur durch Interpolation Zustandswerte erhalten werden können, die immer mit einem Fehler behaftet sein werden. Hinzu kommt, daß die Meßwerte selbst ebenfalls Fehler enthalten, die zwar durch im Analysenprogramm eingebaute Kontrollen (s. 2.1.2.3.) eingeschränkt, aber nie vollkommen ausgeschlossen werden können, da mit ihnen ausschließlich eine Beseitigung bzw. Verbesserung grober Fehler folgt.

So beschreiten die einzelnen Autoren verschiedene Wege, einen Eindruck über das Leistungsvermögen der objektiven Analyseverfahren zu vermitteln, so daß die im folgenden angegebenen Genauigkeitsaussagen nicht unbedingt miteinander vergleichbar sind.

Einer dieser Wege ist, eine subjektiv und eine objektiv gefertigte Analyse zu vergleichen und deren mittleren quadratischen Fehler oder deren Korrelation anzugeben. Eine andere Methode ist der Vergleich der Werte einer objektiv erstellten Analyse an den Beobachtungspunkten mit den entsprechenden Beobachtungswerten. Neben diesen beiden genannten Möglichkeiten wird folgende dritte häufig angewendet.

Eine Station s ist von mehreren anderen umgeben. Mit den

Beobachtungen der s umgebenden Stationen wird eine Interpolation mittels des objektiven Analysenverfahrens auf den Stationsort s vorgenommen. Der sich ergebende interpolierte Wert wird mit dem beobachteten der Station s verglichen. Erfolgen mehrere Interpolationen für verschiedene Beobachtungsorte, kann ebenfalls, wie in den Methoden zuvor, ein mittlerer quadratischer Fehler angegeben werden.

Die dritte Methode wird gegenüber der zweiten schlechtere Genauigkeitswerte, also größere mittlere quadratische Fehler liefern, da die Interpolation auf den Stationsort s keinen Gebrauch von der Beobachtung an dieser Station selbst macht und deshalb nicht alle verfügbaren Daten in die Berechnungen einbezieht.

JOHNSON/22/ macht mittels der dritten Methode Aussagen über die Genauigkeit der Polynommethode (s. 4.1.). Dabei berücksichtigt er zunächst sechs Stationen mit ihren Geopotential- und Windmessungen. Mit ihnen interpoliert er einen Geopotentialwert für die Station s mit Hilfe eines Polynoms zweiten Grades. Das benutzte Stationsnetz selbst repräsentiert eine hohe Beobachtungsdichte. Unter diesen genannten Voraussetzungen kommt es zu einer zufriedenstellenden Übereinstimmung zwischen interpoliertem und beobachtetem Wert an der Station s . Die Sachlage ist geändert, wenn die Winde bei der Interpolation nicht einbezogen werden, so daß die Anzahl der zur Verfügung stehenden Beobachtungen gerade der der unbekanntenen Koeffizienten des Polynoms entspricht. In diesem Fall wächst die Differenz zwischen Meß- und Interpolationswert beträchtlich. Werden jetzt, zusätzlich zu den sechs zwei weitere Beobachtungsstationen hinzugefügt, und bleiben die Winde weiterhin unberücksichtigt, so wird die vorhergehende Differenz verringert, ist aber immer noch größer als bei der Benutzung von Windbeobachtungen. Ein Polynom dritten Grades ergibt für sechs verwendete Stationen mit Geopotential- und Winddaten eine nur ge-

ring bessere Anpassung des interpolierten Wertes an den beobachteten.

Bei der Untersuchung, welchen Effekt die Abänderung der Stationsverteilung relativ zu s und die Abänderung der verfügbaren Daten auf die Genauigkeit des Analyseverfahrens haben, wurden folgende Ergebnisse erzielt. Betrachtet wurde wieder ein Polynom zweiten Grades. Es wurde festgestellt, daß der mittlere quadratische Fehler kleiner ist, wenn mehr geopotentielle Höhendaten als Winde benutzt werden gegenüber dem umgekehrten Fall. Bei der Einbeziehung von fünf, vier oder drei Stationen in die Interpolationsrechnung wurde ein Kompromiß in der Stationsauswahl zwischen der Nähe der Stationen und der Regelmäßigkeit ihrer Verteilung zu s getroffen. Hierbei entsprechen die ermittelten Genauigkeiten denen der sechs-Stationen-Interpolation. Die drei Stationen wurden dabei in einem Dreieck angeordnet, derart, daß s ungefähr im Zentrum des Dreiecks lag. Die Differenz zwischen interpoliertem und beobachtetem Wert wuchs mit zunehmender Dreiecksgröße.

Bisher wurde die Lage der berücksichtigten Stationen möglichst symmetrisch zur Station s ausgesucht. Ist dieses nicht der Fall, wandelt sich das Interpolationsproblem fast zu einem Extrapolationsproblem, und die Fehler werden im Vergleich zu den vorhergehenden groß.

Für ein Stationsnetzwerk mit geringer Dichte, wie über den Ozeanen vorhanden, werden beträchtlich größere mittlere quadratische Fehler als in den vorhergehenden Berechnungen registriert. Ein Polynom $v=3$ ergibt für ein dünnes Beobachtungsnetz gering bessere Ergebnisse als ein quadratisches Polynom.

BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/ testen die Genauigkeit ihrer Korrektionsmethode (s. 4.2.1.) über eine Geopotentialanalyse des 500 mb-Niveaus auf dem Wege des Vergleiches einer objektiven mit einer konventionell (subjektiv) erstellten Analyse. Das betrachtete Analysegebiet schließt

mit dem Nordatlantik auch ein Gebiet mit geringer Dichtendichte ein. Der errechnete mittlere quadratische Fehler zwischen beiden Analysen über dem gesamten Analysenbereich beträgt 25 gpm. Im Vergleich dazu wurde für ein dichtes Beobachtungsgebiet (Europa) nur ein Fehler von 20 gpm ermittelt. Diese angegebenen Differenzen entsprechen jenen, die erhalten werden, wenn zwei konventionell, vom gleichen Beobachtungstermin von zwei verschiedenen Analytikern erstellte Analysen, miteinander verglichen werden.

Eine weitere Genauigkeitsuntersuchung wurde von den Autoren vorgenommen, indem sie nach der zweiten oben beschriebenen Methode vorgehen. Hier bestimmten sie einen mittleren quadratischen Fehler von 22 gpm. (Um einen Eindruck über die Aussagekraft des letztgenannten Wertes zu bekommen, sei bemerkt, daß kein wesentlich kleinerer Vergleichsfehler als 20 gpm zu erwarten ist, da die Beobachtungen, die zu dem Vergleich herangezogen werden, selbst einen Fehler der Größenordnung 15 gpm aufweisen. Fehler dieser Größenordnung können durch Kontrollverfahren (s. 2.1.2.3.) nicht mehr aufgespürt werden.)

Für die bisher getätigten Vergleiche wurden objektive Analysen herangezogen, deren Anfangsfelder mit aus 12-stündigen Vorhersagen konstruiert worden sind (s. 4.2.1.). Werden dazu 24-stündige Vorhersagen benutzt, nimmt der mittlere quadratische Fehler zu. Außerdem wurde noch untersucht, wie sich der Fehler abändert, wenn statt des herkömmlichen Anfangsfeldes eine echte fertige Analyse genommen und mit ihr eine zweite erstellt wird. In diesem Falle ergeben sich im Durchschnitt nur geringe Verbesserungen, doch kann in Gebieten, wo zuvor die Vorhersage unbefriedigend war, wie auch immer eine Verbesserung verzeichnet werden.

BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/ weisen nach, daß in Gebieten mit guter Datenabdeckung ihre Methode gegenüber vereinzelt auftretenden groben Meßfehlern relativ unempfindlich ist.

Trotz dieser geringen Empfindlichkeit reduziert, das systematische Erscheinen solcher groben Meßfehler allgemein die Genauigkeit der objektiven Analyse beträchtlich, woraus sich die unbedingte Notwendigkeit einer Fehlerkontrolle der Eingangsdaten ergibt (s. 2.1.2.3.).

Aus einer Untersuchung von DÖÖS u. EATON/10/ kann entnommen werden, daß bei Einführung zusätzlicher Daten zu den normalen Beobachtungen über Gebieten mit geringer Stationsdichte (s. 2.1.2.4.) eine Verbesserung der Analysengenauigkeit erzielt werden kann. Die entsprechenden mittleren quadratischen Fehler lauten für einen Vergleich konventionelle Analyse gegenüber objektiver ohne zusätzliche Daten 44 gpm und mit zusätzlichen Daten 39 gpm.

CRESSMAN/8/ macht über die von ihm modifizierte Korrektionsmethode Genauigkeitsaussagen. Auch er betrachtet Geopotentialanalysen der 500 mb-Fläche. Zusätzliche Dateninformationen von schon korrigierten Gitterpunkten werden in der zu fertigenden Analyse nicht verarbeitet (vgl. 4.2.2.). Der Autor beschreibt das Leistungsvermögen seiner objektiven Analysenmethode über den Vergleich der Werte der Analyse am Beobachtungspunkt mit denen der Beobachtungen. Die Ergebnisse werden in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt:

| <u>bei der Analyse benutzte Daten</u> | <u>Anfangsnäherung</u> | <u>mittlerer quadrati- scher Fehler (gpm)</u> |
|---|------------------------|---|
| Geopotential u. Wind | 24-stündige Vorhersage | 14,0 |
| nur Geopotential | 24-stündige Vorhersage | 18,2 |
| nur Wind | 24-stündige Vorhersage | 14,6 |
| Geopotential u. Wind | 12-stündige Vorhersage | 16,2 |

Am auffälligsten ist zuerst, daß die CRESSMANSche Korrektionsmethode scheinbar wesentlich bessere Ergebnisse liefert, als die von BERGTHORSSON u. DÖÖS/4/. Doch täuscht dieser Eindruck entschieden, denn CRESSMAN/8/ beschränkt

sich bei seinen Genauigkeitsbetrachtungen auf den gut mit Beobachtungsdaten abgedeckten nordamerikanischen Kontinent, während die schwedischen Autoren ebenfalls den Nordatlantik einbezogen haben (vgl. oben), so daß im Endeffekt beide Korrektionsmethoden ungefähr gleiche Genauigkeiten aufweisen dürften.

Gemäß der Tabelle liegt der Schluß nahe, daß in einem Gebiet mit guter Datenabdeckung beim Betrachten des 500 mb-Niveaus der größte Informationsteil für die objektive Analyse schon in den Winden enthalten ist, während die beobachteten Geopotentiale relativ überflüssig erscheinen.

Auch in Gebieten mit dichtem Beobachtungsnetz sind die Ergebnisse nicht unabhängig von den Anfangsfeldern, wie die Tabelle zeigt. Der kleinere Geopotentialfehler, der mit der 24-stündigen Vorhersage als Anfangsnäherung erhalten wird, schreibt CRESSMAN/8/ wahrscheinlichen täglichen Schwankungen der 500 mb-Fläche zu. Allerdings ist hier darauf hinzuweisen, daß von BERGTHORSSON u. DÖÖS /4/ gerade umgekehrte Ergebnisse gefunden wurden, d.h. es haben sich bei ihren Berechnungen bei der Benutzung der 24-stündigen Vorhersage für die Konstruktion des Anfangsfeldes die schlechteren Ergebnisse eingestellt.

Die Genauigkeit des optimalen Interpolationsverfahrens (s. 4.4.) wird von GANDIN/14/ über die Analyse des 500 mb-Geopotentials mittels der auf S. 101 beschriebenen dritten Methode geprüft. Mit dieser objektiven Analysenmethode werden für ein dichtes Beobachtungsnetz mittlere quadratische Fehler erreicht, die größenordnungsmäßig den vorhergehenden gleichkommen, wobei die benutzten Geopotentialdaten, wie bei den anderen Verfahren auch, keine groben Meßfehler mehr enthalten sollen. Unter gleichen Bedingungen ergeben sich dagegen für sehr weiträumige Stationsnetze wesentlich höhere Fehlerwerte als zuvor. Diese können das zweieinhalbfache des Fehlers betragen, der für ein dichtes Meßnetz ermittelt worden ist.

Werden bei der Interpolation grobe Meßfehler zugelassen, wird die Genauigkeit des interpolierten Wertes beträchtlich reduziert (um 10 - 15 gpm). Dieses gilt sowohl für die eine, als auch für die andere Datenabdeckung.

Setzt man das in die Analysenrechnungen eingehende Maß des Beobachtungsfehlers η gleich Null, nimmt man also an, es gäbe in den übermittelten und kontrollierten Daten überhaupt keine Beobachtungsfehler, obwohl kleine in den benutzten Daten immer vorhanden sein werden, sinkt die Genauigkeit um ca. 10 gpm.

Der Genauigkeitsfehler bei der dynamischen Analysenmethode (s. 4.5.) innerhalb des Datenloches geht gegen eine bestimmte untere Grenze, die einem Gleichgewicht zwischen zwei gegensätzlichen Effekten entspricht. Da gibt es zunächst den Effekt des kontinuierlichen Eingehens neuer Dateninformation in das Datenloch. Hieraus folgt immer eine Abnahme des mittleren quadratischen Windfehlers innerhalb des Loches. Er ist proportional zu dem Fehler selbst, proportional zu der durchschnittlichen absoluten Flußgeschwindigkeit über die Ränder des Loches und invers proportional zu den linearen Dimensionen des Loches.

Der zweite, entgegengesetzte Effekt, der aus der Ungenauigkeit des Vorhersagesystems herrührt, wird immer dazu tendieren, den Windfehler anwachsen zu lassen. Er ist proportional der mittleren Zeit, die für die einzelnen Flusselemente erforderlich ist, um das Loch zu überqueren, proportional dem Quadrat der linearen Dimensionen des Datenloches und proportional dem mittleren Quadrat der individuellen Änderungsrate der absoluten Vorticity.

RICHARDSON/31/ betrachtet bei seinen Genauigkeitsuntersuchungen zwei quadratische Datenlöcher unterschiedlicher Größe. Das kleinere mißt 1200x1200 km, das größere 2100x2100 km, was ungefähr der halben Größe des nördlichen Atlantiks entspricht. Außerdem verwendet der Autor

zwei unterschiedliche Beobachtungsintervall, 12- und 24-stündige. Wie zu erwarten, ergeben sich für beide Löcher bei dem 12-stündigen Intervall die besseren Ergebnisse. Für das kleinere Datenloch werden geringere kleinere mittlere quadratische Windfehler ermittelt.

Eine weitere Untersuchung machte RICHARDSON/31/, indem er durch das datenleere Gebiet einen Streifen mit Beobachtungen legte, die einmal senkrecht und einmal längs zur herrschenden Windgeschwindigkeit angeordnet wurden, wobei die erste Richtung zu besseren Genauigkeiten führte. Diese sind auch deutlich besser gegenüber dem Fall ohne zusätzliche Beobachtungen.

Die Abb. 31 zeigt die Änderung des mittleren quadratischen Geopotentialfehlers in Abhängigkeit von der Anzahl

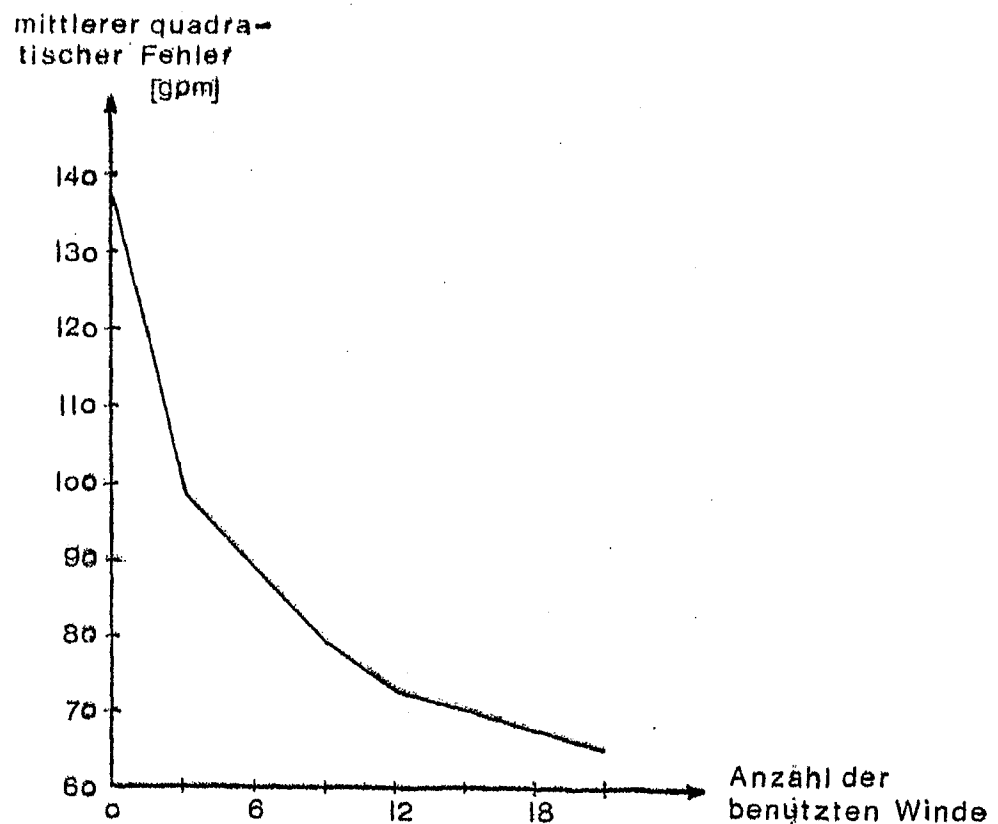


Abb. 31 Analysengenauigkeit als Funktion der Datendichte (bezogen auf das Gebiet des nordamerikanischen Kontinents)

der verwendeten Windbeobachtungen für das Analysensystem AUBERTS/2/ (s. 4.6.). Er vergleicht dabei die objektive Analyse, die nur mittels Windbeobachtungen gefertigt wurde, um die Bedeutung allein der Gleichung (4. (64)) zu testen, mit einer subjektiven Analyse, die mit Geopotential- und Windbeobachtungen erstellt wurde. Aus der benutzten Grundgleichung ist ersichtlich, daß, je mehr Dreiecke in einem Analysengebiet für die rechte Seite berechnet werden, desto detaillierter wird die sich ergebende Felddarstellung für ϕ sein. Sollten nämlich die Windbeobachtungen derart rar sein, daß ein großes Dreiecksgebiet große Werte sowohl zyklonischer als auch antizyklonischer Vorticity enthält, wird die durchschnittlich berechnete Zirkulation ein kleines Mittel zwischen positiver und negativer Vorticity sein. Daraus folgt für den optimalen Gebrauch dieser Analysentechnik, daß die Beobachtungen möglichst dicht liegen sollten, so daß die Dreiecksgebiete kleiner als der Scale des relativen Vorticityfeldes sind.

Es sei noch bemerkt, daß eine signifikante Verbesserung in der Genauigkeit des analysierten Geopotentials eintritt, wenn die Höhenbeobachtungen mitberücksichtigt werden, was für eine vernünftige Anwendung dieses Verfahrens nicht versäumt werden sollte.

Angaben über die Analysengenauigkeit des iterativen Verfahrens (s. 4.3.) und der Analyse mit Hilfe von Kugelflächenfunktionen (s. 4.7.) sind von HAUG/18/ bzw. ARPE nicht gemacht worden. Doch sind auf Grund einer gewissen Ähnlichkeit des iterativen Verfahrens zur Korrektionsmethode nach CRESSMAN/8/ ähnliche Resultate in Hinblick auf Genauigkeit zu erwarten. Auch im Falle der Analyse mit Kugelflächenfunktionen dürften sich für deren Genauigkeit infolge der Ähnlichkeit zur Polynommethode vergleichbare Ergebnisse zu dieser einstellen.

Die Aussage, welches der in dieser Arbeit beschriebenen

objektiven Analysenverfahren in letzter Konsequenz vorzuziehen ist, ist mit den hier angegebenen Genauigkeiten nicht zu entscheiden, da jede Analysenmethode über andere Voraussetzungen, wie unterschiedliche Vergleichsverfahren, unterschiedliche Datensätze mit verschiedenen genauen Beobachtungen, hervorgerufen durch unterschiedliche Meßinstrumente, die in den einzelnen Ländern benutzt werden usw., geprüft worden ist. Hier würde nur eine vergleichende Studie aller fraglichen Methoden unter gleichen Gegebenheiten Abhilfe schaffen. Nichtsdestotrotz ist davon auszugehen, daß jedes dieser hier erwähnten Verfahren für Gebiete mit guter Beobachtungsabdeckung zufriedenstellende Ergebnisse für die Analysengenauigkeit bietet. Herausfallen mag die Analysenmethode mit Hilfe von Zirkulation und Vorticity, doch werden in diese ebenfalls Geopotentialbeobachtungen eingeführt, so dürften sich auch hier ausreichende Genauigkeiten einstellen.

Wesentlich schlechter steht es dagegen bei den Analysenverfahren mit der Genauigkeit über datenarmen, bzw. gar datenleeren Gebieten. Betroffen sind hier in erster Linie die großen Wasserflächen der Erde. Besonders schlecht sieht es dabei über solchen Gebieten aus, wo die zu analysierende, meteorologische Variable außerdem noch starken Schwankungen unterliegt. Allgemein ist zu sagen, daß auf Grund der großen Stationsabstände und infolge der glättenden Wirkung, die in einem gewissen Rahmen jede Analysenmethode besitzt, die starken Zyklonen und Antizyklonen, bzw. Gebiete mit starken Horizontalgradienten, systematisch zu flach analysiert werden.

Zusätzlich zu den Beobachtungen eingeführte Daten (Extrapolationen von benachbarten Niveaus auf das zu analysierende (s. 2.1.2.4.)) führen zu einer allgemeinen Verbesserung, doch bleibt der Genauigkeitsfehler im Vergleich zu datenreichen Gebieten sehr hoch. Die Benutzung von Vorhersagewerten als zusätzliche Informationsquelle bringt kaum Einwirkungen auf die Genauigkeit mit sich. Ihre

eigentliche Aufgabe besteht ja auch mehr darin, in datenarmen Gebieten genügendes Informationsmaterial zu gewährleisten, um dort überhaupt erst eine Analyse zu ermöglichen (Polynommethode).

Der Autor dieser Arbeit tendiert dazu, in datenleeren Gebieten der Korrektionsmethode gegenüber den anderen Analysenverfahren den Vorzug zu geben. Bei der Geopotentialanalyse können sowohl Geopotential- als auch Windbeobachtungen benutzt werden, wodurch sich das verfügbare Datenmaterial verdoppelt, bzw. verdreifacht (Geopotential und die Windkomponenten u und v). Dieses ist allerdings auch bei anderen in dieser Arbeit beschriebenen objektiven Methoden möglich. Der für den Autor ausschlaggebende Grund für die Korrektionsmethode ist, daß er über die Konstruktion einer Anfangsnäherung ein weiteres Mittel besitzt, über das die Genauigkeit der fertigen Analyse entscheidend mitbeeinflusst werden kann, also nicht nur über die Anzahl und Genauigkeit der vorhandenen Beobachtungen.

Bei Analysen anderer meteorologischer Variablen wird auch nur diese als Beobachtungsmaterial benutzt, doch bleibt der Vorteil der steuernden Einwirkung der Anfangsnäherung auf das Endergebnis.

Die eigens für datenarme Gebiete entwickelte dynamische Methode von THOMPSON/35/ und RICHARDSON/31/ scheint erst dann für den Gebrauch sinnvoll, wenn das Datenloch einem größeren geographischen und asymmetrischen Gebiet entspricht, als bei den Untersuchungen angenommen.

LITERATURVERZEICHNIS

- (1) Akima, H., 1975: A Method of Bivariate Interpolation and Smooth Surface Fitting for Values Given at Irregularly Distributed Points
OT-Report (Office of Telecommunications),
U.S. Department of Commerce, Boulder,
Colorado, Aug.
- (2) Aubert, E.J., 1956: Objective Map Analysis Utilizing the
Concept of Circulation and Vorticity,
J. Meteor. 16, S. 427-435
- (3) Belousov, S.L., L.S. Gandin and S.A. Mashkovich, 1968:
Computer Processing of Meteorological
Data, Leningrad, (engl. Übersetzung
Jerusalem, 1971)
- (4) Bergthorsson, P. and B.R. Döös, 1955: Numerical Weather
Map Analysis, Tellus 7, S. 329-340
- (5) Bushby, F.H. and V.M. Huckle, 1957: Objective Analysis
in Numerical Forecasting, Quart. J. Roy.
Meteor. Soc. 83
- (6) Clarke, L.C. and R.J. Renard, 1965: Further Development
and a Limited Evaluation of the U.S. Navy
Numerical Objective Analysis Scheme,
Prelim. Rep. given at the 239th Nat. Meet.
AMS, June 22
- (7) Corby, G.A., 1963: An Experiment in Three-dimensional
Objective Analysis,
Tellus 15, S. 432-438
- (8) Cressman, G.P., 1959: An Operational Objective Analysis
System, Monthly Weather Rev. 87, S. 367-374
- (9) Dixon, R., E.A. Spackman, I. Jones and A. Francis,
1972: The Global Analysis of Meteorological
Data Using Orthogonal Polynomial Base
Functions, J. Atmos. Sc. 29, S. 609-622

- (10) Döös, B.R. and M.A. Eaton, 1957: Upper Air Analysis over Ocean Areas, *Tellus* 9, S. 184-194
- (11) Duquet, R.T., E.F. Danielsen and N.R. Phares, 1966: Objective Cross Section Analysis, *J. Appl. Meteor.* 5, S. 233-245
- (12) Eliassen, A., 1954: Provisional Report on Calculation of Spatial Covariance and Autocorrelation of Pressure Field, Inst. for Vaer- og Klimaforskning, Oslo, Rapp. Nr. 5
- (13) Finger, F.G., H.M. Woolf and C.E. Anderson, 1965: A Method for Objective Analysis of Stratospheric Constant-Pressure Charts, *Monthly Weather Rev.* 93, S. 619-638
- (14) Gandin, L.S., 1963: Objective Analysis of Meteorological Fields, Leningrad; (engl. Übersetzung Jerusalem, 1965)
- (15) Gilchrist, B. and G.P. Cressman, 1954: An Experiment in Objective Analysis, *Tellus* 6, S. 309-318
- (16) Glahn, H.R., G.W. Hollenbaugh and D.A. Lowry, 1969: An Operationally Oriented Objective Analysis Program, Tech. Memo. WBTM TDL 22, ESSA, Silver Spring, Md., 20 pp
- (17) Haltiner, G.J., 1971: Numerical Weather Prediction, John Wiley & Sons, Inc.
- (18) Haug, O., 1959: A Method for Numerical Weather Map Analysis, Det Norske Meteor. Inst., Sc. Rep. No. 5, Oslo
- (19) Haug, O., 1966: Control of Radiosonde Data and Correction of Errors in the Numerical Weather Prediction Routine of Det Norske Meteor. Inst., NWP in Norway, Oslo

- (20) Hinkelmann, K.H., 1965: Data Processing of Synoptic and Upper-Air Reports, WMO, Regional Training Seminar on Numerical Weather Prediction, Moskau
- (21) Holmström, I., 1963: On a Method for Parametric Representation of the State of the Atmosphere, *Tellus* 15, S. 127-149
- (22) Johnson, D.H., 1957: Preliminary Research in Objective Analysis, *Tellus* 9, S. 316-322
- (23) Johnson, K. and R.M. McInturff, 1970: On the Use of SIRS-Data in Stratospheric Synoptic Analysis, *Monthly Weather Rev.* 98, S. 635-642
- (24) Kaestner, A., 1971: Über die Weiterentwicklung des im DWD benutzten Programms zur numerischen Analyse von Wetterkarten, *Meteor. Rdsch.* 24, S. 129-137
- (25) Koss, W.J., 1966: Objective Analysis of Pressure Height Data for the Tropics, *Monthly Weather Rev.* 94, S. 237-257
- (26) Kluge und Stahnke-Jungheim, 1973: Über die Anpassung meteorologischer Felder im Rahmen der vierdimensionalen Analyse, *Met. Dienst, Berlin, Abh.* 14 (110), S. 138-146
- (27) Masuda, Y., 1957: On a Tentative Method of Smoothing of Contour Height by Finite-Difference Smoothing Operators, 75th Ann. Vol. J. Meteor. Soc. Japan, S. 95-102
- (28) Panofsky, H.A., 1949: Objective Weather Map Analysis, *J. Meteor.* 6, S. 386-392
- (29) Panofsky, H.A., 1958: Introduction to Dynamic Meteorology, Pennsylvania State University

- (30) Penn, S., B. Kunkel and W.D. Mount, 1963: On Objective Analysis of Continuous and Discontinuous Parameters, *J. Appl. Meteor.* 2, S. 345-350
- (31) Richardson, N.N., 1961: Numerical Tests of a Method for Dynamic Analysis in Regions of Poor Data Coverage, *Tellus* 13, S. 353-362
- (32) Shapiro, M.A. and J.T. Hastings, 1973: Objective Cross Section Analysis by Hermite Polynomial Interpolation on Isentropic Surfaces, *J. Appl. Meteor.* 12, S. 753-762
- (33) Shuman, F.G., 1957: Numerical Methods in Weather Prediction: II. Smoothing and Filtering, *Monthly Weather Rev.* 85, S. 357-361
- (34) Smith, W.L., H.M. Woolf and W.J. Jacob, 1966: A Regression Method for Obtaining Real-Time Temperature and Geopotential Height Profiles from Satellite Spectrometer Measurements and its Application to Nimbus III SIRS Observation, *Monthly Weather Rev.* 94, S. 582-603
- (35) Thompson, P.D., 1961: A Dynamical Method of Analysing Meteorological Data, *Tellus* 13, S. 334-349
- (36) Teweles S. and M. Snidero, 1962: Some Problems of Numerical Objective Analysis of Stratospheric Constant-Pressure Surfaces, *Monthly Weather Rev.* 90, S. 147-155
- (37) Wiener, N., 1949: *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, Mass. Inst. Techn. and New York
- (38) Willers, Fr. A., 1957: *Methoden der praktischen Analysis*, Walter de Gruyter & Co., 3. Auflage, Berlin

- (39) Wippermann, F., 1959: Kartenmäßige Darstellung atmosphärischer Felder auf dem Schirm einer Kathodenstrahlröhre, *Tellus* 11, S. 253-256
- (40) Woodroffe, A., 1966: Objective Analysis of the 100 mb Level, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 92, S. 553-559
- (41) Yanai, M., 1964: An Experimental Objective Analysis in the Tropics, Techn. Pap. No. 92, Department of Atmospheric Science, Colorado State University
- (42) Zurmühl, R., 1963: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Springer-Verlag, 4. Auflage,
- (43) Staff Members, Inst. of Meteor. University of Stockholm, 1954: Results of Forecasting with Barotropic Models on Electronic Computer BESK, *Tellus* 6
- (44) 1960 : Contour Plotter Dataplotter. A High Speed x-y Plotting System with Magnetic Tape Input, Series 3410, EAI Inc., London, Branch.
- (45) 1960 : Electronic Plotter Draws Weather Maps *Electronics*, Dec. 16
- (46) 1954 : Reduction of Atmospheric Pressure (Prelim. Rep. on Problems Involved), WMO Techn. Note No. 7, Genf
- (47) Böttcher, 1968: Objektive Analyse meteorologischer Felder, Inst. f. Theoret. Meteor., Berlin, Promotionsarbeit
- (48) Lense, J., 1954: Kugelfunktionen, Akademische Verlagsges., Leipzig, 2. Aufl.
- (49) Linke, F. und F. Baur, 1970: Meteorologisches Taschenbuch Neue Ausgabe II, 2. Aufl., Akademische Verlagsges., Leipzig

- (50) Smirnow, W.J., 1961: Lehrgang der höheren Mathematik,
Teil III₂, VEB Deutscher Verlag der
Wissenschaften, Berlin
- (51) 1970 : Glossary of Meteorology, American Meteor.
Soc., Boston, 2. Aufl.