

B E R I C H T E
aus dem
INSTITUT FÜR MEERESKUNDE
an der
Christian-Albrechts-Universität Kiel

Nr. 57

TRANSPORT UND VERMISCHUNG EINER PASSIVEN
BEIMENGUNG IN EINEM MEDIUM MIT EINEM VOR-
GEGEBENEN GESCHWINDIGKEITSFELD

von

SILKE STRUVE

DOI 10.3289/IFM_BER_57

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von:
Silke Struve
Institut für Meereskunde
Abt. Theoretische Ozeanographie
23/K i e l
Düsternbrooker Weg 20

ISSN 0341-8561

INHALTSÜBERSICHT

Zusammenfassung

Summary

1. *Einleitung*

2. *Gleichungssystem*

3. *Numerische Verfahren*

3.1. *Leapfrog-Verfahren*

3.2. *Zeitliche Vorwärts-, räumliche zentrale
Differenz*

3.3. *Adams-Bashforth Verfahren*

3.4. *2-Schritt Lax-Wendroff Verfahren*

3.5. *Upstream Verfahren*

3.6. *Vergleich Lax-Wendroff Verfahren - Upstream
Verfahren*

4. *Die Flux-Correction Technik (FCT)*

4.1. *Beschreibung*

4.2. *Anwendung von FCT auf das Lax-Wendroff Verfahren*

4.3. *Anwendung von FCT auf das Upstream Verfahren*

4.4. *Geschwindigkeitsabhängige Korrektur im Lax-
Wendroff Verfahren*

4.5. *Geschwindigkeitsabhängige Korrektur im
Upstream Verfahren*

5. *Dispersion*

6. *Dämpfung*

7. *Auflösbarkeit*

Literatur

Zusammenfassung

Es werden numerische Verfahren auf ihre Eigenschaften bezüglich der Lösung der Transport- und Vermischungsgleichung untersucht. Beschrieben wird die Verteilung einer passiven Beimengung in einem Meeresgebiet bei vorgegebenem nicht-konstanten Geschwindigkeitsfeld. Die Verfahren werden auf Massenerhaltung, Positivität, Diffusions- und Dispersionsfehler getestet. Es zeigt sich, dass eine von BOOK, BORIS & HAIN (1975) eingeführte Technik zur Korrektur von Transportprozessen eine Verbesserung der getesteten Euler'schen expliziten Verfahren darstellt.

Summary

The computational properties of numerical schemes in advection-diffusion calculations are analysed. The mass transport of a passive admixture is considered in a non-uniform velocity field which is assumed to be known. The numerical calculations are tested with regard to mass-conserving, positivity and diffusive and dispersive errors. They indicate that the Flux-Corrected Transport technique which is developed by BOOK, BORIS & HAIN (1975) improve the tested Eulerian methods.

1. Einleitung

Die Vorhersage des Massentransportes in einem vorgegebenen zweidimensionalen Geschwindigkeitsfeld ist z.B. für die Untersuchung der Schadstoffausbreitung im Meer von Bedeutung. Es wurde ein numerisches Modell entwickelt, in dem das Geschwindigkeitsfeld und das Meeresgebiet beliebig vorgegeben werden können. In Gebieten mit dominierender turbulenter Diffusion treten keine schwerwiegenden numerischen Probleme auf, da das numerische Verhalten der reinen Vermischungsgleichung hinreichend bekannt ist und numerische Fehler im advektiven Term wegen des glättenden Effektes des Vermischungstermes nicht in Erscheinung treten. Anders ist es in Gebieten mit starken und variierenden Strömungen. Hier müssen numerische Fehler sehr sorgfältig abgeschätzt werden. In der vorliegenden Arbeit werden einige numerische Verfahren getestet.

Das vorliegende Modell ist beschränkt auf physikalische Änderungen der Konzentration und auf passive Beimengungen. Einen nicht-passiven Stoff, wie z. B. Wärme, zu behandeln, würde eine Kopplung zwischen Bewegungsgleichungen und Transportgleichung und somit eine Erweiterung dieses Modells erfordern.

2. Gleichungssystem

Die Diffusionsgleichung nach Reynolds-Mittelung und Einführung des Austauschkonzeptes zur Simulierung der turbulenten Flüsse lautet

$$\frac{\partial c(x,y,z,t)}{\partial t} + \vec{v}(x,y,z,t) \cdot \nabla c(x,y,z,t) = \nabla(A \nabla c(x,y,z,t))$$

A = Austauschkoeffizient
c = Konzentration
v = Geschwindigkeit

oder unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung im inkompressiblen Fall:

$$\frac{\partial c(x,y,z,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v}(x,y,z,t) c(x,y,z,t) = \nabla(A \nabla c(x,y,z,t)).$$

Diese zweite Form der Diffusionsgleichung bietet in numerischen Rechnungen erfahrungsgemäss weniger Stabilitätsprobleme; die nicht konservative Form $\partial c / \partial t = \vec{v} \cdot \nabla c$ führt z. B. im Falle zeitlicher Vorwärts- und räumlicher zentraler Differenzen zu Instabilitäten (SPRAGGS & STREET, 1975).

Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird ein numerisches Mehrschichtenmodell entwickelt. Die einzelnen Schichten werden vertikal integriert.

Dann lautet die Gleichung in jeder Schicht mit konstanter Schichtdicke:

$$(1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v}c) + \nabla \cdot (A_h \nabla c) + \frac{1}{h} (wc)_2 - \frac{1}{h} (wc)_1 + \left(\frac{A_v}{h} \frac{\partial c}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{A_v}{h} \frac{\partial c}{\partial z}\right)_2 + S$$

im kartesischen Koordinatensystem mit z positiv nach oben.

Dabei sind alle Variablen Funktionen von x, y, und t.

A_h = horizontaler Austauschkoeffizient
A_v = vertikaler Austauschkoeffizient
h = Schichtdicke
v = Horizontalgeschwindigkeit
w = Vertikalgeschwindigkeit

S = Quelle bzw. Senke
Index 1 = obere Begrenzung
Index 2 = untere Begrenzung.

3. Numerische Verfahren

Die Wahl des Differenzenverfahrens muss auf das zu beschreibende physikalische System abgestimmt sein. Da Lösungen von Differenzgleichungen nicht gleich den exakten Lösungen sind, sollte man die Abweichungen kennen und die Einschränkungen, die daraus für die physikalische Aussage erwachsen, berücksichtigen.

Je nachdem, ob Advektion oder Diffusion dominiert, ist die Gleichung (1) vom hyperbolischen oder parabolischen Typ. Deshalb muss ein numerisches Differenzenverfahren benutzt werden, das beide Gleichungstypen adäquat löst; dabei bereitet die hyperbolische Gleichung die grösseren Schwierigkeiten. Es soll eine grossräumige oder im medium-scale Bereich liegende Verteilung einer passiven Beimengung untersucht werden; auf eine hohe Auflösung, also der Simulierung von Fronten und scharfen Peaks wird verzichtet.

Es werden verschiedene Euler'sche Verfahren getestet, und zwar alles explizite Verfahren erster oder zweiter Ordnung mit zeitlichen und räumlichen Vorwärts- als auch zentralen Differenzen.

3.1. Leapfrog-Verfahren

Das Leapfrog-Verfahren benutzt zentrale Differenzen in Zeit und Raum. In Diffusionsproblemen ist es das meist benutzte Schema; jedoch für advektive Vorgänge scheint es weniger gut geeignet zu sein. Es hat den grossen Vorteil, dass es keine numerische Dämpfung enthält. Doch der Phasenfehler ist erheblich, so dass - abhängig vom Gitterpunktastand und der Wellenzahl - dispersive Oszillationen entstehen (LAM, 1975). Durch eine formale Viskosität werden die hohen Wellenzahlen eliminiert und so eine Glättung erreicht, da die hohen Wellenzahlen normalerweise den grössten Phasenfehler enthalten (s. Abschnitt 5).

Das Verfahren liefert in sehr vielen Fällen - je nach Wahl der Gitternetze - zwei unabhängige Lösungen an den geraden bzw. ungeraden Zeitpunkten. Die beiden dispergierenden Lösungen werden z. B. durch zeitliche Glättung (SMAGORINSKI et al., 1965) oder "restart" (BAER & SIMONS, 1970) zu einer vereinigt. Sind die beiden Gitternetze der geraden und ungeraden Zeitschritte in den Randbedingungen gekoppelt, so kann daraus exponentielle Instabilität entstehen. Die Randbedingungen müssen also so gewählt werden, dass die Gitternetze entkoppelt sind (PLATZMAN., 1958).

Dann ist Leapfrog im linearen Fall immer stabil, benötigt aber wegen der zeitlich zentralen Differenz eine exakte Startlösung. Instabilitäten können im nicht-linearen Fall auftreten, da die Energie, die von längeren zu kürzeren Wellen transportiert wird, hier akkumuliert wird und nicht verteilt werden kann, da keine künstliche Dämpfung enthalten ist (FISCHER, 1965). Deshalb ist im nicht-linearen Fall formale Viskosität notwendig.

3.2. Zeitliche Vorwärts-, räumliche zentrale Differenz

Wegen der genannten Schwierigkeiten wird zu zeitlichen Vorwärtsdifferenzen übergegangen. Bei räumlichen zentralen Differenzen ergeben sich stark negative Konzentrationen an der Rückseite eines transportierten Konzentrationsberges,

$$\frac{c_n^l - c_n^{l-1}}{DT} = -v \frac{c_{n+1}^{l-1} - c_{n-1}^{l-1}}{2Dx}$$

Daraus folgt:

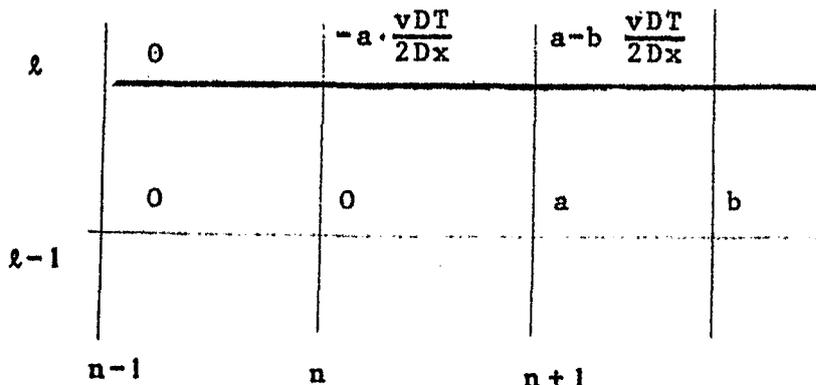
$$c_n^l = c_n^{l-1} - \frac{vDT}{2Dx} (c_{n+1}^{l-1} - c_{n-1}^{l-1})$$

Damit c_n^l positiv wird, muss also

$$c_n^{l-1} \geq \frac{vDT}{2Dx} (c_{n+1}^{l-1} - c_{n-1}^{l-1}) \text{ sein.}$$

Diese Bedingung ist an der Rückseite eines Konzentrationsberges nicht zu erfüllen. Das folgende Beispiel mit a , b und v positiv demonstriert, dass c_n^l immer negativ wird:

Für c_{n+1}^l hängt das Vorzeichen von der Anfangsverteilung der Advektionsgeschwindigkeit und der Gitterpunktabstände ab.



3.3. Adams-Bashforth-Verfahren

Das Adams-Bashforth-Verfahren benutzt ebenfalls zeitliche Vorwärts- und räumliche zentrale Differenzen. Die Werte der räumlichen Differenzen verteilen sich jedoch auf zwei Zeitniveaus. Um Positivität zu wahren, muss $\epsilon = vDT/Dx$ im Vergleich zu dem folgenden upstream-Verfahren sehr klein werden. Testrechnungen ergaben

$$v \frac{DT}{Dx} \leq 0.2.$$

Die Dämpfung ist stark, so dass sich kein Vorteil dieses Verfahrens gegenüber den folgenden ergibt (Abb. 1)

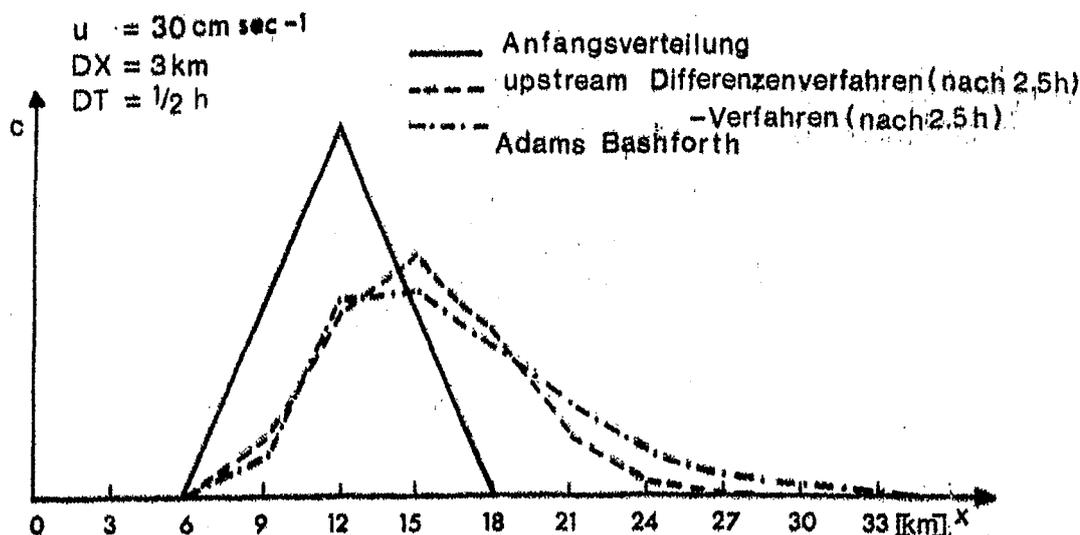


Abb. 1

Vergleich des Adams-Bashforth-Verfahrens mit dem upstream-Verfahren

3.4. Zwei-Schritt-Lax-Wendroff-Verfahren

Es ist ein Verfahren zweiter Ordnung, das Dämpfung enthält, die aber wiederum Stabilität im nicht-linearen Fall liefert. Die Dämpfung wird in Abschnitt 6, der Phasenfehler in Abschnitt 5 näher untersucht.

Im 1. Schritt wird ein Zwischenwert zum Zeitpunkt $DT/2$ mittels einer zeitlichen Vorwärtsdifferenz berechnet. Dieser Wert geht dann in die Berechnung der Konzentration zum vollen Zeitschritt ein. Auf diese Weise gehen mehr Gitterpunkte in die Berechnung ein als in einem Ein-Schritt-Verfahren, ohne dass mehr Anfangsinformation notwendig ist.

$$c_{n+\frac{1}{2}}^{\ell+\frac{1}{2}} = c_{n+\frac{1}{2}}^{\ell} - \frac{DT}{2Dx} (c_{n+1}^{\ell} u_{n+1}^{\ell} - c_n^{\ell} u_n^{\ell}) + \frac{DT \cdot A_h}{2 \left(\frac{Dx}{2}\right)^2} (c_{n+1}^{\ell} - 2c_{n+\frac{1}{2}}^{\ell} + c_n^{\ell})$$

$$c_n^{\ell+1} = c_n^{\ell} - \frac{DT}{Dx} (c_{n+\frac{1}{2}}^{\ell+\frac{1}{2}} u_{n+\frac{1}{2}}^{\ell+\frac{1}{2}} - c_{n-\frac{1}{2}}^{\ell+\frac{1}{2}} u_{n-\frac{1}{2}}^{\ell+\frac{1}{2}}) + \frac{DT \cdot A_h}{(Dx)^2} (c_{n+1}^{\ell} - 2c_n^{\ell} + c_{n-1}^{\ell})$$

3.5. upstream-Verfahren

In der zeitlichen Differentiation werden Vorwärtsdifferenzen benutzt, im diffusiven Term zentrale Differenzen und im advektiven Term je nach Geschwindigkeitsrichtung Rückwärts- bzw. Vorwärtsdifferenzen. In der Literatur wird dieses Schema auch second upstream differencing-Verfahren oder donor cell-Verfahren genannt.

$$c_n^{\ell+1} = c_n^{\ell} - \frac{DT}{Dx} (c_R^{\ell} u_{n+\frac{1}{2}}^{\ell} - c_L^{\ell} u_{n-\frac{1}{2}}^{\ell}) + \frac{DT \cdot A_h}{2 Dx} (c_{n+1}^{\ell} - 2c_n^{\ell} + c_{n-1}^{\ell})$$

mit

$$c_R^\ell = \begin{cases} c_{n+1}^\ell & \text{für } u_{n+\frac{1}{2}}^\ell < 0 \\ c_n^\ell & \text{für } u_{n+\frac{1}{2}}^\ell \geq 0 \end{cases}$$

$$c_L^\ell = \begin{cases} c_n^\ell & \text{für } u_{n-\frac{1}{2}}^\ell < 0 \\ c_{n-1}^\ell & \text{für } u_{n-\frac{1}{2}}^\ell \geq 0 \end{cases}$$

Es ist ein Verfahren erster Ordnung, das annehmbare Phasenfehler hat (s. Abschnitt 5), jedoch eine starke Dämpfung enthält (s. Abschnitt 6). Es ist gerade das Minimum an Diffusion enthalten, das notwendig ist, die Konzentration c immer positiv zu erhalten (Ableitung s. Abschnitt 4.4.).

3.6. Vergleich Lax-Wendroff-Verfahren + upstream-Verfahren

Verglichen werden die beiden Verfahren in Bezug auf Massenerhaltung, Positivität, numerische Diffusion und Dispersion.

Massenerhaltung ist in beiden Fällen gegeben. Positivität hängt im Falle Lax-Wendroff vom Verhältnis der Gitterpunkt-abstände und der Geschwindigkeit ab.

Für $c = \frac{vDT}{Dx} < 1$ muss, wenn nicht genügend formale Dämpfung vorgegeben wird, c sehr klein werden ($O(10^{-2})$); upstream liefert für alle $c \leq 1$ positive Konzentrationen. Für $c = 1$ folgt für beide Verfahren das exakte Ergebnis. $c = 1$ beschreibt den Fall, dass bei einmaliger Integration ein Gitterpunkt exakt auf den nächsten abgebildet wird. Für alle $c < 1$ bekommt man grosse numerische Diffusion und Dispersion, wobei die Diffusion im upstream-Verfahren, der Phasenfehler im Lax-Wendroff-Verfahren grösser ist (s. Abschnitte 5. und 6.).

Abb. 2 zeigt

- a) die Anfangsverteilung und die Änderung der Konzentrationsverteilung nach 2500 sec bei der Anwendung von
- b) upstream-Verfahren
- c) Lax-Wendroff-Verfahren
- d) Adams-Bashforth-Verfahren.

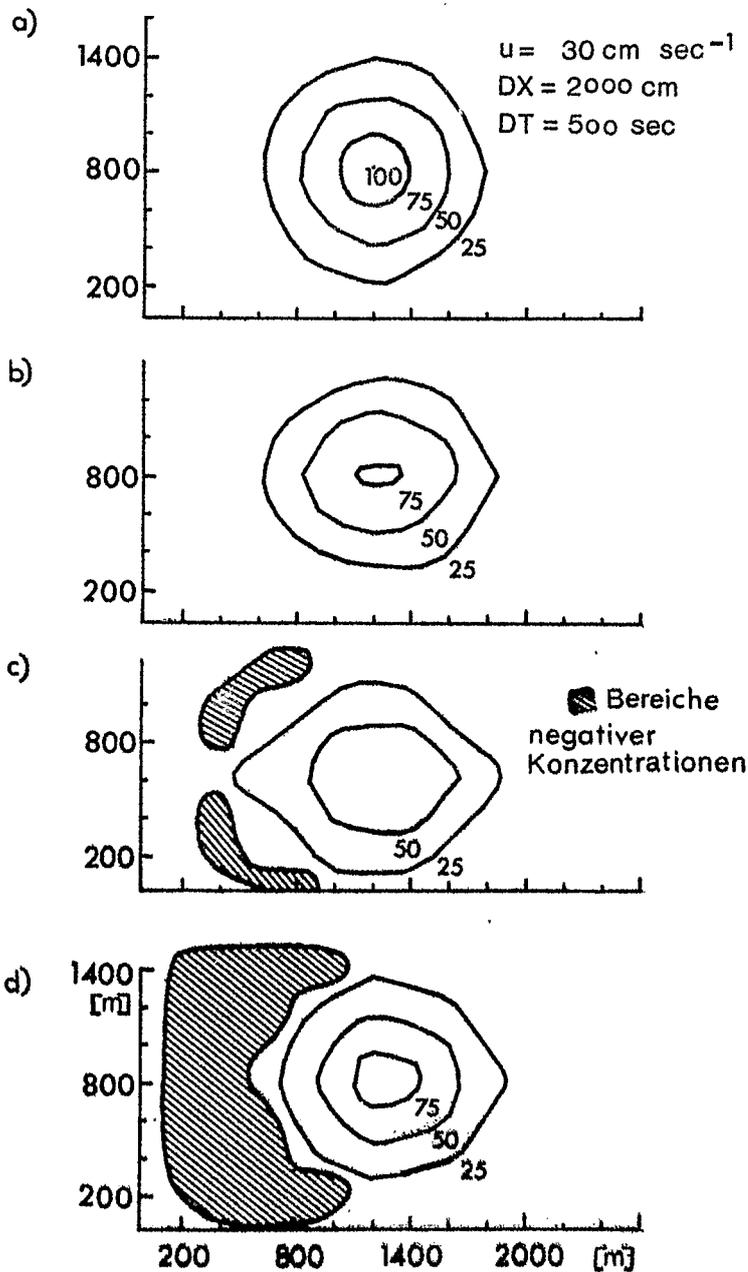


Abb. 2

- a) Anfangsverteilung und exakte Lösung
 b) upstream-Verfahren, $t = 2500 \text{ sec}$
 c) Lax-Wendroff-Verfahren, $t = 2500 \text{ sec}$
 d) Adams-Bashforth-Verfahren, $t = 2500 \text{ sec}$

4. Die flux-correction-Technik (FCT)

Im Falle konstanter Geschwindigkeiten könnte man $\epsilon = 1$ wählen, um ein exaktes Ergebnis zu erhalten. Um die Fehler im Falle variabler Geschwindigkeitsfelder zu reduzieren, wurden verschiedene Versuche unternommen, z.B. Lagrange'sche Beschreibung oder drastische Gitterpunktstandsverkleinerungen.

Von BORIS & BOOK wird eine Technik angeboten, die flux-correction-Technik, die man mit geringfügigen Modifikationen auf alle Euler'schen Differenzenverfahren anwenden kann (BORIS & BOOK, 1973; BOOK, BORIS & HAIN, 1975). Sie führt in dispersive Transportschemata eine korrektive Diffusion ein, sofern nicht, wie im upstream-Verfahren, genügend Diffusion im System enthalten ist. Die Diffusion lokalisiert sie auf die Regionen, in denen aufgrund numerischer Dispersion nicht-physikalische "ripples" entstehen würden.

Es ist zu prüfen, ob das Verfahren die physikalischen Verhältnisse nicht verfälscht, keine Instabilitäten erzeugt, Massenerhaltung wahrt, negative Konzentrationen verhindert und einigermassen ökonomisch ist.

4.1. Beschreibung der flux-correction-Technik

Das Verfahren gliedert sich in zwei Schritte:

1. Transport
2. Korrektur.

Der erste Schritt besteht in der Anwendung der Operatoren $(I + T + D)$;

I ist die Identitätsoperation,

T die Transportoperation $(I + T)c = v_h \cdot \vec{\nabla} c$ in Differenzenform,

D der Diffusionsoperator $(D)c_n^k = \eta (c_{n+1}^k - 2c_n^k + c_{n-1}^k)$.

$(I + T + D)$ ist konservativ, wenn T und D jeweils konservativ gewählt werden.

$(I + T + D)$ soll positiv sein. Das ist durch eine geeignete Wahl von η zu erreichen (s. Abschnitt 4.4).

Der zweite Schritt besteht in der Anwendung einer Antidiffusion:

$$(I + A_1)c_n = c_n - FA_{n+\frac{1}{2}} + FA_{n-\frac{1}{2}} \quad \text{mit } FA_n = \eta (c_{n+\frac{1}{2}} - c_{n-\frac{1}{2}}).$$

$(I + A_1)$ ist konservativ, da jedes FA , das irgendwo addiert wird, an einer anderen Stelle subtrahiert wird. Positivität ist so jedoch nicht gesichert. Dazu wird ein "limiter" eingeführt, der dafür sorgt, dass bei der Anwendung von $(I + A)$ keine neuen Maxima und Minima entstehen und die bestehenden nicht wachsen.

Der "limiter" oder korrigierte Fluß lautet:

$$FC_{n+\frac{1}{2}} = \text{sign}(FA_{n+\frac{1}{2}}) \text{MAX}(0, \text{MIN}(\text{sign}(FA_{n+\frac{1}{2}}) \cdot (c_n - c_{n-1}),$$

$$\text{abs}(FA_{n+\frac{1}{2}}),$$

$$\text{sign}(FA_{n+\frac{1}{2}})(c_{n+2} - c_{n+1})),$$

$$(I + A)c_n = c_n - FC_{n+\frac{1}{2}} + FC_{n-\frac{1}{2}}$$

(I + A) ist eine nicht-lineare Operation, d.h. die Korrektur am Gitterpunkt n hängt auch von den Nachbarwerten ab. In Bereichen mit nur schwachen horizontalen Gradienten in der Konzentrationsverteilung unterscheidet sich die korrigierte nicht von der nicht-korrigierten Antidiffusion. Ihre Wirkung tritt jedoch in Bereichen mit steilen Gradienten und Extrema auf. Würde bei der Anwendung der nicht-korrigierten Antidiffusion (I + A) ein Wert das Niveau beider Nachbarwerte überschreiten, so verhindert dieses der "limiter"; der Wert wird gleich dem maximalen Nachbarwert gesetzt.

Auf diese Weise entstehen keine neuen Maxima und Minima. Bestehende Maxima und Minima werden nicht verstärkt. Der "limiter" setzt $F_c = 0$. Das kann zu unrealistischen Ergebnissen, dem "clipping"-Effekt führen. Ist beim diffusiven Transport (I + T + D) der maximale Wert gesunken, so verhindert der "limiter", dass er im Rahmen der Antidiffusion wieder erhöht wird. Die Nachbarwerte jedoch können ansteigen, und zwar maximal auf den Wert des Maximums; so wird eine scharfe Spitze zu einer ebenen Fläche, die ausgezogene Kurve in Abb. 4 zeigt diesen Effekt.

4.2. Anwendung von FCT auf das Lag-Hendroff-Verfahren

(I + T) hat die in 3.4. angegebene Form. Die Operatoren D und A sind in 4.1. angegeben.

FA_n wird aus den $c_{n+\frac{1}{2}}$, $c_{n-\frac{1}{2}}$, vor der Anwendung der Diffusion berechnet, so dass die Gesamtoperation lautet

$$((I + A) (I + T) + D)c.$$

Die Erweiterung auf zwei Dimensionen wird mit der alternating-direction-method vorgenommen.

Abb. 3a) zeigt den Vergleich des 2-Schritt-Lax-Wendroff-Verfahrens mit dem 2-Schritt-Lax-Wendroff-Verfahren + FCT.

Es treten keine negativen Konzentrationen mehr auf. Die Aufsteilung der Verteilung in Strömungsrichtung, eine Folge des Phasenfehlers, ist schwächer geworden.

4.3. Anwendung von FCT auf das upstream-Verfahren

Beim upstream-Verfahren ergeben sich keine negativen Konzentrationen. Deshalb kann auf die Einführung von formaler Diffusion verzichtet werden. Die FC-Technik sollte hier lediglich Antidiffusion bewirken, um die starke numerische Dämpfung zu korrigieren. Die Gesamtoperation lautet also $((I+A)(I+T))c$. Dabei ist $(I+T)$ in 3.5., $(I+A)$ in 4.1. definiert. In Abb. 3b sieht man den Unterschied der Anwendung des upstream-Verfahrens mit und ohne FCT.

4.4. Geschwindigkeitsabhängige Korrektur im Lax-Wendroff-Verfahren

In die Operatoren D und A geht der Koeffizient η ein.

Dieser Koeffizient muss gross genug gewählt werden, um Positivität zu gewährleisten, sollte jedoch nicht mehr Diffusion als notwendig in das Verfahren einfügen.

Die Operation $(I + T + D)c$ lautet im eindimensionalen Spezialfall mit $v = \text{const.}$ und der Abkürzung $\epsilon = v\Delta t/\Delta x$ für das Lax-Wendroff-Verfahren:

$$c_n^{\ell+1} = c_n^\ell - \epsilon \left(c_{n+\frac{1}{2}}^\ell - \frac{\epsilon}{2} c_{n+1}^\ell + \frac{\epsilon}{2} c_n^\ell - c_{n-\frac{1}{2}}^\ell + \frac{\epsilon}{2} c_n^\ell - \frac{\epsilon}{2} c_{n-1}^\ell \right) + \eta c_{n+1}^\ell - 2\eta c_n^\ell + \eta c_{n-1}^\ell$$

Mit $c_{n+\frac{1}{2}} = \frac{c_{n+1} + c_n}{2}$, $c_{n-\frac{1}{2}}$ analog, folgt

$$(2) \quad c_n^{\ell+1} = c_n^\ell (1 - \epsilon^2 - 2\eta) + c_{n+1}^\ell \left(\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon}{2} + \eta \right) + c_{n-1}^\ell \left(\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon}{2} + \eta \right)$$

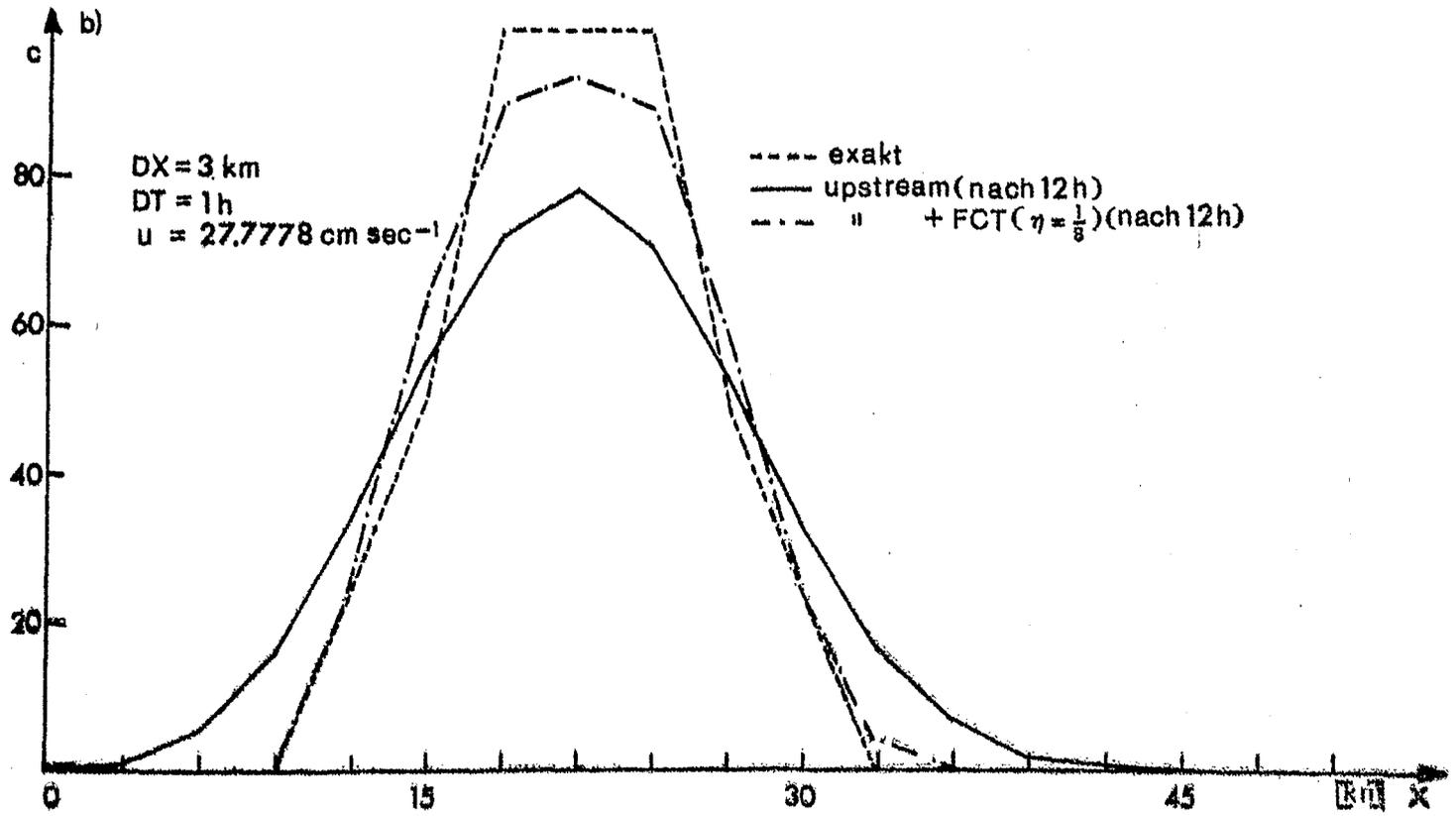
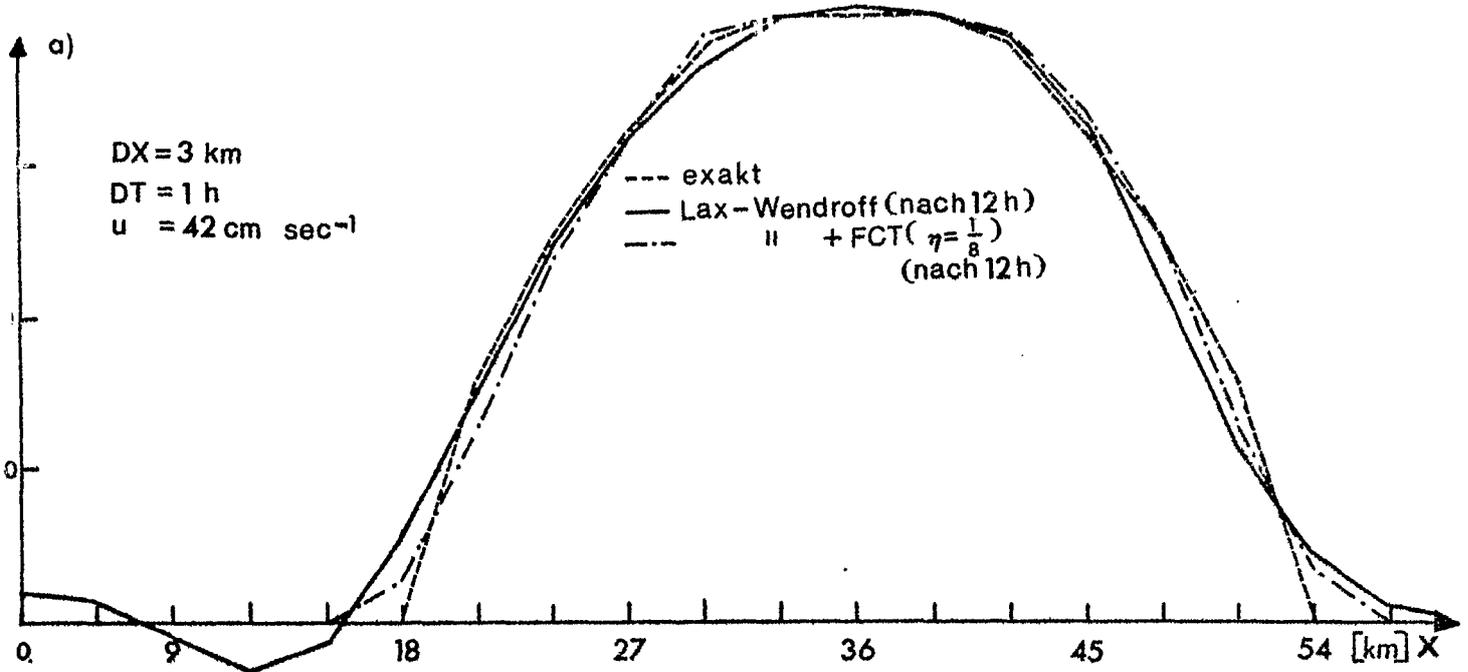


Abb. 3

Vergleich Euler'scher Verfahren mit und ohne Anwendung der flux-correction Technik (FCT)

a) Lax-Wendroff

b) upstream

c_n^{l+1} ist positiv, wenn die Faktoren der c_i^l jeweils positiv sind. Daraus ergeben sich die drei Bedingungsgleichungen:

$$1) \quad \eta \leq \frac{1}{2} - \frac{\epsilon^2}{2}$$

$$2) \quad \eta \geq \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{2}$$

$$3) \quad \eta \geq -\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{2}$$

$$\text{Daraus folgt } \frac{1}{2} - \frac{\epsilon^2}{2} \geq \eta \geq \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{2}$$

Für $\epsilon \leq 1$ ist $\eta = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{2}$ das minimale η , das die Bedingung erfüllt. Setzt man dieses η in die Gleichung (2) ein, so verschwindet für $v > 0$ der c_{n+1} Term, für $v < 0$ der c_{n-1} Term; die ursprünglich zentrale Differenz ist auf eine Rückwärtsdifferenz im Falle $v > 0$ und auf eine Vorwärtsdifferenz im Falle $v < 0$ reduziert. Das entspricht genau dem upstream-Differenzenverfahren. Im upstream Verfahren ist also die kleinstmögliche Dämpfung enthalten, die notwendig ist, damit (I+T) für alle Geschwindigkeiten, für die $\epsilon \leq 1$ gilt, positiv bleibt.

BORIS & BOOK wählen die Gitterpunktstände so, dass für alle Geschwindigkeiten $\epsilon \leq \frac{1}{2}$ ist. Dann ist mit $\eta = \frac{1}{8}$ die Positivitätsbedingung für alle ϵ erfüllt.

Testrechnungen ergaben, dass bei einer Advektionsgeschwindigkeit $v = 0$ eine Änderung der Anfangsverteilung erfolgt. Bei einer Anwendung der Antidiffusion ohne "limiter" geht die Gesamtoperation Transport, Diffusion und Antidiffusion in den Identitätsoperator über. Die Anfangsverteilung der Konzentration dürfte also nicht verändert werden.

$$(I + A_1)c_n = c_n - \eta(c_{n+1} - c_n) + \eta(c_n - c_{n-1}) = (I - D)c_n.$$

$((I + A_1)(I + T) + D)c$ geht für $A_1 \rightarrow -D$, $T \rightarrow 0$ über in

$$((I - D)(I) + D)c = (I)c.$$

Wenn sich nun bei der Anwendung des Lax-Wendroff-Verfahrens + FCT trotzdem eine Verfälschung der Anfangsverteilung für $v = 0$ ergibt, so ist das eine Auswirkung des "limiters". Den Fehler kann man beheben, indem man für $v = 0$ den "limiter" nicht anwendet oder indem man den Koeffizienten η geschwindigkeitsabhängig wählt:

$$\eta(v) = \frac{\epsilon(v)}{2} - \frac{\epsilon(v)^2}{2} \text{ und } \epsilon(v) = |v| \frac{DT}{Dx}; \text{ damit wird } \eta \text{ orts-}$$

und zeitabhängig:

$$\eta_{n,m}^l = \frac{\epsilon_{n,m}^l}{2} - \frac{(\epsilon_{n,m}^l)^2}{2}$$

mit

$$\epsilon_{n,m}^l = \frac{DT}{Dx} |v_{n,m}^l|.$$

Die Wahl eines Variablen η erfordert zwar etwas mehr Rechenzeit und Speicherplatz, hat aber den Vorteil, dass jeweils der kleinstmögliche Diffusions-, Antidiffusionskoeffizient η benutzt wird und somit der Fehler, der durch die Einführung der formalen Diffusion gemacht wird, minimiert wird.

Für $\epsilon = 0 (v=0)$ wird, wie gefordert, $\eta = 0$, und für $\epsilon = 1$ wird ebenfalls $\eta = 0$. Es ist sinnvoll,

da das Lax-Wendroff- und das upstream-Verfahren ohne FCT für $\epsilon = 0$ und $\epsilon = 1$ exakte Ergebnisse haben.

Abb. 4 zeigt, dass durch die Einführung eines variablen η der clipping Effekt, wie er in 4.1. beschrieben wurde, weitgehend aufgehoben ist.

4.5. Geschwindigkeitsabhängige Korrektur im upstream-Verfahren

Im Lax-Wendroff-Verfahren wurde im Diffusions- und Antidiffusionsoperator der gleiche Koeffizient η benutzt. Im upstream-Verfahren ist die Diffusion im Transportalgorithmus enthalten. Wie gross ist dann die Antidiffusion anzusetzen? Im upstream-Verfahren ist, wie in 4.4. gezeigt, genau so viel Diffusion enthalten, wie notwendig ist, Positivität zu wahren, und diese mindestens notwendige Diffusion entspricht einem Diffusionskoeffizienten von

$$\eta = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{2}.$$

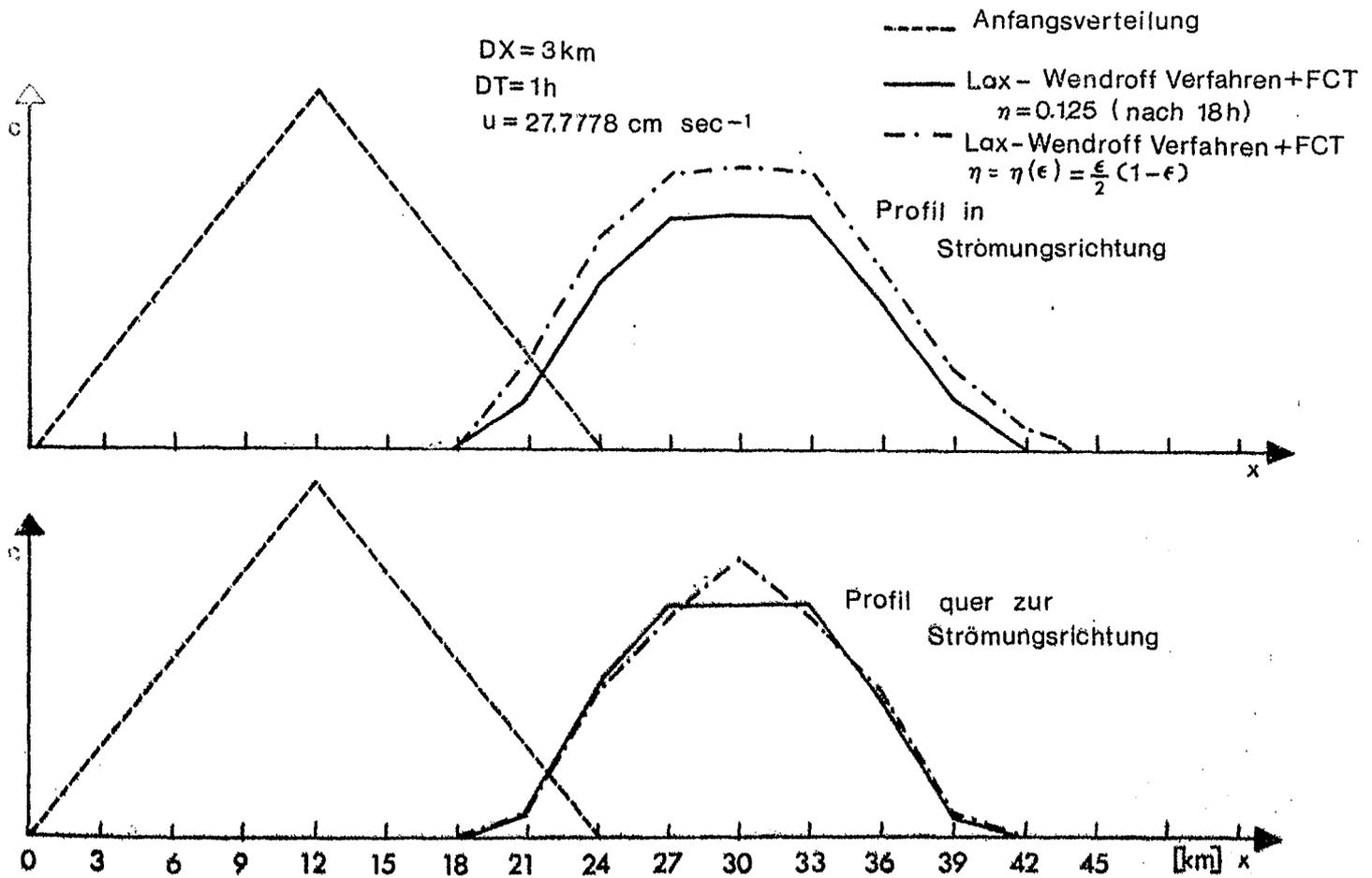


Abb. 4

Vergleich FCT mit konstantem und geschwindigkeitsabhängigem Diffusionskoeffizienten η im Lax-Wendroff-Verfahren

Deshalb liegt es nahe, auch in der Antidiffusion im upstream-Verfahren dieses η zu benutzen. Auch das upstream Verfahren ohne FCT liefert für $\epsilon=0$ und $\epsilon=1$ exakte Ergebnisse, so dass es auch hier sinnvoll ist, dass das gewählte η in diesen Fällen zu $\eta=0$ wird.

Um die Wirkung der Antidiffusion etwas aufzuklären, soll untersucht werden, wie der Antidiffusionskoeffizient η einget.

Sei zur Vereinfachung $v = \text{const.}$, $v \geq 0$, $\eta = \text{const}$ und die Antidiffusion ohne "limiter" untersucht:

$$c_n^{\ell+1} = c_n^\ell - \frac{DT \cdot v}{Dx} (c_n^\ell - c_{n-1}^\ell) - FA_{n+\frac{1}{2}}^{\ell+1} + FA_{n-\frac{1}{2}}^{\ell+1},$$

$$c_n^{\ell+1} = c_n^\ell - \varepsilon (c_n^\ell - \frac{1}{2} c_{n-1}^\ell - \frac{1}{2} c_{n+1}^\ell - \frac{1}{2} c_{n-1}^\ell + \frac{1}{2} c_{n+1}^\ell) - \eta (\tilde{c}_{n+1}^{\ell+1} - 2\tilde{c}_n^{\ell+1} + \tilde{c}_{n-1}^{\ell+1})$$

mit

$$\tilde{c}_n^{\ell+1} = (I+T)c_n^\ell = c_n^\ell - \varepsilon (c_n^\ell - c_{n-1}^\ell) \text{ folgt:}$$

$$c_n^{\ell+1} = c_n^\ell + \frac{\varepsilon}{2} (c_{n+1}^\ell - 2c_n^\ell + c_{n-1}^\ell) - \frac{\varepsilon}{2} (c_{n+1}^\ell - c_{n-1}^\ell) - \eta (c_{n+1}^\ell - 2c_n^\ell + c_{n-1}^\ell) + \varepsilon \eta ((c_{n+1}^\ell - 2c_n^\ell + c_{n-1}^\ell) - (c_n^\ell - 2c_{n-1}^\ell + c_{n-2}^\ell)).$$

Mit $\tilde{\eta} = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}$ geht das ursprüngliche System 1. Ordnung in ein System 2. Ordnung über:

(3)

$$c_n^{\ell+1} = c_n^\ell - \frac{\varepsilon}{2} (c_{n+1}^\ell - c_{n-1}^\ell) + \frac{\varepsilon^2}{2} (c_{n+1}^\ell - 2c_n^\ell + c_{n-1}^\ell) +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2} (c_{n+1}^\ell - 2c_n^\ell + c_{n-1}^\ell) - \frac{\varepsilon^2}{2} (c_n^\ell - 2c_{n-1}^\ell + c_{n-2}^\ell) + O(\varepsilon^3).$$

Die ersten drei Summanden der rechten Seite sind genau eine Taylor-Reihe bis zur 2. Ordnung der Grösse $c_n^{\ell+1}$ um c_n^ℓ ;

denn pro Zeiteinheit DT beträgt die räumliche Änderung: vDT , so dass $c_{n+vDT}^\ell = c_n^{\ell+1}$.

$$c(x-vDT) = c(x) - vDT \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{v^2 DT^2}{2!} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \dots$$

bzw. in Differenzenform (zentrale Differenzen):

$$c_n^{\ell+1} = c_n^{\ell} - \frac{vDT}{2Dx} (c_{n+1}^{\ell} - c_{n-1}^{\ell}) + \frac{v^2DT^2}{2Dx^2} (c_{n+1}^{\ell} - 2c_n^{\ell} + c_{n-1}^{\ell}) - \dots$$

Der 4. und 5. Term*balancieren sich nicht. Ihr Einfluss hängt von der Differenz des Gradienten am behandelten Ortspunkt und dem Gradienten am vorhergehenden Ortspunkt zum aktuellen Zeitpunkt ab. Wie gross der Einfluss im einzelnen ist, könnte nur im Zusammenhang mit dem "limiter" geprüft werden; denn auch der "limiter"-Einfluss hängt von eben diesem Gradienten ab.

BOOK, BORIS & HAIN (1975) benutzen im upstream-Verfahren statt

$$\epsilon_n^{\ell} = \frac{DT}{Dx} |v_n^{\ell}| \quad ; \quad \epsilon_n^{\ell} = \frac{DT}{Dx} \text{MAX}(|v_{n-\frac{1}{2}}^{\ell-1}|, |v_{n+\frac{1}{2}}^{\ell}|).$$

Es scheint plausibel, die Korrektur am Zeitpunkt ℓ sowohl von dem Geschwindigkeitsfeld des vorhergehenden Zeitpunktes als auch vom aktuellen Geschwindigkeitsfeld abhängig zu machen. Jedoch vergrössert sich dabei der rechnerische Aufwand, da das Geschwindigkeitsfeld des vorhergehenden Zeitschrittes gespeichert werden muss. Abb. 5 zeigt einen Vergleich bei unterschiedlicher Wahl von ϵ . Der Kurve T1 liegt

$$\epsilon_{n+\frac{1}{2}}^{\ell} = \frac{DT}{Dx} |v_{n+\frac{1}{2}}^{\ell}| \text{ zugrunde, der Kurve T2:}$$

$$\epsilon_{n+\frac{1}{2}}^{\ell} = \frac{DT}{Dx} \text{MAX}(|v_n^{\ell-1}|, |v_{n+1}^{\ell}|).$$

Das Maximum der Konzentrationsverteilung ist im Fall T1 etwas gedämpft gegenüber der Kurve T2. Die Steigungen der Flanken sind jedoch nicht sehr unterschiedlich. Das scheint auch plausibel, da das Phasenverhalten, wie in Abschn. 5 gezeigt wird, von η und damit von ϵ unabhängig ist. Im folgenden wird das ϵ des Falles T2 benutzt.

*in Gleichung (3)

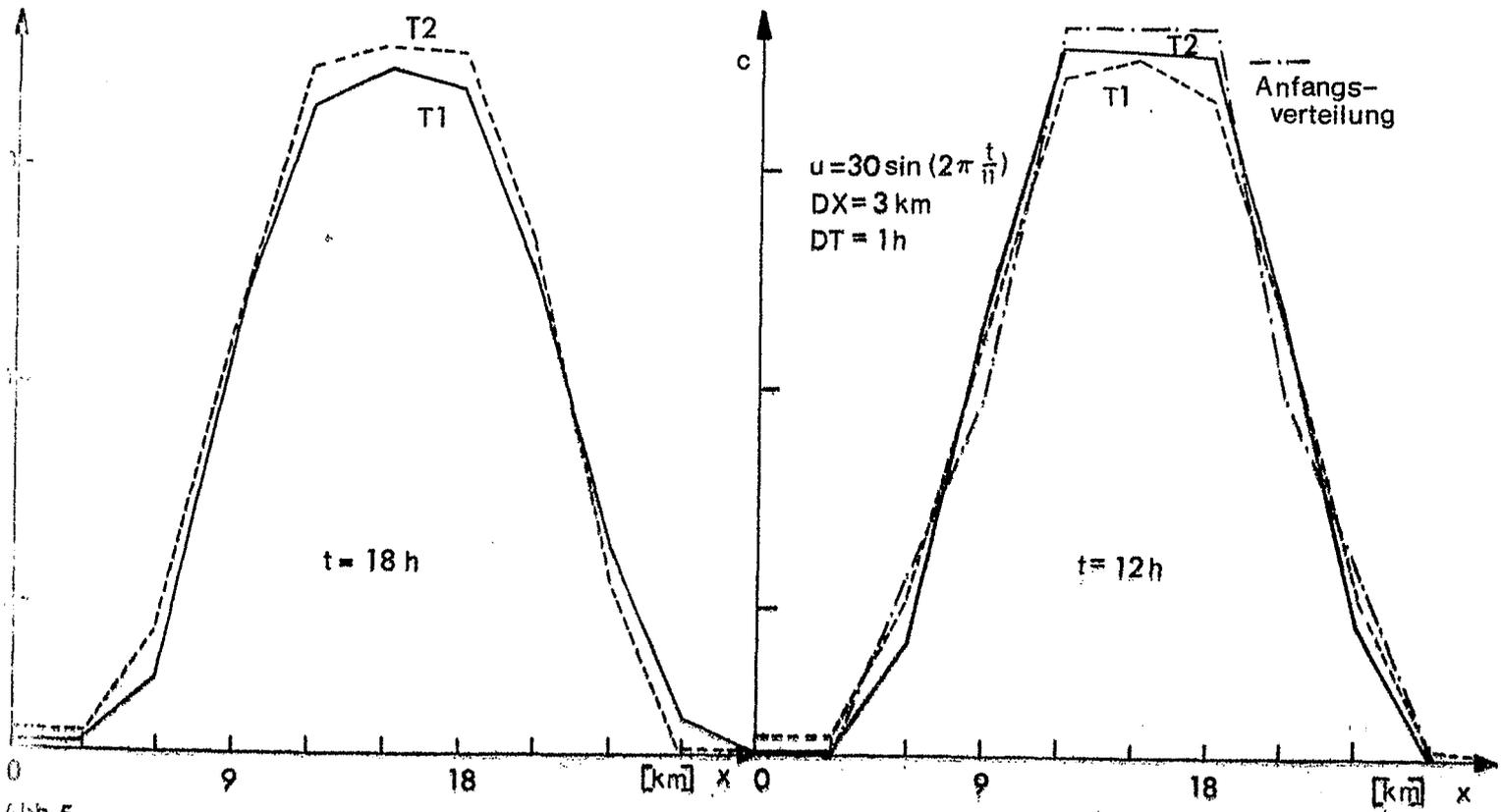


Abb.5

upstream-Verfahren mit $\eta = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{2}$

$$T1: \epsilon_{n+\frac{1}{2}}^l = \frac{DT}{Dx} |v_{n+\frac{1}{2}}^l|$$

$$T2: \epsilon_{n+\frac{1}{2}}^l = \frac{DT}{Dx} \text{MAX} (|v_n^{l-1}| , |v_{n+1}^l|)$$

Abb. 6 zeigt Vergleiche der exakten Lösung jeweils mit der Lax-Wendroff und upstream-Lösung mit und ohne FCT.

Kurve 1 stellt jeweils in a) und b) die exakte Lösung dar,
 Kurve 2 die Lösungen unter Anwendung von FCT mit $\eta = \eta(v)$ für
 $v = 27.778 \text{ cm sec}^{-1}$ nach 18 h,

Kurve 3 die Lösungen ohne Anwendung von FCT für $v = 27.778 \text{ cm sec}^{-1}$
 nach 18 h

Kurve 4 das gleiche für $v = 13.889 \text{ cm sec}^{-1}$ nach 36 h, u.

Kurve 5 die Lösungen ohne FCT für $v = 13.889 \text{ cm sec}^{-1}$ nach 36 h.

Die Kreuze x in a) stellen die analoge Lösung zu Kurve 2 nur mit konstantem $\eta = 1/8$ dar; die Kreise 0 den analogen Fall zu Kurve 4 mit $\eta = 1/8$. Die Ergebnisse mit konstantem η für alle Geschwindigkeiten sind merklich schlechter als die mit variablem $\eta(v)$.

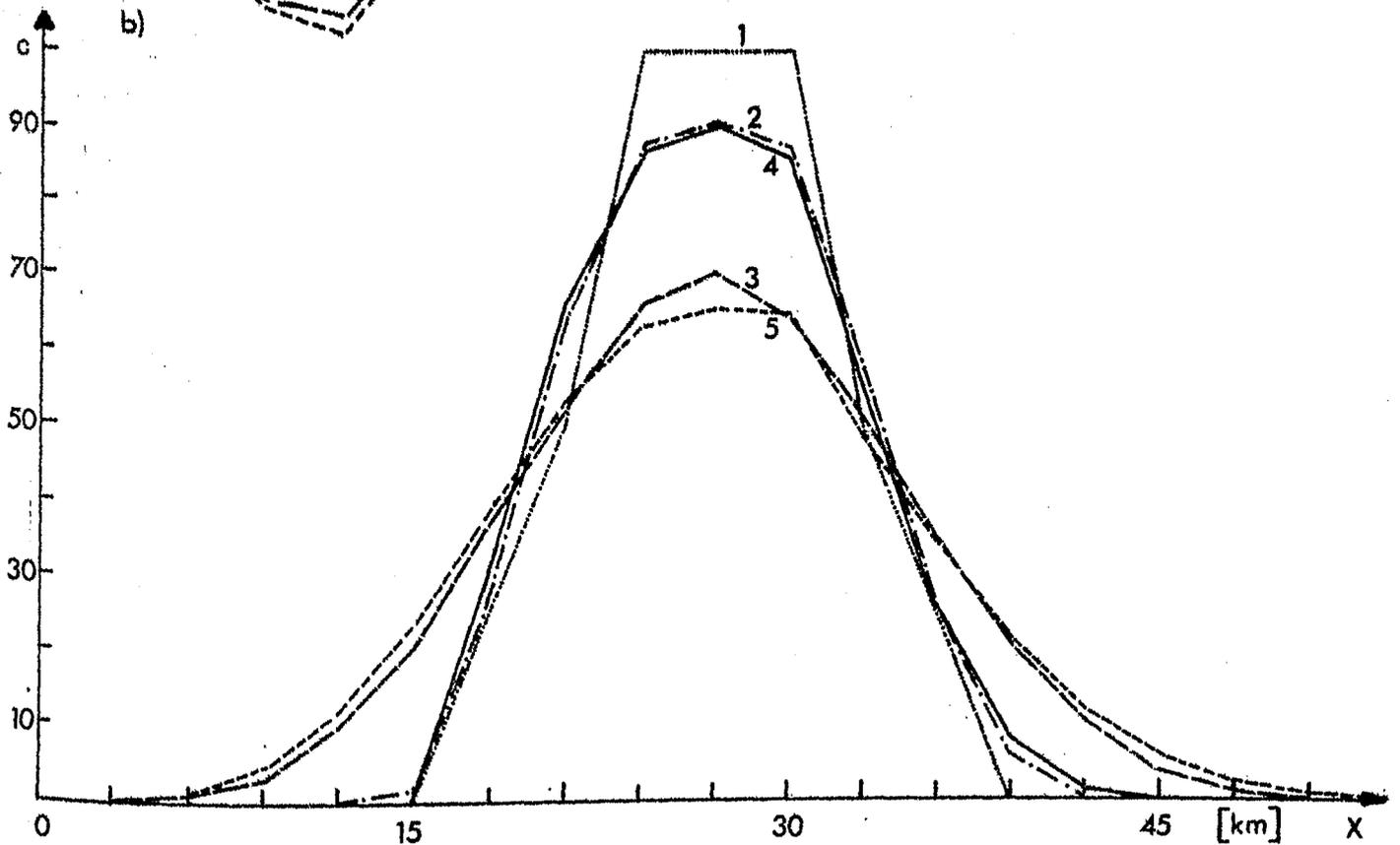
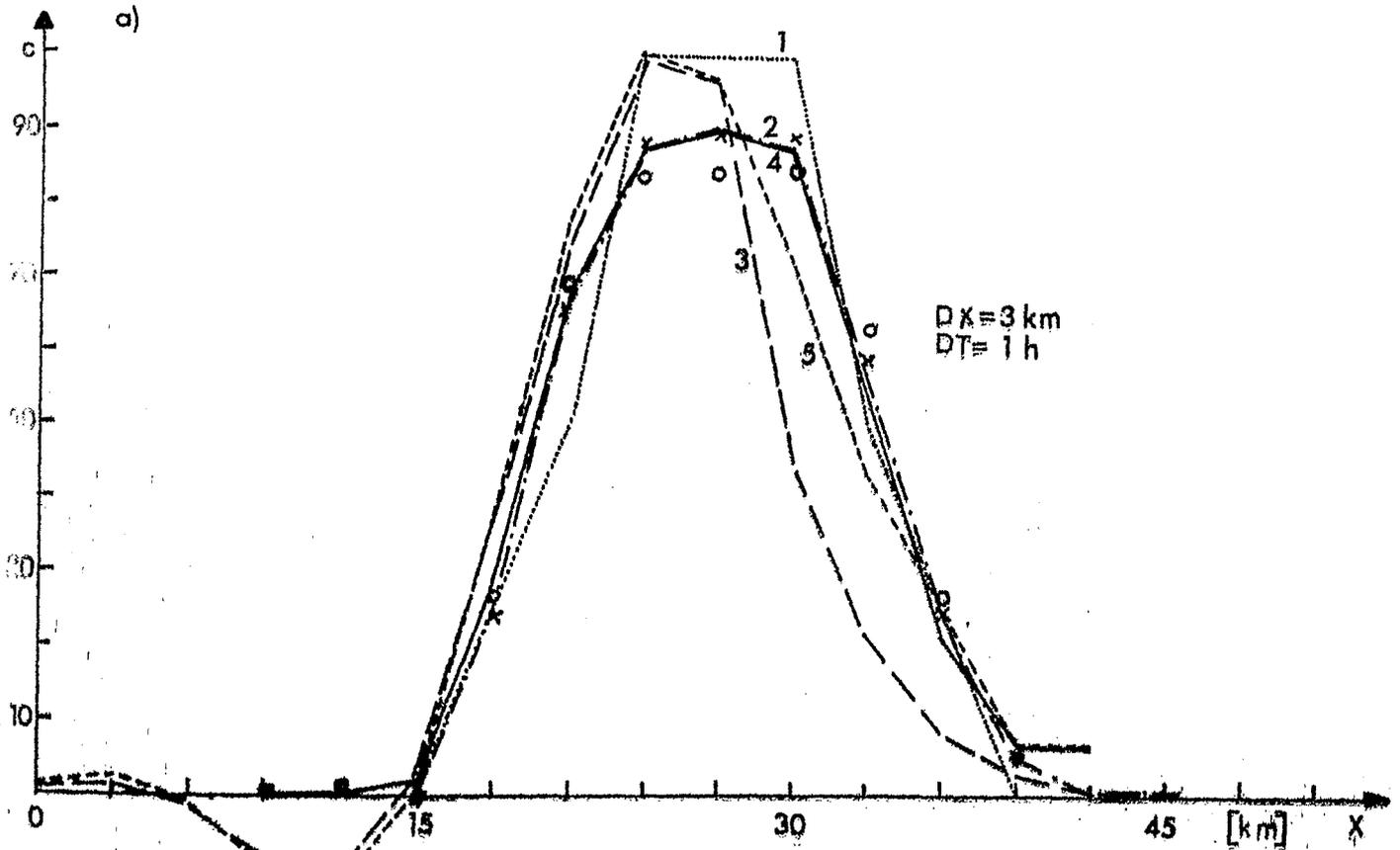


Abb.6

a) Lax-Wendroff-Verfahren

- 1 exakte Lösung
- 2 FCT($\eta=\eta(v)$), $v=27.778 \text{ cm sec}^{-1}$
- x Lax-Wendroff + FCT ($\eta=1/8$)
- 3 ohne FCT, $v = 27.778 \text{ cm sec}^{-1}$

b) upstream-Verfahren

- 4 FCT($\eta=\eta(v)$), $v=13.889 \text{ cm sec}^{-1}$
- o Lax-Wendroff + FCT ($\eta=1/8$)
- 5 ohne FCT, $v=18.889 \text{ cm sec}^{-1}$

5. Dispersion

In fast allen Differenzenverfahren treten Phasenfehler auf, und zwar meistens Phasenverzögerungen, die mit wachsender Wellenlänge gegen Null gehen, also normale Dispersion. Das führt zum Zerfließen eines Wellenpaketes und zur Aufsteilung einer Welle in Fortschrittingsrichtung (s. z.B. ausgezogene Kurve in Abb. 3a).

In den meisten Differenzenverfahren ist bei annehmbaren Phasenfehlern die Dämpfung gross oder umgekehrt. So ist z. B. im leapfrog-Verfahren, das keine Dämpfung enthält, die Dispersion sehr stark. Das upstream-Verfahren zeigt wesentlich bessere Phasenverhältnisse als das Lax-Wendroff-Verfahren. Dafür ist aber die Dämpfung sehr gross. Hier sieht man einmal mehr, wie wichtig es ist, die Wahl des Differenzenverfahrens nach der zu beschreibenden Physik auszurichten. FROMM hat ein Modell zur Verminderung des Phasenfehlers entwickelt. Dabei nutzt er die Tatsache, dass man mit $\epsilon = 1$ einen fehlerfreien Transport erhält. Er projiziert mit $\epsilon = 1$ einen Wert einen Zeitschritt vorwärts,* vom projizierten einen Schritt rückwärts und mittelt die beiden erhaltenen Ergebnisse, so dass sich die beiden Phasenfehler im wesentlichen herausheben. Die Dämpfung dieses Verfahrens ist jedoch verhältnismässig gross, da jeder Schritt einen Diffusionsfehler beinhaltet (FROMM, 1968).

Es werden die Phasenfehler der benutzten Verfahren untersucht, und zwar werden einzelne Fourierkomponenten unter der Wirkung einer konstanten Geschwindigkeit im eindimensionalen Fall betrachtet:

$$c_n^l = e^{i\kappa n D \Delta x}$$

a) upstream

sei $v > 0$

$$c_n^{l+1} = c_n^l - \epsilon (c_n^l - c_{n-1}^l), \text{ mit } c_n^l = e^{i\kappa n D \Delta x} \quad \text{folgt:}$$

$$\frac{c_n^{l+1}}{c_n^l} = 1 + \epsilon \cdot e^{-i\kappa n D \Delta x} (e^{i\kappa (n-1) D \Delta x} - e^{i\kappa n D \Delta x})$$

$$= 1 + \epsilon e^{-i\kappa D \Delta x} - \epsilon$$

$$= 1 - \epsilon(1 - \cos \kappa D \Delta x) - i\epsilon \sin \kappa D \Delta x.$$

* Vom ursprünglichen Wert rechnet er einen Schritt vorwärts,

Sei Δx die Phasenverschiebung in einem Zyklus. Dann gilt

$$\tan \kappa x \phi = \frac{\varepsilon \cdot \sin \kappa D x}{1 - \varepsilon (1 - \cos \kappa D x)} \quad \text{für das upstream Verfahren.}$$

Das Phasenverhalten des upstream-Verfahrens wird durch die Anwendung der FCT nicht beeinflusst:

$$\frac{(I + A_1) c_n^{l+1}}{c_n^l} = \frac{1}{c_n} (c_n^{l+1} - \eta (c_{n+1}^{l+1} - 2c_n^{l+1} + c_{n-1}^{l+1}))$$

$$\frac{c_n^{l+1}}{c_n^l} = 1 - \varepsilon e^{i\kappa D x} + \varepsilon$$

$$\frac{c_{n+1}^{l+1}}{c_n^l} = \frac{c_{n+1}^l}{c_n^l} - \frac{\varepsilon}{c_n^l} (c_{n+2}^l - c_{n+1}^l) = e^{i\kappa D x} (1 + \varepsilon - \varepsilon e^{i\kappa D x})$$

$$\frac{c_{n-1}^{l+1}}{c_n^l} = \frac{1}{c_n^l} (c_{n-1}^l - \varepsilon (c_n^l - c_{n-1}^l)) = e^{-i\kappa D x} (1 + \varepsilon - \varepsilon e^{i\kappa D x})$$

Daraus folgt:

$$\frac{(I + A_1) c_n^{l+1}}{c_n^l} = (1 + \varepsilon - \varepsilon e^{i\kappa D x}) (1 - \eta (e^{i\kappa D x} - 2 + e^{-i\kappa D x}))$$

$$\frac{(I + A_1) c_n^{l+1}}{c_n^l} = (1 - \varepsilon (1 - \cos \kappa D x) - i\varepsilon \sin \kappa D x) (1 - 2\eta \cos \kappa D x + 2\eta).$$

Der Quotient aus Imaginärteil und Realteil ist also gleich dem Tangens der Phasenverschiebung im Falle ohne Anwendung von FCT:

$$\tan \kappa x \phi = \frac{\epsilon \sin \kappa D x}{1 - \epsilon(1 - \cos \kappa D x)} \quad \text{für upstream + FCT.}$$

b) Lax-Wendroff- mit formaler Diffusion

$$(I+T+D)c_n^{\ell} = c_n^{\ell+1} = c_n^{\ell} + \left(-\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} + \eta\right)(c_{n+1}^{\ell} + (-\epsilon^2 - 2\eta)c_n^{\ell} + \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} + \eta\right)c_{n-1}^{\ell}$$

mit $c_n^{\ell} = e^{i\kappa n D x}$ folgt: (siehe 4.4.)

$$\frac{c_n^{\ell+1}}{c_n^{\ell}} = 1 + \left(-\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} + \eta\right)e^{i\kappa D x} + (-\epsilon^2 - 2\eta) + \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} + \eta\right)e^{-i\kappa D x}$$

$$= 1 - \epsilon^2 - 2\eta + (\epsilon^2 + 2\eta)\cos \kappa D x - i\epsilon \sin \kappa D x,$$

$$\tan \kappa x \phi = \frac{\epsilon \sin \kappa D x}{1 - (\epsilon^2 + 2\eta)(1 - \cos \kappa D x)}$$

Die Antidiffusion hat wiederum keinen Einfluss auf das Phasenverhalten, da sie in den Ausdruck

$$\frac{c_n^{\ell+1}}{c_n^{\ell}}$$

nur einen reellen Faktor einfügt.

Mit $\eta = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{2}$ folgt für das Lax-Wendroff-Verfahren + FCT:

$$\tan \kappa x \phi = \frac{\epsilon \sin \kappa D x}{1 - \epsilon(1 - \cos \kappa D x)},$$

es hat also das gleiche Phasenverhalten wie upstream + FCT.

Im Lax-Wendroff-Verfahren ohne FCT ist $\eta = 0$; dann folgt:

$$\tan \kappa x \phi = \frac{\varepsilon \sin \kappa D x}{1 - \varepsilon^2 (1 - \cos \kappa D x)}$$

In Abb. 7a) sind die relativen Phasenfelder der einzelnen Verfahren dargestellt; die ausgezogenen Kurven beschreiben das Phasenverhalten für upstream, upstream + FCT und Lax-Wendroff + FCT für die jeweils angegebenen ε , die gestrichelten Kurven beschreiben das Phasenverhalten für das Lax-Wendroff-Verfahren.

Der relative Phasenfehler ist definiert:

$$R P h F = \frac{\kappa \phi - v D T}{v D T} = \frac{\kappa \phi - \varepsilon D x}{\varepsilon D x}$$

Für lange Wellen ($\kappa D x \ll \frac{\pi}{8}$) ist der Phasenfehler für alle Verfahren klein. Für kurze Wellen steigt er für alle ε ausser $\varepsilon = 1/2$ stark an. Wenn auch FCT das Phasenverhalten des Lax-Wendroff-Verfahrens verbessert, so muss doch in Problemen, in denen gerade die kurzen Wellen die physikalisch wichtigen sind, von Euler'schen expliziten Verfahren abgesehen werden.

6. Dämpfung

Die Dämpfung wird beschrieben durch die relative Amplitudenänderung einer Fourierkomponente während eines Zeitschrittes:

$$\left(\frac{c_n^{l+1}}{c_n^l} \right)^2$$

a) upstream

$$\left(\frac{c_n^{l+1}}{c_n^l} \right)^2 = (1 - \varepsilon(1 - \cos \kappa D x) - i \varepsilon \sin \kappa D x)^2$$

$$\left(\frac{c_n^{l+1}}{c_n^l} \right)^2 = 1 - 2\varepsilon(1 - \cos \kappa D x) + 2\varepsilon^2(1 - \cos \kappa D x)$$

b) upstream + FCT, Lax-Wendroff + FCT

$$\left(\frac{c_n^{\ell+1}}{c_n^\ell}\right)^2 = (1 - \varepsilon(1 - \cos \kappa D x) - i \varepsilon \sin \kappa D x)^2 (1 - 2\eta \cos \kappa D x + 2\eta)^2$$

mit $\eta = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}$ folgt

$$\left(\frac{c_n^{\ell+1}}{c_n^\ell}\right)^2 = (1 - 2\varepsilon(1 - \cos \kappa D x) + 2\varepsilon^2(1 - \cos \kappa D x))(1 + (\varepsilon - \varepsilon^2)(1 - \cos \kappa D x))^2$$

c) Lax-Wendroff

$$\left(\frac{c_n^{\ell+1}}{c_n^\ell}\right)^2 = (1 - \varepsilon^2(1 - \cos \kappa D x) - i \varepsilon \sin \kappa D x)^2$$

$$\left(\frac{c_n^{\ell+1}}{c_n^\ell}\right)^2 = 1 - 2\varepsilon^2(1 - \cos \kappa D x) + \varepsilon^4(1 - \cos \kappa D x)^2 + \varepsilon^2(1 - \cos^2 \kappa D x)$$

$$\left(\frac{c_n^{\ell+1}}{c_n^\ell}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2(1 - \cos \kappa D x)^2 + \varepsilon^4(1 - \cos \kappa D x)^2$$

Abb. 7b) zeigt die relativen Amplitudenänderungen während eines Zyklus für die verschiedenen Verfahren, die ausgezogenen Kurven für das upstream-Verfahren + FCT und das Lax-Wendroff-Verfahren + FCT, die gestrichelten Kurven für das upstream-Verfahren und die gepunkteten Kurven für das Lax-Wendroff-Verfahren für die angegebenen ε .

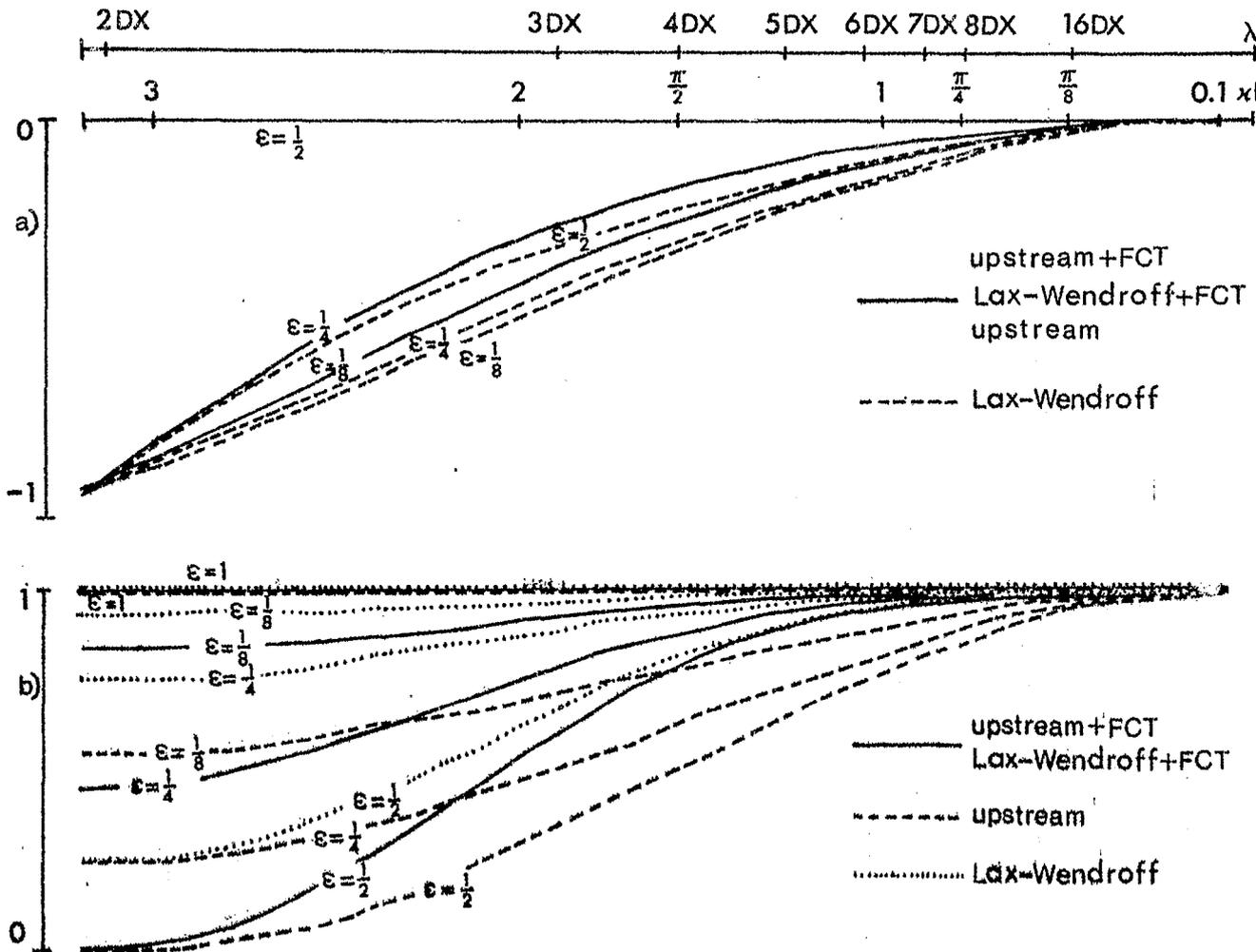


Abb. 7

- a) relativer Phasenfehler $\frac{x\phi - vDT}{vDT}$
- b) relative Amplitudenänderung $\left(\frac{c_n^{\lambda+1}}{c_n^\lambda}\right)^2$

7. Auflösbarkeit

Wie schon oben erwähnt, muss wegen der Wahl des numerischen Verfahrens auf eine hohe Auflösung von Fronten oder schiefen Peaks verzichtet werden.

Hier soll der Versuch unternommen werden, den Begriff der hohen Auflösung quantitativ zu erfassen. Dazu sei wieder die Spektraldarstellung der Anfangsverteilung betrachtet. Spektrale Komponenten mit $\lambda \leq 2DX$ sind nicht mehr auflösbar, d.h., dass das

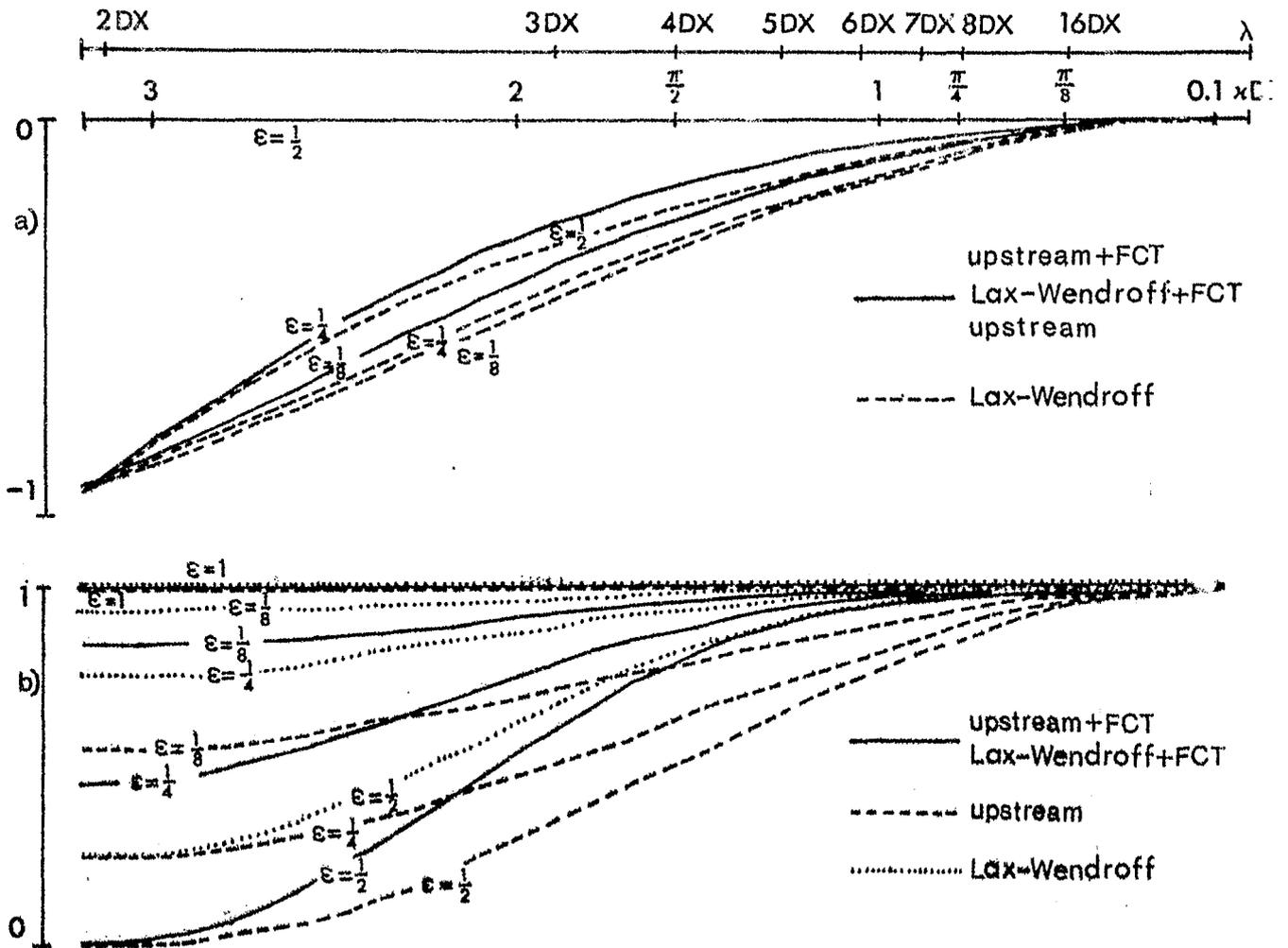


Abb. 7

- a) relativer Phasenfehler $\frac{\kappa\phi - vDT}{vDT}$
- b) relative Amplitudenänderung $\left(\frac{c_n^{l+1}}{c_n^l}\right)^2$

7. Auflösbarkeit

Wie schon oben erwähnt, muss wegen der Wahl des numerischen Verfahrens auf eine hohe Auflösung von Fronten oder schiefen Peaks verzichtet werden.

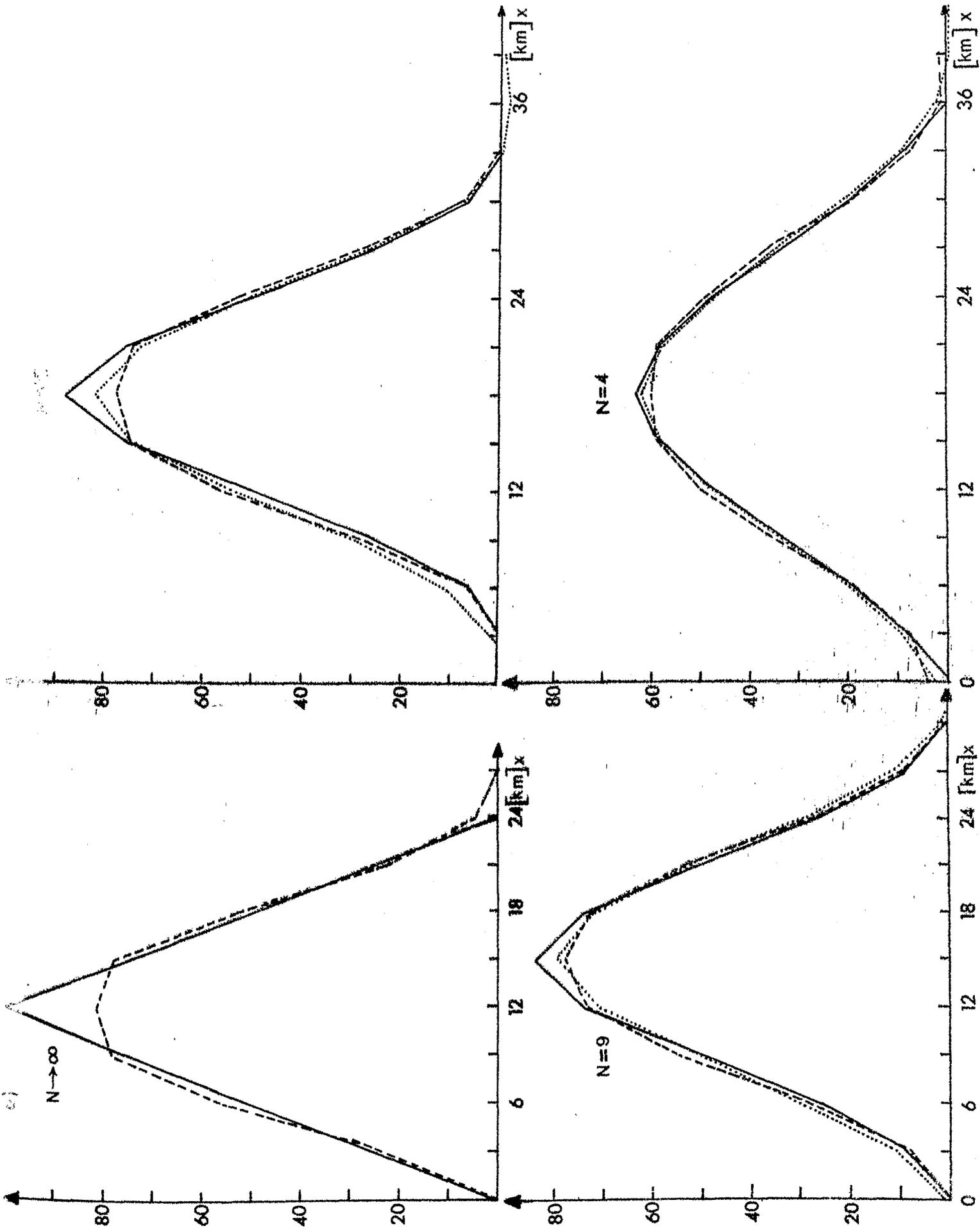
Hier soll der Versuch unternommen werden, den Begriff der hohen Auflösung quantitativ zu erfassen. Dazu sei wieder die Spektraldarstellung der Anfangsverteilung betrachtet. Spektrale Komponenten mit $\lambda \leq 2Dx$ sind nicht mehr auflösbar, d.h., dass das

Spektrum bei $\lambda = 2Dx$ bzw. $\kappa = \pi/Dx$ abgeschnitten wird. Es ist also darauf zu achten, dass Dx so klein gewählt wird, dass das Spektrum erst im flachen Bereich abgeschnitten wird.

Die Dreieckverteilung a) in Abb. 8 wurde Fourier-zerlegt. Für $N = 12$ ist $\lambda = 2Dx$. Es können also nur die ersten 12 Fourier-Komponenten aufgelöst werden. In Abb. 9 sind jeweils die Überlagerungen aus den ersten N Komponenten (ausgezogene Kurven), sowie die numerischen Lösungen nach 12 Zyklen Advektion (gestrichelte Kurven) dargestellt. Die Abweichungen der numerischen von den exakten Lösungen nehmen entsprechend den Ergebnissen aus dem Dispersions- und Dämpfungsverhalten für wachsende Ordnungen zu. Die gepunkteten Kurven zeigen die Fourierdarstellungen unter Berücksichtigung der Dämpfungs- und Dispersionsfehler. Dass sie trotzdem nicht mit den Kurven der numerischen Lösungen übereinstimmen, ist wohl im wesentlichen eine Wirkung des "limiters", der in die Berechnung der Phasen- und Dämpfungsfehler nicht mit eingegangen ist.

- Fourierdarstellung bis zur Ordnung N
- - - numerische Lösung nach 10 Zyklen upstream + FCT
- Fourierdarstellung bis zur Ordnung N mit Dispersions- und Diffusionsfehlern

Abb. 8



LITERATUR

- BAER, F., & T.J. SIMONS, 1970: Computational stability and time truncation of coupled nonlinear equations with exact solutions.
Month. Weath. Rev., 98, 665-679
- BOOK, D.L., J.P. BORIS & K. HAIN, 1975: Flux-corrected transport II: Generalization of the method.
J. Comput. Phys., 18, 248-283
- BORIS, J.P. & D.L. BOOK, 1973: Flux-corrected transport. I. SHASTA, A fluid transport algorithm that works.
J. Comput. Phys., 11, 38-69
- FISCHER, G., 1965: A survey of finite-difference approximations to the primitive equations.
Month. Weath. Rev., 93, 1-10
- FROMM, J.E., 1968: A method for reducing dispersion in convective difference schemes.
J. Comput. Phys., 3, 176-189
- LAM, D.C.L., 1975: Computational aspects of solving nearshore advection-diffusion problems.
Symposium on Modeling of Transport Mechanisms in Oceans and Lakes. CCIW, Burlington/Ont.
- PLATZMAN, G.W., 1958: The lattice structure of the finite-difference primitive and vorticity equations.
Month. Weath. Rev., 86, 285-292
- SIMONS, T.J., 1973: Development of three-dimensional numerical models of the Great Lakes.
Sci. Ser. No. 12, Canada Centre for Inland Waters, Burlington/Ont.
- SMAGORINSKY et al., 1965: Numerical Results from a Nine-Level General Circulation Model of the Atmosphere.
Month. Weather Rev., 93, 727-768.
- SPRAGGS, L.D. & R.L. Street, 1975: Three-dimensional simulation of thermally-influenced hydrodynamics flows.
Technical Report No. 190, Department of Civil Engineering, Stanford University.