

BERICHTE
aus dem
INSTITUT FÜR MEERESKUNDE
an der
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT · KIEL

Nr. 64

**Die zweidimensionalen Seiches
der Ostsee**

von

CHRESTEN WÜBBER

DOI 10.3289//FM_BER_64

Berichte
aus dem
Institut für Meereskunde
an der
Christian-Albrechts-Universität Kiel
Nr. 64

Die zweidimensionalen Seiches der Ostsee
von
Chresten Wübber

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von :
Chresten Wübber
Institut für Meereskunde
Abt. Theoretische Ozeanographie
23 Kiel
Düsternbrooker Weg 20

Diese Arbeit wurde 1979 als Diplomarbeit beim
Fachbereich Mathematik-Naturwissenschaften der
Christian-Albrechts-Universität Kiel eingereicht.

ISSN 0341 - 8561

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	II
Summary	III
1. Einleitung und Problemstellung	1
2. Formulierung der Methode	4
2.1. Die hydrodynamischen Grundgleichungen	4
2.2. Prinzipielle Lösungen	5
2.3. Beschreibung der Methode	7
3. Das numerische Modell	10
3.1. Das Differenzenverfahren	10
3.2. Numerische Stabilität des Differenzen- verfahrens	11
3.3. Fehler des Differenzenverfahrens	13
4. Testrechnungen	14
4.1. Einleitung	14
4.2. Testbecken 1	15
4.3. Ergebnisse im Testbecken 1	16
4.4. Testbecken 2	20
5. Berechnung der Seiches der Ostsee	25
5.1. Das numerische Modell der Ostsee	25
5.2. Rechnungen mit dem Ostsee-Modell	27
5.3. Ergebnisse der Rechnungen für die Ostsee	29
6. Zusammenfassung der Ergebnisse für die Ostsee	41
7. Anhang : Benutzte Programme	43
Literaturverzeichnis	44
Abbildungsverzeichnis	47

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein einfaches zweidimensionales Verfahren zur numerischen Berechnung der Seiches eines abgeschlossenen Meeresbeckens vorgestellt. Das Verfahren wird in mehreren Testrechnungen überprüft, wobei die Ergebnisse von D. Rao (1965) für ein rechteckiges Becken auf der rotierenden Erde als Bezugslösungen dienen. Die sich dabei ergebenden Abweichungen sind gering. Dieses Verfahren wird dann zur Berechnung der Seiches der Ostsee angewendet. Dem dabei entwickelten numerischen Ostsee-Modell liegen die Tiefenverteilung und das Gitternetz des Modells von J. Kielmann (1976) zugrunde. Es werden damit die ersten zehn Schwingungsordnungen der Ostsee-Seiches für verschiedene Werte des Coriolisparameters f berechnet. Dabei ergeben sich zum Teil erhebliche Abweichungen gegenüber den eindimensionalen Ergebnissen von G. Neumann (1941) und W. Krauß und L. Magaard (1962). Besonders die erste Ordnung ergibt bei der zweidimensionalen Rechnung mit Berücksichtigung der Erdrotation ein völlig anderes Bild. Sie hat hier nicht mehr den Charakter einer einknotigen Schwingung im System Ostsee - Bottnischer Meerbusen, sondern muß als Schwingung der gesamten Ostsee angesehen werden. Die Periode dieser Ordnung nimmt dabei von 40.55 h für $f=0$, was auch etwa dem eindimensionalen Ergebnis entspricht, auf 31.03 h für $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ab. Die Ergebnisse der eindimensionalen Rechnungen für die höheren Ordnungen entsprechen in vielen prinzipiellen Eigenschaften den hier berechneten Lösungen. Es zeigt sich jedoch, daß die für die eindimensionale Methode angenommene Aufteilung der Ostsee in die beiden Systeme Ostsee - Finnischer Meerbusen und Ostsee - Bottnischer Meerbusen nicht möglich ist, da sich beide Systeme zum Teil sehr stark gegenseitig beeinflussen.

Summary

In this paper a simple two-dimensional method is outlined to calculate numerically the free gravitational oscillations in enclosed basins. The test calculations within a rectangular basin of constant depth on a rotating earth show good agreement with the solutions given by D. Rao (1965). The present method is used to calculate the seiches of the Baltic Sea. The grid and the bottom topography for the numerical model of the Baltic Sea are taken from J. Kielmann (1976). With this model, the lowest ten gravitational modes of the Baltic Sea are determined for various values of the Coriolis parameter f . Some of these modes show remarkable differences as compared with the one-dimensional results obtained by G. Neumann (1941) and Krauß and Maggaard (1962). Especially, the modal structure of the lowest mode is completely altered if the effect of the earth's rotation is taken into account. This mode is not longer limited to the system Baltic proper - Gulf of Bothnia, but must be interpreted as an oscillation of the entire Baltic. The period of this mode decreases from 40.55 h for $f=0$ to 31.03 h for $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Many of the main features of the higher modes are also obtained from the results of the one-dimensional channel calculations, but the two-dimensional calculations presented here show, that it is not possible to separate the Baltic Sea into the two independent systems Baltic proper - Gulf of Finland and Baltic proper - Gulf of Bothnia, since there is always a strong interaction between the two systems.

1. Einleitung und Problemstellung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Seiches der Ostsee. Darunter versteht man die freien Schwingungen oder Eigenschwingungen der Wasseroberfläche eines Beckens um eine stabile Gleichgewichtslage. Jedes ganz oder teilweise abgeschlossene Wasserbecken ist ein schwingungsfähiges System, dessen Eigenschwingungen durch die Geometrie des Beckens vollständig bestimmt sind. Die Perioden und die räumlichen Strukturen der Schwingungen sind daher für das jeweilige Becken charakteristisch. Seiches werden durch plötzliche Änderungen der auf die Wasseroberfläche wirkenden Kräfte, d.h. durch sprungartige Änderungen des Wind- oder Luftdruckfeldes, ausgelöst. Dies kann auch zu Resonanzerscheinungen führen, wenn die Zeitskala der Schwankung der äußeren Kräfte in der Größenordnung der charakteristischen Perioden liegt. Seiches treten daher bei allen Arten von Einschwingvorgängen auf. Die Kenntnis der vorkommenden Perioden sowie der räumlichen Strukturen ist deshalb auch für andere Untersuchungen wichtig, um die Einschwingvorgänge als solche erkennen zu können.

Die Seiches der Ostsee sind mehrfach behandelt worden, sowohl durch die direkte Auswertung von Pegelzeitreihen als auch mit theoretischen und experimentellen Methoden. Eine Übersicht über diese Untersuchungen geben A. Defant (1960) und E. Lisitzin (1974). Allen dort genannten Arbeiten ist die Aufteilung der Ostsee in zwei schwingungsfähige Systeme gemeinsam. Diese sind :

- 1). Ostsee - Finnischer Meerbusen
- 2). Ostsee - Bottnischer Meerbusen

Dabei erscheint das erste System bevorzugt zu sein, da sich fast alle Auswertungen von Pegelzeitreihen darauf beziehen (siehe G. Neumann (1941)). Die Ergebnisse der verschiedenen Autoren für die Periode der ersten Schwingungsordnung dieses Systems, d.h. für die einknotige Schwingung, sind in Tabelle 1 wiedergegeben. Es gibt verschiedene mögliche Gründe für die auftretenden Differenzen. Soweit es die theoretischen Berechnungen betrifft, können Mängel der verwendeten Verfahren dafür verantwortlich sein. Es handelt sich dabei durchweg um eindimensionale Beschreibungen der Seiches auf

der Grundlage der Chrystal'schen Gleichung. Dadurch werden Querbewegungen von vornherein ausgeschlossen. Es ist fraglich, ob diese Vereinfachung für ein kompliziertes Becken wie der Ostsee zulässig ist. Auch sind damit gekoppelte Schwingungen der beiden Ostsee-Systeme nur schwer darstellbar. Schließlich muß der Einfluß der Erdrotation vernachlässigt werden. Wie die Arbeiten von D.Rao (1965) und D.Rao und D.Schwab (1974, 1977) zeigen, ist dieser Einfluß zumindest für die räumliche Struktur der Schwingungen von großer Bedeutung.

Es soll in dieser Arbeit versucht werden, ein zweidimensionales numerisches Verfahren zur Berechnung der Seiches der Ostsee anzuwenden, das die obigen Unzulänglichkeiten beseitigt und gleichzeitig einfacher zu handhaben ist als die bekannten zweidimensionalen Verfahren von D.Rao und D.Schwab (1974) und G.Platzman (1972). Hierbei werden die Seiches nicht als Lösung eines Eigenwertproblems berechnet, sondern über den Umweg eines Anfangswertproblems. Dazu wird ein numerisches Modell der Ostsee entwickelt. Das numerische Verfahren wurde von A.Sielecki (1967) angegeben und erlaubt eine zeitliche Integration der hydrodynamischen Grundgleichungen. Damit ist eine räumliche Auflösung der Ostsee in einem quadratischen Gitter der Gitterweite zehn Kilometer möglich.

Autor	Methode	Periode
Neumann, 1941	Pegelauswertung	27.6 h
Neumann, 1941	Defant'sche Rest- methode	27.5 h (+)
Krauß und Magaard, 1962	Defant'sche Rest- methode	27.4 h (+)
Lisitzin 1959	Pegelauswertung	26.2 h
Dubow, 1935	Modellbecken- experiment	30.2 h (-)
Neumann, 1941	Defant'sche Rest- methode	29.5 h (-)
Neumann, 1941	Hidaka-Methode	29.3 h (-)

Tabelle 1

Ergebnisse verschiedener Autoren für die Periode der einknotigen Schwingung im System Ostsee-Finnischer Meerbusen.

(+) :westliche Begrenzung im Fehmarn Belt

(-) :westliche Begrenzung im Kleinen Belt

2. Formulierung der Methode

2.1 Die hydrodynamischen Grundgleichungen

Bei den Seiches eines Wasserbeckens handelt es sich um ein System von freien Schwingungen der Wasseroberfläche, dessen verschiedene Ordnungen verschiedene Perioden mit dazugehörigen räumlichen Strukturen besitzen. Die niedrigsten Ordnungen mit den längsten Perioden, die hier betrachtet werden sollen, haben für ein Becken in den Abmessungen der Ostsee die Eigenschaften langer, stehender Wellen. Dies erlaubt einige Vereinfachungen in den beschreibenden hydrodynamischen Grundgleichungen. Für die hier durchgeführten Rechnungen wird angenommen :

- 1) das Wasser ist homogen und inkompressibel ;
- 2) die vertikale Druckverteilung ist durch die hydrostatische Grundgleichung gegeben ;
- 3) die Bewegungen verlaufen reibungsfrei ;
- 4) die Vertikalkomponente der Corioliskraft ist vernachlässigbar ;
- 5) außer dem Luftdruck wirken keine äußeren Kräfte.

Die durch Störungsrechnung erster Ordnung linearisierten und vertikal integrierten Bewegungsgleichungen für den Volumentransport lauten dann (W.Krauß , 1973) :

$$2.1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = f \cdot V - \gamma \cdot H(x, y) \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{H(x, y)}{g} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial x}$$

$$2.2) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -f \cdot U - \gamma \cdot H(x, y) \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{H(x, y)}{g} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial y}$$

Die entsprechende Kontinuitätsgleichung ist

$$2.3) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}$$

Dabei wurde stets $\zeta \ll H$ angenommen. Da alle hier betrachteten Becken als vollständig abgeschlossen angesehen werden, lautet die allgemeine Randbedingung für jeden Randpunkt

$$2.4) \quad (U, V) \cdot \mathcal{N} = 0$$

d.h. die Komponente des Transports senkrecht zum Rand muß dort zu Null werden.

Die benutzten Symbole haben folgende Bedeutung :

- (U, V) - Vektor des horizontalen Volumentransportes
- ζ - Auslenkung der Wasseroberfläche
- $f = 2 \cdot \Omega \cdot \sin \varphi$ - Coriolisparameter
- Ω - Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation
- φ - geographische Breite
- $H(x, y)$ - variable Wassertiefe
- $P_0(x, y, t)$ - variabler Luftdruck an der Wasseroberfläche
- γ - Erdbeschleunigung
- ρ - Dichte des Wassers
- \mathcal{N} - äußere Normalenvektor des Randes

Für alle folgenden Rechnungen wird gesetzt :

$$\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\gamma = 981 \text{ cm sec}^{-2}$$

Es wurde hier die Volumentransportform der hydrodynamischen Grundgleichungen gegenüber der Form mit vertikal gemittelten Geschwindigkeiten bevorzugt, da dies für die numerischen Rechnungen vorteilhafter ist (D.Harris und C.Jelesnianski, 1964). Der räumlich und zeitlich variable Luftdruck wird lediglich zur Anregung der Seiches verwendet. Nach der Anregungsphase wird er räumlich konstant gesetzt.

2.2 Prinzipielle Lösungen

Es existieren zwei prinzipielle Lösungstypen des homogenen Gleichungssystems 2.1 - 2.4, d.h. für $P_0=0$. Die erste Art besteht aus freien, stehenden Oberflächenwellen, wobei die Schwerkraft als rücktreibende Kraft wirkt. Diese Wellen existieren unabhängig von der Berücksichtigung der Erdrotation. Lediglich ihre Periode und räumliche Struktur ändert sich bei Veränderung des Coriolisparameters f . Lösungen der zweiten Art können nur bei Berücksichtigung der Erdrotation exi-

stieren, da hier die räumlich variable potentielle Vorticity

$$\xi = \frac{\zeta + f}{H}, \quad \zeta = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

als rücktreibende Kraft wirkt. Die potentielle Vorticity kann sich dabei entweder durch eine variable Bodentopographie oder durch die Variation des Coriolisparameters f mit der geographischen Breite ändern. Die Periode dieser Lösungen sind stets größer als die Trägheitsperiode. Im Gegensatz zum ersten Lösungstyp haben diese Wellen keine ausgeprägte Struktur in der Wasseroberfläche, so daß sie sich leicht von den Oberflächenwellen des ersten Lösungstyps unterscheiden lassen. Zu diesen Lösungen geben D. Rao und D. Schwab (1974) einige Beispiele an.

Die Seiches eines Beckens sind die Lösungen der ersten Art. Der zweite Lösungstyp wird in dieser Arbeit nicht behandelt, obwohl er bei den späteren Rechnungen in der Ostsee mit $f \neq 0$ auch auftritt.

Durch die Annahme von zeitlich periodischen Lösungen wird das Gleichungssystem 2.1 - 2.3 mit der Randbedingung 2.4 für $P_0 = 0$ zu einem Eigenwertproblem mit einer diskreten Folge von Eigenwerten ω_n und Eigenfunktionen ξ_n (D. Rao, 1965). So lassen sich die Eigenfunktionen des ξ -Feldes allgemein darstellen als

$$2.5) \quad \xi_n(x, y, t) = A_n(x, y) \cdot \cos(\omega_n t - \theta_n(x, y)) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Für einige einfache Beckenformen lassen sich die Funktionen A_n und θ_n analytisch berechnen (siehe z.B. H. Lamb, 1932, Kap. VIII). Jedoch schon für ein rechteckiges Becken konstanter Tiefe auf der rotierenden Erde ist eine Lösung in geschlossener Form nicht möglich (D. Rao, 1965). Die numerische Lösung des Eigenwertproblems für ein beliebiges Becken auf der rotierenden Erde wurde von D. Rao und D. Schwab (1974) angegeben. Allerdings sind hier der räumlichen Auflösung der Funktionen A_n und θ_n durch die Größe des zur Verfügung stehenden Rechners bei vertretbarem Aufwand sehr enge Grenzen gesetzt. Für die zu betrachtende Ostsee wäre die angestrebte Auflösung auf einem quadratischen Gitter der Gitterweite zehn Kilometer nicht möglich gewesen. Es soll also versucht werden, durch eine andere Methode eine Lösung des Problems zu erreichen.

2.3 Beschreibung der Methode

Das in Kapitel 2.2 beschriebene Problem wird hier als Anfangswertproblem behandelt. Dementsprechend wird für das jeweilige Becken ein numerisches Modell auf der Basis des vollständigen Gleichungssystems 2.1 - 2.4 entwickelt. Das hierfür verwendete Differenzenverfahren von A. Sielecki (1967) erlaubt dann eine numerische Integration der hydrodynamischen Grundgleichungen mit der Zeit. Die damit durchgeführten Rechnungen gliedern sich in zwei Schritte. Im ersten Schritt wird im Becken mittels einer äußeren Kraft eine Anfangsauslenkung der Wasseroberfläche mit dem zugehörigen Strömungsfeld erzeugt. Diese Anfangsauslenkung läßt sich als Summe der Eigenfunktionen 2.5 zu einer bestimmten Phasenlage φ' darstellen als

$$\zeta(x, y, t_0) = \sum_n a_n \cdot A_n(x, y) \cdot \cos(\omega_n \cdot t_0 - \theta_n(x, y) - \varphi'_n)$$

Im zweiten Schritt wird die äußere Kraft zu Null gesetzt und die Anfangsauslenkung zerfällt unter dem Einfluß der rücktreibenden Kraft der Erdanziehung in die einzelnen am Aufbau der Anfangsauslenkung beteiligten Eigenschwingungen des Beckens. Dieser Vorgang entspricht im Wesentlichen der natürlichen Anregung der Seiches durch sprungartige Änderungen der an der Wasseroberfläche angreifenden Kräfte. Da das Modell keine Reibung enthält, werden die in der Anfangsphase erzeugten Schwingungen ungedämpft weiterschwingen, so daß es prinzipiell möglich ist, an jedem Punkt des Beckens beliebig lange Zeitreihen des Wasserstandes zu berechnen. Dies stellt allerdings relativ hohe Anforderungen an das Differenzenverfahren, da es keine künstliche Dämpfung enthalten darf und ohne einen Reibungsterm stabil sein muß. Der numerische Phasenfehler muß ebenfalls klein bleiben. Das von A. Sielecki (1967) angegebene Verfahren erfüllt diese Voraussetzungen. Das Verfahren und seine Eigenschaften wird in den folgenden Kapiteln beschrieben.

Die so gewonnenen Wasserstandszeitreihen werden dann Punkt für Punkt fouriertransformiert, so daß für jeden Gitterpunkt des Beckens ein Amplituden- und ein Phasenspektrum des Wasserstandes vorliegt. Die Seiches können nun leicht

in den Spektren identifiziert werden, da sie für ihre jeweilige Eigenfrequenz ein relatives Maximum im Amplitudenspektrum sowie einen Phasensprung von 180° im Phasenspektrum aufweisen müssen. Nimmt man nun zu einer so aus dem Spektrum ermittelten Eigenfrequenz ω_n für jeden Gitterpunkt die zugehörigen Amplituden- und Phasenwerte, so erhält man aus den Amplitudenspektren die Amplitudenfunktion $A_n(x,y)$ und aus dem Phasenspektren die Phasenfunktion $\theta_n(x,y)$ der Eigenfunktion 2.5. Die Isolinien dieser beiden Funktionen ergeben dann die Darstellung der Eigenschwingung durch ihre Hubhöhen- und Flutstundenlinien.

Die Genauigkeit der Angabe der Eigenfrequenz hängt allerdings von der Frequenzauflösung im Spektrum und damit von der Länge der Zeitreihen ab. Die minimale Zeitreihenlänge wird durch die Forderung bestimmt, daß alle in Frage kommenden Eigenschwingungen im Spektrum aufgelöst werden müssen. Die maximale Zeitreihenlänge ist durch den numerischen Fehler des Differenzenverfahrens sowie durch die technischen Gegebenheiten wie Zwischenspeicherplatz und Rechenzeit beschränkt. Ist jedoch die erste Forderung erfüllt, so genügt dies zur Bestimmung der Funktionen A_n und θ_n . Die Aussage über die Eigenfrequenz läßt sich dann verbessern, indem man die Zeitreihenlänge durch das Anhängen von Nullen verdoppelt oder vervierfacht (R. Henry und P. Graefe, 1971). Dadurch wird die Frequenzauflösung im Spektrum ebenfalls verdoppelt oder vervierfacht.

Welche Schwingungsordnungen angeregt werden, hängt von der Anfangsauslenkung und damit von der Form der äußeren Kraft ab, die im Folgenden näher beschrieben werden soll. Für alle Rechnungen wird stets vom Anfangszustand

$$\xi=0, U=0, V=0 \quad \text{für alle Punkte des Beckens}$$

ausgegangen. Dies ist notwendig, da das Modell keine Reibung enthält und somit den Einfluß fehlerhafter Anfangswerte nicht mit der Zeit dämpfen kann. Obwohl es zur gezielten Anregung bestimmter Schwingungsordnungen wünschenswert wäre, ist es also in der Regel nicht möglich, eine bestimmte Anfangsverteilung des ξ -Feldes vorzugeben, da das zugehörige Strömungsfeld unbekannt ist. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit einer äußeren Anregung des Schwingungsvorganges. Hierzu dient in allen Rechnungen ein räumlich und zeitlich

variables Luftdruckfeld der allgemeinen Form :

$$2.6) \quad p_0(x, y, t) = \begin{cases} C \cdot (1 - \cos(\frac{\pi}{T_0} \cdot t)) \cdot F(x, y) & \text{für } 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Darin ist T_0 die Länge der Anregungsphase. In dieser Zeit baut sich die Anfangsauslenkung der Wasseroberfläche des Beckens auf. Erst für $t > T_0$ beginnt die eigentliche Rechnung zur Gewinnung der Wasserstandszeitreihen. Die räumliche Struktur der Anfangsauslenkung hängt von der Funktion $F(x, y)$ ab. Hierin liegt eine gewisse Möglichkeit zur selektiven Anregung spezieller Schwingungsordnungen. Eine bestimmte Ordnung wird um so stärker angeregt, je genauer die Anfangsauslenkung der ζ -Verteilung 2.5 dieser Ordnung zu einer beliebigen Phasenlage entspricht. Für die ausschließliche Anregung einer Ordnung würde dies allerdings die Kenntnis der Lösung voraussetzen. Man kann aber fast immer prinzipielle Aussagen über die Struktur der Lösung machen, z.B. daß die erste Grundschiwingung eines Beckens eine Knotenlinie beziehungsweise eine Amphidromie etwa auf der Mitte der Längsachse des Beckens besitzt. Wählt man dazu eine in Längsrichtung des Beckens cosinus-förmige Druckverteilung mit der ersten Nullstelle in der Mitte des Beckens, so wird man erwarten können, daß vornehmlich die erste Grundschiwingung angeregt wird. Für komplizierte Beckenformen wie der Ostsee geben die Ergebnisse der eindimensionalen Rechnungen gute Anhaltspunkte für die Auswahl der Druckverteilung. $F(x, y)$ wird für jede Rechnung gesondert angegeben. Der Faktor C bestimmt die Amplitude der Anfangsauslenkung. Für vorgegebenes T_0 wird C für jede Rechnung durch Versuche so festgelegt, daß die maximale Anfangsauslenkung 20 cm nicht übersteigt.

Bei diesem Verfahren zur Berechnung der Eigenschwingungen eines Meeresbeckens handelt es sich nicht um eine Form der Resonanziteration (G. Platzman, 1972), sondern um ein Verfahren, daß dem von G. Radach (1971) und L. Papa (1977) angewendeten ähnlich ist. Beide Autoren betrachten jeweils ein nur teilweise abgeschlossenes Meeresbecken, nämlich die Nordsee und das Ligurische Meer. Am offenen Rand wurde dabei als neue Randbedingung der Wasserstand in Form einer zeit-

lichen Zufallsgröße vorgegeben. Durch die Filterwirkung des schwingungsfähigen Systems des Meeresbeckens wurden auch hier die Eigenschwingungen durch Resonanzüberhöhung im Wasserstandsspektrum sichtbar. Diese Methode der Anregung hat den Vorteil, daß alle Schwingungsordnungen gleich stark angeregt werden. Allerdings bedingt die fortwährende Anregung die Einführung von Reibung in das Modell. Für die oben beschriebene Form der Anregung ist dies nicht möglich, da bei einem Reibungsterm in realistischer Größenordnung keine genügend lange Zeitreihen für die spektrale Analyse gewonnen werden können. Eine mögliche Erweiterung des hier beschriebenen Verfahrens wäre also die Einführung einer Zufallsanregung für geschlossene Becken.

3. Das numerische Modell

3.1 Das Differenzenverfahren

Für das Gleichungssystem 2.1 - 2.3 wurde von A. Sielecki (1967) ein Differenzenverfahren angegeben, das den Anforderungen der hier durchzuführenden Rechnungen genügt. Es ist dabei wesentlich, daß dieses Verfahren bei Einhaltung des Stabilitätskriteriums auch ohne Reibung numerisch stabil ist (siehe Kap. 3.2). Dies wird durch die gemischte Anwendung von expliziten und impliziten Gleichungen erreicht. Das vollständige System der Differenzengleichungen ist jedoch explizit. Es werden für alle Ableitungen nach der Zeit Vorwärtsdifferenzen, für alle räumlichen Ableitungen zentrale Differenzen verwendet. Die Differenzengleichungen lauten :

$$3.1) \quad \xi_{i,j}^{n+1} = \xi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta s} \cdot (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n)$$

$$3.2) \quad u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + f \cdot \Delta t \cdot v_{i,j}^n - g' \cdot \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta s} \cdot H_{i,j} \cdot (\xi_{i+1,j}^{n+1} - \xi_{i-1,j}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{g} \cdot H_{i,j} \cdot \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} \right)_{i,j}^{n+1}$$

$$3.3) \quad v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n - f \cdot \Delta t \cdot u_{i,j}^{n+1} - g' \cdot \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta s} \cdot H_{i,j} \cdot (\xi_{i,j+1}^{n+1} - \xi_{i,j-1}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{g} \cdot H_{i,j} \cdot \left(\frac{\partial P_0}{\partial y} \right)_{i,j}^{n+1}$$

Diese Gleichungen beziehen sich auf ein quadratisches Gitter der Gitterweite $\Delta x = \Delta y = \Delta s$. Die Indizes (i, j, n) beschreiben dabei den Punkt $(x, y, t) = (i \cdot \Delta s, j \cdot \Delta s, n \cdot \Delta t)$. Für den Luftdruck $P_0(x, y, t)$ werden später relativ einfache Funktionen des Ortes und der Zeit verwendet, so daß hier der Druckgradient explizit als Funktion angegeben werden kann.

Wie aus dem Gleichungssystem 3.1 - 3.3 ersichtlich ist, werden nicht alle Größen an allen Gitterpunkten benötigt. Es wird daher berechnet für alle Gitterpunkte mit $i+j$ ungerade, U und V für alle Gitterpunkte mit $i+j$ gerade. Die Verteilung der verschiedenen Größen auf dem Gitter ist in Abb. 1 dargestellt.

Es fehlen hier noch die Randbedingungen. Da es sich im Verlauf der Testrechnungen als notwendig erwies, verschiedene Formen der Randbedingungen zu verwenden, werden sie erst im Kap. 4 ausführlich behandelt.

3.2 Numerische Stabilität des Differenzenverfahrens

Es ist kein allgemeines Kriterium für die numerische Stabilität eines Differenzenverfahrens bekannt, das sämtliche Effekte des jeweiligen Modells berücksichtigt. So ist es in der Regel nicht möglich, die verschiedenen Randbedingungen in diese Betrachtungen einzubeziehen, obwohl gerade die Randbedingungen bei der Modellierung eines realen Meeresbeckens wie der Ostsee Schwierigkeiten bereiten (A. Sielecki, 1967; L. Harris und C. Jelesnianski, 1964). So soll auch hier lediglich das für die numerische Stabilität notwendige Von Neumann Kriterium (Richtmyer und Morton, 1967) überprüft werden, um so eine obere Grenze für den Zeitschritt Δt bei vorgegebener Gitterweite Δs zu erhalten.

Dazu werden alle Variablen der homogenen Differenzengleichungen, d.h. für $P_0 = 0$, in einer zweidimensionalen Fourierreihe entwickelt. Ein typischer Summand der Entwicklung einer beliebigen Variablen ψ lautet dann

$$\psi(x, y, t) = \psi_0^t \cdot e^{i(\alpha x + \gamma y)}$$

α und γ sind darin die Wellenzahlen der Fourierkomponente in x - und y -Richtung. ψ_0^t ist die zeitliche Amplitude der Größe ψ . Damit läßt sich das System der Differenzengleichungen schreiben als

$$\mathcal{U}_0 \begin{pmatrix} \xi_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}^{t+\Delta t} = \mathcal{L}_0 \begin{pmatrix} \xi_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}^t$$

Darin sind U und G 3×3 -Matrizen, deren Elemente von den Systemparametern abhängen. Da sich die Matrix U invertieren läßt, lautet die explizite Darstellung des Systems:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}^{t+\Delta t} = \hat{T} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}^t, \quad \hat{T} = U^{-1} \cdot G$$

Matrix \hat{T} ist die Verstärkungsmatrix des Systems für den Fortschritt um ein Δt . Mit den Abkürzungen

$$A = \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta s}, \quad F = f \cdot \Delta t, \quad s_x = 2 \cdot \sin \alpha \Delta s, \quad s_y = 2 \sin \gamma \Delta s, \quad G = g \cdot H(x, y)$$

hat \hat{T} die folgende Gestalt

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & -i \cdot A \cdot s_x & -i \cdot A \cdot s_y \\ -i \cdot G \cdot A \cdot s_x & 1 - G \cdot A^2 \cdot s_x^2 & F - G \cdot A^2 \cdot s_x \cdot s_y \\ i \cdot G \cdot s_x \cdot F - i \cdot G \cdot A \cdot s_y & G \cdot A^2 \cdot s_x^2 \cdot F - G \cdot A^2 \cdot s_x \cdot s_y \cdot F - F & 1 + G \cdot A^2 \cdot s_x \cdot s_y \cdot F - G \cdot A^2 \cdot s_y^2 - F^2 \end{pmatrix}$$

Das Von Neumann Kriterium verlangt nun, daß für alle Eigenwerte λ_n von \hat{T} gilt:

$$|\lambda_n| \leq 1, \quad n = 1, 2, 3$$

Mit der Abkürzung

$$D = \frac{1}{2} \cdot (G \cdot A^2 \cdot s_x \cdot s_y - G \cdot A^2 \cdot s_x^2 - G \cdot A^2 \cdot s_y^2 - F^2)$$

lauten die Eigenwerte von \hat{T} :

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2/3} = 0 + 1 \pm ((D+1)^2 + 1)^{1/2}$$

Die Abschätzung von $\lambda_{2/3}$ führt dann auf die Bedingung

$$|1+D| \leq 1$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so haben alle Eigenwerte von \hat{T} den Betrag 1, und λ_2 und λ_3 sind konjugiert komplex. Damit enthält das Verfahren keine künstliche Dämpfung (G. Fischer, 1965). Aus der obigen Forderung ergibt sich für alle Wellenzahlen und für alle Tiefen des Beckens die Bedingung

$$3.4) \quad g \cdot H(x, y) \frac{\Delta t^2}{\Delta s^2} \leq g \cdot H_{\max} \frac{\Delta t^2}{\Delta s^2} \leq 2 - f \cdot \Delta t$$

H_{\max} ist dabei die maximale Tiefe des Beckens. Ohne Erdrotation reduziert sich diese Bedingung auf die bekannte Courant-Friedrichs-Lewy Bedingung.

3.3 Fehler des Differenzenverfahrens

Das Differenzenverfahren hat keine künstliche Dämpfung, da alle Eigenwerte der Verstärkungsmatrix bei Einhaltung des Stabilitätskriteriums den Betrag eins haben. Eine weitere Fehlerquelle des Verfahrens liegt im Phasenverhalten, d.h. in der numerischen Wiedergabe der Phasengeschwindigkeit. In diesem Fall würde ein Phasenfehler des numerischen Verfahrens zu falschen Perioden der Eigenschwingungen führen. Ein einfaches Verfahren zur Abschätzung dieses Fehlers wurde von J.O'Brien und R.Grotjahn (1976) angegeben. Wie bei der Stabilitätsbetrachtung lassen sich auch hier nur in den einfachsten Fällen genaue Angaben machen, die aber die Tendenz des Differenzenverfahrens verdeutlichen.

Nimmt man also an :

- 1) keine Erdrotation, $f=0$
- 2) konstante Wassertiefe, $H=H_0=\text{const}$
- 3) keine äußeren Kräfte, $P_0=0$

so hat das System 2.1 - 2.3 allgemeine Lösungen der Form

$$3.5) \quad u, v, \xi \sim e^{i(\omega_a t - \alpha x - \gamma y)}, \quad \lambda = \sqrt{-1}$$

d.h. zweidimensionale harmonische Wellen. Die Kreisfrequenz der analytischen Lösung ω_a ist mit den Wellenzahlen α in x- und γ in y-Richtung verknüpft durch die Dispersionsrelation des Systems

$$3.6) \quad \omega_a = \pm (g \cdot H_0 (\alpha^2 + \gamma^2))^{\frac{1}{2}}$$

Setzt man nun die Lösung 3.5 für

$$t = n \cdot \Delta t, \quad x = l \cdot \Delta s, \quad y = k \cdot \Delta s$$

in das entsprechende System der Differenzengleichungen ein, so erhält man völlig analog eine numerische Dispersionsrelation, die einen Zusammenhang zwischen der numerischen Kreisfrequenz ω_n und den beiden Wellenzahlen sowie den numerischen Parametern Δs und Δt herstellt. Für das Verfahren von A.Sielecki (1967) ergibt sich

$$\omega_n = \frac{1}{\Delta t} \cdot \arccos \left(1 - \frac{g \cdot H_0 \cdot \Delta t^2}{2 \Delta s^2} (\sin^2 \alpha \Delta s + \sin^2 \gamma \Delta s) \right)$$

Da im Allgemeinen Δs durch die Dimensionen des Beckens vorgegeben sein wird, läßt sich das maximale Δt aus dem Stabilitätskriterium 3.4 bestimmen. Dafür gilt dann die Beziehung

$$3.7) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g \cdot H_0}{2 \cdot \Delta s^2}} \cdot \arccos \left(1 - (\sin^2 \alpha \Delta s + \sin^2 \gamma \Delta s) \right)$$

In Abb.2 ist das Verhältnis ω_n/ω_a in Abhängigkeit der Parameter $\alpha \Delta s$ und $\gamma \Delta s$ dargestellt. Beide Parameter variieren im Bereich von Null bis π , d.h. von unendlich langen Wellen bis zur kleinsten im Gitter auflösbaren Wellenlänge $\lambda_{\min} = 2\Delta s$. Sie sind also ein Maß für die Anzahl der Gitterpunkte, mit denen eine bestimmte Wellenlänge aufgelöst wird. Die Fehler werden dabei um so größer, je schlechter die Auflösung der Welle im Gitter ist. Betrachtet man etwa eine in x-Richtung fortschreitende Welle der Wellenlänge 500 km, so ist für $\Delta s = 10$ km das Verhältnis $\omega_n/\omega_a = 0.997$, d.h. die numerische Kreisfrequenz ist etwas zu klein. Damit zeigt das Verfahren eine Tendenz dazu, die Phasengeschwindigkeiten zu klein und die Perioden zu lang wiederzugeben. Die Wellenlängen der niedrigsten Schwingungsordnungen der Ostsee-Seiches, die hier betrachtet werden sollen, liegen im Bereich von 250 bis 1000 km, so daß die Perioden etwa um den Faktor 1.003 zu lang erscheinen werden. Dies ist jedoch vernachlässigbar im Vergleich zu den Effekten, die von den westlichen Ausgängen der Ostsee zu erwarten sind.

4. Testrechnungen

4.1 Einleitung

Das in Kap. 3 beschriebene Differenzenverfahren wird hier auf zwei einfach geformte Becken angewendet. Mit diesen beiden Becken soll die Anwendbarkeit des Verfahrens zur Lösung des Eigenschwingungsproblems überprüft werden. Insbesondere soll versucht werden, einige bekannte analytische Lösungen zu reproduzieren.

Versuche mit einem rechteckigen Becken der Länge $L=480$ km und der Breite $B=240$ km bei einer konstanten Wassertiefe von $H_0=60$ m, auf deren Ergebnisse hier nicht weiter eingegangen werden soll, ergaben, daß die von A. Sielecki (1967) vorgeschlagene Form der Randbedingungen nicht ohne weiteres anwendbar ist. Sie verursachen Störungen derart, daß das ψ -Feld in zwei Arten von Punkten zerfällt, von denen die einen stets größere Amplituden haben als die anderen, so daß keine eindeutigen Flutstunden- und Hubhöhenlinien erkennbar waren. Diese

Probleme sind bekannt und rühren daher, daß wegen der zentralen räumlichen Differenzen bei Rändern parallel zu den Koordinatenachsen die Randbedingungen auch in die Kontinuitätsgleichung 3.1 eingehen (D.Harris und C.Jelesnianski, 1964). Auf die Beseitigung dieses Effektes wird in den beiden folgenden Abschnitten eingegangen.

4.2 Testbecken 1

Als erstes Testbecken wurde ein S-förmiges Becken mit konstanter Wassertiefe $H_0 = 60$ m gewählt. Das Becken ist mit der Verteilung der U, V- und ξ -Punkte in Abb. 4 wieder gegeben. Die horizontalen Abmessungen sind so gewählt worden, daß das Becken in sehr grober Näherung dem System Ostsee-Finnischer Meerbusen entspricht. Auch die Wassertiefe entspricht etwa der mittleren Tiefe der Ostsee. Hiermit sollte die Anwendbarkeit des Verfahrens auf ein Becken mit sehr langen Eigenperioden in der Größenordnung von 20 bis 30 Stunden geprüft werden. Weiterhin sollte versucht werden, allgemeinere Randbedingungen für die Differenzgleichungen zu finden, um die in Kap. 4.1 erwähnten Schwierigkeiten zu beheben. Schließlich sollte ein erster Überblick über die möglichen Schwingungsformen im System Ostsee-Finnischer Meerbusen gewonnen werden.

Der Rand des Beckens besteht aus Geraden, die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, und solchen, die 45° dazu geneigt sind. Für die erste Art gilt entweder $U=0$, falls der Rand parallel zur y-Achse verläuft, oder $V=0$, falls der Rand parallel zur x-Achse verläuft. Auf diesen Rändern liegen sowohl U, V- als auch ξ -Punkte (siehe Abb. 3a und 3b). Für einen U, V-Punkt des Randes gilt dann entweder $U_{i,j}^{n+1} = 0$, wobei $V_{i,j}^{n+1}$ gemäß Gleichung 3.3 berechnet wird, oder $V_{i,j}^{n+1} = 0$, wobei $U_{i,j}^{n+1}$ gemäß Gleichung 3.2 berechnet wird. Für die ξ -Punkte dieser Ränder schlägt A. Sielecki (1967) vor, die zentralen Differenzen in der Gleichung 3.1 senkrecht zum Rand in den Randpunkten durch Vorwärts- beziehungsweise Rückwärtsdifferenzen zu ersetzen. Für den ξ -Punkt (i, j) aus dem oberen Teil von Abb. 3a gilt dann :

$$4.1) \quad \xi_{i,j}^{n+1} = \xi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta s} \cdot (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n + 2 \cdot (v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n))$$

Dabei ist $V_{i,j}^n = 0$ wegen der allgemeinen Randbedingung. Dies läßt sich analog auf die übrigen Fälle der Abb. 3a und 3b anwenden.

Aus Abb. 3c ist zu sehen, daß bei den schrägen Rändern nur U, V-Punkte auf dem Rand liegen. Dies hat den Vorteil, daß die Randbedingung nicht in die Kontinuitätsgleichung eingehen. Die allgemeine Randbedingung an den schrägen Rändern lautet :

$$u - v = 0$$

Nimmt man nun zum Beispiel für den oberen Fall aus Abb. 3c einen zusätzlichen Wasserstandspunkt $\bar{\zeta}$ im Punkt (i, j) an, so lassen sich die Bewegungsgleichungen 3.2 und 3.3 mit Hilfe von Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen schreiben als

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + f \cdot \Delta t \cdot V_{i,j}^n - \gamma \cdot \frac{\Delta t}{\Delta s} \cdot (\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \bar{\zeta}_{i,j}) - \frac{\Delta t}{s} \cdot H_{i,j} \cdot \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)_{i,j}^{n+1}$$

$$V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n - f \cdot \Delta t \cdot U_{i,j}^{n+1} - \gamma \cdot \frac{\Delta t}{\Delta s} \cdot (\bar{\zeta}_{i,j} - \zeta_{i,j-1}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{s} \cdot H_{i,j} \cdot \left(\frac{\partial p_0}{\partial y} \right)_{i,j}^{n+1}$$

Zusammen mit der hier geltenden Randbedingung

$$U_{i,j}^n = V_{i,j}^n \quad \text{sowie} \quad U_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^{n+1}$$

ergibt sich ein Gleichungssystem für die Größen $U_{i,j}^{n+1}$, $V_{i,j}^{n+1}$ und $\bar{\zeta}_{i,j}$. Daraus ergeben sich $U_{i,j}^{n+1}$ und $V_{i,j}^{n+1}$ zu:

$$4.2) \quad U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{1}{2+f \cdot \Delta t} \cdot \left(\gamma \cdot \frac{\Delta t}{\Delta s} \cdot (\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i,j-1}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{s} \cdot H_{i,j} \cdot \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\partial p_0}{\partial y} \right)_{i,j}^{n+1} \right)$$

$$V_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{n+1}$$

Analog wird der zweite schräge Rand in Abb. 3c behandelt. Damit sind alle Randpunkte beschrieben. Im Inneren des Beckens werden die Gleichungen 3.1 - 3.3 unverändert benutzt.

4.3 Ergebnisse im Testbecken 1

Es wurden im Testbecken 1 verschiedene Rechnungen mit und ohne Erdrotation ausgeführt. Aus allen Rechnungen lassen sich die Erfahrungen bezüglich der verschiedenen Randbedingungen wie folgt zusammenfassen: Das Testbecken 1 besteht aus drei numerisch unterschiedlich behandelten Teilen, nämlich den beiden Endstücken mit dem Randbedingungstyp 4.1 und dem schrägen Mittelstück mit dem Randbedingungstyp 4.2. In den beiden Endstücken zerfällt das ζ -Feld in

zwei Teilfelder. Für geraden Index i werden die Vorwärts-, beziehungsweise Rückwärtsdifferenzen in der Kontinuitätsgleichung 3.1 in y -Richtung angewendet, für ungeraden Index i in x -Richtung (siehe dazu Abb. 3 und 4). Wegen der zentralen räumlichen Differenzen bleibt diese Ordnung auch im Inneren des Beckens bestehen. In den Ergebnissen der spektralen Auswertung der Wasserstandszeitreihen führt dies dazu, daß die erste Art von ζ -Punkten (i -gerade) stets etwas höhere Amplituden hat als die zweite. Der Fehler wird an den Beckenenden maximal und beträgt dort etwa 3%. Zur Mitte des Beckens hin nimmt der Fehler ab und liegt im schrägen Teilstück innerhalb der Rechengenauigkeit. Obwohl die Ursache des Fehlers nicht geklärt ist, scheinen die Randbedingungen vom Typ 4.2 also besser dazu geeignet zu sein, einen geraden Rand zu approximieren. Im Übrigen ähnelt dieses Verhalten des Differenzenverfahrens sehr den von L. Harris und C. Jelesnianski (1964) und A. Sielecki (1967) beschriebenen Störungen, die bei der Einführung von Randbedingungen in die Kontinuitätsgleichung 3.1 entstehen. Obwohl der Fehler in den hier durchgeführten Rechnungen nicht groß ist, scheinen alle Ergebnisse darauf hinzuweisen, daß die Randbedingungen vom Typ 4.1, insbesondere bei langen Rechnungen, zu merklichen Fehlern führen. Es liegt deshalb nahe, völlig auf diese Randbedingungen zu verzichten und die Koordinatenachsen gegenüber den geraden Beckenrändern so zu drehen, daß nur der Randbedingungstyp 4.2 zur Anwendung kommt.

Die Ergebnisse im Testbecken 1 sind in den Abbildungen 5 und 6 dargestellt. Wegen des obigen Amplitudenfehlers wurden in den geraden Endstücken des Beckens jeweils nur die ζ -Punkte mit geradem Index i zur Gewinnung von Hubhöhen- und Flutstundenlinien herangezogen.

Die Abbildung 5a-e zeigt fünf Ergebnisse der Rechnungen ohne Erdrotation. Die Parameter der Rechnung sind

$$\Delta t = 240 \text{ s} \quad , \quad \Delta s = 10 \text{ km} \quad , \quad T_0 = 500 \Delta t = 33.3 \text{ h} \quad .$$

Für die Druckanregung wurden zwei verschiedene Funktionen benutzt :

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Abb. 5 a, c, d} \quad F(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right) \\ \text{für Abb. 5 b, e} \quad F(x, y) = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \end{array} \right\} L = 1000 \text{ km}$$

Die berechneten Zeitreihen hatten die Länge von $8192 \Delta t = 546,1$ h. Abb. 5 a-c zeigen die erste, zweite und dritte Längsschwingung des Beckens mit den Perioden 26.4 h, 13.0 h und 8.8 h. Der Einfluß der Beckengeometrie ist auf die ein- und zweiknotige Schwingung recht gering. Alle Hubhöhenlinien stehen annähernd senkrecht auf der Längsachse des Beckens und die Knotenlinien liegen etwa dort, wo sie bei einem gleichlangen rechteckigen Becken zu finden wären. Erst die dritte Längsschwingung zeigt merkbare Abweichungen von diesem Verhalten. Hier liegen das zweite und dritte Amplitudenmaximum nicht auf der Längsachse des Beckens und es treten dabei wesentlich höhere Amplituden als an den Beckenenden auf. Bemerkenswert ist das Phasenverhalten der Schwingungen. Die Knotenlinien in der Mitte des Beckens zeigen eine Tendenz dazu, im Sinne einer linksdrehenden Amphidromie aufzufächern, so daß die Phase zwischen zwei Knotenlinien nicht mehr konstant ist. Dieses Verhalten ist in Abb. 5c für die dritte Längsschwingung durch die punktierten Phasenlinien dargestellt.

Diese drei Schwingungen wurden zum Vergleich ebenfalls mit der Defant'schen Restmethode berechnet. Die Restmethode ist ausführlich bei G. Neumann (1941) beschrieben und wird hier ohne Änderungen übernommen. Der Talweg wurde in die Mitte des Beckens gelegt und in 51 Querschnitte senkrecht dazu geteilt. Die Länge des Talwegs beträgt 1162 km, der Abstand der Querschnitte auf dem Talweg also 23.24 km. Der Talweg und die Querschnitte sind in Abb. 4 eingezeichnet. Die Ergebnisse der Defant'schen Methode sind 26.6 h, 13.3 h und 8.9 h für die erste, zweite und dritte Längsschwingung. Da diese drei Schwingungsordnungen in ihrer Struktur nur geringe Unterschiede zu den entsprechenden Ordnungen eines rechteckigen Beckens aufweisen, sind auch die geringen Abweichungen in den Periodenergebnissen bei der Verfahren zu erwarten.

Es wurden weiter die vierte und fünfte Längsschwingung berechnet, deren Perioden sich zu 6.9 und 5.4 h ergaben. Sie sind hier nicht dargestellt, da sie in ihrer Struktur ein ähnliches Bild wie die ersten drei Ordnungen ergaben. In Abb. 5 d und e sind zwei Lösungen mit Querschwingungscharakter abgebildet. Abb 5d zeigt eine reine Querschwingung

mit einer durchgehenden Knotenlinie in Längsrichtung des Beckens. Ihre Periode ist 4.6 h. Abb. 5e läßt sich als eine kombinierte Längs- und Querschwingung auffassen mit zwei Knotenlinien senkrecht und einer Knotenlinie parallel zur Längsachse des Beckens. Allerdings sind hier die Abweichungen gegenüber der entsprechenden (2,1) -Schwingung eines rechteckigen Beckens erheblich. Die Periode dieser Schwingung ist 4.3 h.

In Abb. 6 a-c sind die ersten drei Schwingungsordnungen bei Berücksichtigung der Erdrotation dargestellt. Der Coriolisparameter wurde mit 10^{-4} s^{-1} angenommen. Die übrigen Parameter der Rechnung sind die gleichen wie im Fall ohne Erdrotation. Die Druckfunktion ist ebenfalls die gleiche, d.h.

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Abb. 6a,c} \quad F(x,y) = \cos\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right) \\ \text{für Abb. 6b} \quad F(x,y) = \cos\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x\right) \end{array} \right\} L = 1800 \text{ km}$$

Die berechneten Perioden sind jeweils 26.8 h, 13.1 h und 8.9 h. Diese drei Schwingungen entsprechen denen der Abb. 5a-c ohne Erdrotation. Hier sind in allen drei Fällen die Knotenlinien der Längsschwingungen in linksdrehende, d.h. entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn drehende, Amphidromien umgewandelt worden, wobei die Lage des Nullpunktes etwa auf der ursprünglichen Knotenlinie verfallen ist. Alle Amphidromien sind sehr ausgeprägt, d.h. sie sind nicht nur aufgefächerte Knotenlinien, sondern die Flutstundenlinien sind über 360° etwa gleichmäßig um den Knotenpunkt verteilt. Das ist überraschend, da das Verhältnis von Länge des Talwegs zur Breite des Beckens mit 5.8 relativ groß ist. Das Verhältnis der Periode der ersten Längsschwingung ohne Erdrotation zur Trägheitsperiode für $f=10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ist mit 1.5 allerdings auch recht groß. Außerdem wird dieses Verhalten durch die Geometrie des Beckens begünstigt, wie die Rechnungen ohne Erdrotation zeigten. Für ein entsprechendes rechteckiges Becken ergibt sich nach D. Rao (1965) ein Verhältnis der Perioden der ersten Längsschwingung mit und ohne Erdrotation von ungefähr 1.025. Dies würde hier eine Periode mit Erdrotation von 27.03 ergeben. Die berechnete Periode von 26.8 h ist etwas kleiner, jedoch gibt das Modell die Periodenverschiebung in der richtigen Größenordnung wieder.

Leider existieren für die höheren Ordnungen keine Vergleichswerte.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Ergebnisse der Rechnungen im Testbecken 1 zufriedenstellend sind. Unter Berücksichtigung des durch die Randbedingungen verursachten Fehlers führt das Verfahren zu sinnvollen Perioden und räumlichen Strukturen der betrachteten Schwingungsordnungen. Die fehlerhaften Randbedingungen lassen sich durch Drehung des Rechengitters vermeiden. Mit diesem gedrehten Gitter werden im folgenden Kapitel weitere Testrechnungen in einem rechteckigen Becken durchgeführt.

4.4 Testbecken 2

Als zweites Becken wurde ein rechteckiges Becken der Länge $L=480$ km und der Breite $B=240$ km gewählt. Bei konstanter Wassertiefe sind für ein derartiges Becken ohne Erdrotation alle Lösungen und mit Erdrotation die Lösungen von D. Rao (1965) bekannt. Es soll hier versucht werden, diese Lösungen mit dem beschriebenen Verfahren zu reproduzieren. Wegen der guten Erfahrungen mit dem Randbedingungstyp 4.2 aus Kap. 4.2 wurde hier das Rechengitter um 45° im Uhrzeigersinn gegenüber den Beckenrändern gedreht, so daß die Koordinatenachsen nicht mehr mit dem Rand zusammenfallen. Dadurch liegen nur noch U, V-Punkte auf dem Rand und es erübrigt sich die Einführung von Randbedingungen in die Kontinuitätsgleichung 3.1. Im Inneren des Beckens gelten nach wie vor die Gleichungen 3.1 - 3.3. Die Verteilung der Punkte ist in Abb. 7 dargestellt. Der Abstand zweier U, V-Punkte auf dem Rand beträgt 10 km, so daß sich die in das Stabilitätskriterium eingehende Gitterweite auf $\Delta s = \sqrt{0.5} \cdot 10 = 7.071$ km reduziert. Damit wird die räumliche Auflösung weiter verbessert und der in Kap. 3.3 dargestellte Phasenfehler verringert. Dies ist die endgültige Form des Differenzenverfahrens, wie es später auch auf die Ostsee angewendet wird. Alle Differenzgleichungen mit den zugehörigen Randbedingungen in der in den Programmen verwendeten Indizierung sind daher noch einmal in Kap. 5.1 zusammengefaßt worden.

Die ersten Rechnungen im rechteckigen Becken werden mit $f=0$ und einer in Längsrichtung des Beckens variablen Bodentopographie durchgeführt. Für das gewählte einfache Bodenprofil läßt sich mit Hilfe der Störungsrechnung eine Näherungslösung angeben, die hier zum Vergleich mit der numerischen Lösung dient. Ausgangspunkt ist die Chrystal'sche Gleichung. Mit x' wird die Koordinate in Längsrichtung des Beckens bezeichnet. Dann vereinfacht sich die Gleichung für ein rechteckiges Becken mit einer Tiefenverteilung, die nur von x' abhängt, auf

$$4.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \cdot H(x') \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} \quad \text{mit } u=0 \text{ für } x'=0, L$$

(Krauß, 1973). Die Größen haben dabei die gleiche Bedeutung wie im Kap. 2. Für zeitlich periodische Lösungen der Form

$$u = R(x') \cdot e^{i\omega t}$$

erhält man eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für $R(x')$:

$$g \cdot H(x') \frac{d^2 R}{dx'^2} + \omega^2 R = 0 \quad \text{mit } R=0 \text{ für } x'=0, L.$$

Das hier verwendete Bodenprofil hat die Form

$$4.4) \quad H(x') = \frac{4x'}{L} \cdot \left(1 - \frac{x'}{L}\right) \cdot \Delta H + H_0$$

und ist in Abb. 7 dargestellt. Macht man an dieser Stelle einen Störungsansatz gemäß

$$H = H^{(0)} + H^{(1)} \quad \text{mit } H^{(0)} = H_0 = \text{const} \quad \text{und} \quad H^{(1)} = \frac{4x'}{L} \cdot \left(1 - \frac{x'}{L}\right) \cdot \Delta H$$

sowie $R = R^{(0)} + R^{(1)} + \dots, \quad \omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \dots,$

so lassen sich die Eigenfrequenzen ω_n bis zur ersten Störungsordnung angeben als

$$4.5) \quad \omega_n^{(0)} = \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{g \cdot H_0} \quad \text{und}$$

$$4.6) \quad \omega_n^{(1)} = \frac{\omega_n^{(0)}}{2 \cdot g \cdot H_0} \cdot \int_0^L g \cdot H^{(1)} \cdot \sin^2 \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x' \cdot dx'$$

Gleichung 4.5 ist die Merian'sche Formel für die Längsschwingungen eines rechteckigen Beckens der Länge L und der konstanten Wassertiefe $H = H_0$. Gleichung 4.6 ist eine Korrektur der Frequenz, die von der Störung der konstanten Wassertiefe bestimmt wird. Für das Bodenprofil 4.4 ergibt

sich damit

$$\omega_n = \omega_n^{(0)} \cdot \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 + 3}{3n^2 \pi^2} \cdot \frac{\Delta H}{H_0} \right), \quad \tau_n = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Ergebnisse für die ersten fünf Ordnungen sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

n	$\omega_n^{(0)}$	$\tau_n^{(0)}$	$\omega_n^{(1)}$	ω_n	τ_n
1	0.572	10.98	0.041	0.613	10.25
2	1.143	5.49	0.068	1.211	5.19
3	1.715	3.66	0.098	1.813	3.47
4	2.287	2.75	0.129	2.416	2.60
5	2.858	2.20	0.161	3.019	2.08

Tabelle 2 : Ergebnisse der Störungsrechnung für das Testbecken 2 mit Bodentopographie.

$$H_0 = 60\text{m}, \quad \Delta H = 10\text{m}, \quad L = 480 \text{ km}$$

Alle Perioden in h, alle Frequenzen in h^{-1} .

Die numerischen Rechnungen wurden ausgeführt mit $\Delta t = 180 \text{ s}$ und $T_0 = 400 \Delta t = 20 \text{ h}$. Die Länge der berechneten Wasserstandszeitreihen betrug $10240 \Delta t = 512 \text{ h}$. Als Druckfunktion diente

$$F(x, y) = \cos \left(\frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{0.5} \cdot (x - y) \right) \quad L = 480 \text{ km}$$

Dies entspricht einer cosinusförmigen Druckverteilung in Längsrichtung des Beckens mit der ersten Nullstelle in der Beckenmitte. Für eine konstante Wassertiefe würde damit lediglich die erste Längsschwingung angeregt. Wegen der variablen Wassertiefe werden hier jedoch auch höhere Ordnungen angeregt. Die Ergebnisse sind in Abb. 8 dargestellt als Amplituden- und Phasenspektren verschiedener ζ -Punkte im Becken. Die Lage der Punkte ist aus Abb. 7 ersichtlich. Im Frequenzbereich von 0 bis 0.488 h^{-1} sind drei angeregte Eigenfrequenzen erkennbar. Die zugehörigen Perioden sind 10.27 h, 3.48 h und 2.09 h. Es handelt sich also um die erste, dritte und fünfte Längsschwingung des Beckens. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Störungsrechnung ist gut. Hierin wird auch die Wirkung der obigen Druckfunktion deutlich. Da die räumliche Struktur der Druck-

anregung eine ungerade Funktion bezüglich der Beckenmitte isr , werden auch nur diejenigen Eigenschwingungen angeregt, deren Amplitudenverteilungen ungerade Funktionen bezüglich der Beckenmitte sind. Dies trifft auf alle ungeraden Längsschwingungsordnungen zu. Weiterhin hat die erste Ordnung eine um den Faktor 120 höhere Amplitude als die nächsten Eigenschwingungsordnungen, so daß das Becken auf die obige Anregung etwa wie ein Becken mit konstanter Wassertiefe reagiert. In allen Phasenspektren ist der Phasensprung von etwa 180° bei den Eigenfrequenzen erkennbar.

Die zweite Serie von Rechnungen im Testbecken 2 beziehen sich auf den Fall konstanter Wassertiefe $H_0 = 60$ m mit Erdrotation. Es wurde ein Verhältnis von Trägheitsperiode zur Periode der ersten Längsschwingung ohne Erdrotation von 0.5 angenommen, d.h. bei einer Periode der Längsschwingung von 10.98 h wird der Coriolisparameter mit $3.175 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ angenommen. Die übrigen Parameter der Rechnung sind die gleichen wie im Fall ohne Erdrotation. Es wurden für drei Ordnungen Flutstunden- und Hubhöhenlinien berechnet. Sie sind in Abb. 9a-c abgebildet. Für die Abb. 9a und 9c ist ein direkter Vergleich mit den Ergebnissen von D.Kao (1965) möglich, da auch hier die Ergebnisse so normiert sind, daß das mittlere Amplitudenquadrat im Becken gleich hundert ist. Die Übereinstimmung ist gut. Lediglich die Phase der ersten Ordnung in Abb. 9a ist etwas entgegen dem Uhrzeigersinn verdreht. Da jedoch der Phasennullpunkt willkürlich ist, ist diese Differenz für das Ergebnis ohne Bedeutung. Auch in Abb. 9c entsprechen die Phasenlinien in der Mitte des Beckens nicht den Ergebnissen von Kao. Dieser Unterschied liegt jedoch innerhalb der Rechengenauigkeit, da das Gebiet in der Mitte des Beckens eine nahezu konstante Phase hat. Für Abb. 9b ist kein direkter Vergleich möglich, da diese Ordnung bei Kao nur für $f = 2.78 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ wiedergegeben ist.

Zusätzlich zu diesen Ordnungen wurden die ersten zehn Eigenperioden des Beckens berechnet. Sie werden in Tabelle 3 zusammen mit den Ergebnissen von D.Kao (1965) angegeben. Die Bezeichnungsweise der verschiedenen Ordnungen wurde von Kao übernommen. Dabei beschreibt das Zahlenpaar (n,m) für $f=0$ eine Schwingung mit n Knotenlinien in Längsrichtung und m Knotenlinien in Querrichtung des Beckens.

Ordnung	Periode	Periode nach Rao (1965)
(1,0)	12.87 h	12.83 h
(2,0)	6.58 h	6.56 h
(0,1)	4.65 h	4.64 h
(1,1)	3.81 h	3.79 h
(2,1)	3.65 h	3.67 h
(3,0)	3.11 h	3.09 h
(3,1)	3.04 h	3.03 h
(0,2)	2.59 h	2.58 h
(1,2)	2.54 h	2.54 h
(4,0)	2.40 h	2.41 h

Tabelle 3

Die ersten zehn Eigenperioden des rechteckigen Beckens für $f=3.175 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ im Vergleich zu den Ergebnissen von D.Rao (1965).

Die Abweichungen der hier berechneten Perioden von den von D.Rao (1965) angegebenen Perioden ist gering. Die maximale relative Differenz beträgt 0.6%. Sieben der zehn berechneten Perioden sind länger. Dies mag an der zu geringen numerischen Phasengeschwindigkeit des Differenzenverfahrens liegen (siehe Kapitel 3.3). Allerdings ist der Unterschied nicht systematisch.

Damit sind die Rechnungen im Testbecken 2 abgeschlossen. Zusammen mit den Ergebnissen für das Testbecken 1 bestätigen sie die Anwendbarkeit des hier beschriebenen Verfahrens zur Berechnung der Seiches eines abgeschlossenen Beckens. Dieses Verfahren wird in den folgenden Kapiteln auf die Eigenschwingungen der Ostsee angewendet.

5. Berechnung der Seiches der Ostsee

5.1 Das numerische Modell der Ostsee

Hier soll das in den vorangegangenen Kapiteln beschriebene und auf seine Anwendbarkeit überprüfte Verfahren zur Berechnung der Seiches der Ostsee benutzt werden. Zur Festlegung des Rechengitters wurde ein quadratisches Gitter der Gitterweite 10 Kilometer in eine stereographische Projektion der Ostsee derart eingepaßt, daß die Ränder der Ostsee möglichst gut dargestellt werden. Das Zentrum der Projektion liegt in 60° Nord und 20° Ost. Sie ist zusammen mit dem Rechengitter in Abb. 10 abgebildet. Dabei liegen die U, V-Punkte auf den Schnittpunkten der Geraden des Gitters, die ζ -Punkte jeweils in der Mitte eines Quadrats. Das Gitter für die Ostsee enthält 3570 ζ -Punkte und 3965 U, V-Punkte, wovon 798 Punkte Randpunkte sind. Die Koordinatenachsen sind wie im Testbecken 2 um 45° gegenüber dem Gitter gedreht: Sie sind so orientiert, daß die positive x-Achse im Zentrum der Projektion nach Südost, die positive y-Achse nach Nordost zeigt. Der Koordinatenursprung liegt im Südwesten etwas außerhalb des Beckens. Es liegt hier also die gleiche Gitterstruktur wie im Testbecken 2, vor, wodurch die Einführung von Randbedingungen in die Kontinuitätsgleichung 3.1 vermieden wird. Die in das Stabilitätskriterium 3.4 eingehende effektive Gitterweite ist auch hier 7.07 km. Dieses Modellgitter ist bis auf geringfügige Änderungen mit dem des Ostseemodells von J. Kielmann (1976) identisch. Hier ist lediglich die Insel Öland in das schwedische Festland einbezogen worden, da im Kalmar Sund eine sinnvolle Auflösung im 10 km - Gitter nicht möglich ist. Die Tiefenverteilung wurde ebenfalls von J. Kielmann (1976) übernommen. Einen groben Überblick über die Tiefenverteilung gibt Abb. 11. Dort sind die Tiefenlinien im Abstand von 40 m dargestellt. Die maximale Tiefe beträgt 232 m.

Zur Approximation des realen Ostsee-Beckens sind einige Erweiterungen des numerischen Verfahrens bezüglich der Randbedingungen notwendig, die im Folgenden beschrieben werden. Die Verteilung der Größen U, V und ζ auf dem Rechengitter sowie die Indizierung der Gitterpunkte ist in Abb. 12 dar-

gestellt. U, V- und ζ -Punkte werden getrennt bezeichnet. Dabei ist der ζ -Punkt i', j' um ein Δs gegenüber dem U, V-Punkt i, j in Richtung der positiven y-Achse verschoben worden. Diese Umbenennung der Punkte erwies sich als technisch notwendig. Alle Programme benutzen diese Indizierung. In der Bezeichnungsweise der Abb. 12a lauten die Gleichungen 3.1 - 3.3 :

$$5.1) \quad \zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta s} \cdot (U_{i+1,j}^n - U_{i,j+1}^n + V_{i+1,j+1}^n - V_{i,j}^n)$$

$$5.2) \quad U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + f \cdot \Delta t \cdot V_{i,j}^n - g \cdot \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta s} \cdot H_{i,j} \cdot (\zeta_{i,j'-1}^{n+1} - \zeta_{i-1,j}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{g} \cdot H_{i,j} \cdot \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} \right)_{i,j}^{n+1}$$

$$5.3) \quad V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n - f \cdot \Delta t \cdot U_{i,j}^{n+1} - g \cdot \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta s} \cdot H_{i,j} \cdot (\zeta_{i,j'}^{n+1} - \zeta_{i-1,j'-1}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{g} \cdot H_{i,j} \cdot \left(\frac{\partial P_0}{\partial y} \right)_{i,j}^{n+1}$$

Aus Abb. 10 erkennt man, daß es zwölf verschiedene Arten von Randpunkten gibt. Sie sind gemäß ihrer allgemeinen Randbedingung in Abb. 12b - f in fünf Gruppen zusammengefaßt worden. Für die ersten beiden Gruppen (Abb. 12b und c) werden wieder die Randbedingungen vom Typ 4.2 verwendet. Dabei ist noch zu unterscheiden, ob der Rand links oder rechts (Abb. 12b) beziehungsweise unten oder oben liegt (Abb. 12c). In der hier verwendeten Indizierung lauten die Randbedingungen für diese vier Fälle :

$$5.4) \quad \begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n - \frac{H_{i,j}}{2-f \cdot \Delta t} \cdot \left(g \cdot \frac{\Delta t}{\Delta s} \cdot (\zeta_{i,j'-1}^{n+1} - \zeta_{i',j}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{g} \cdot \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} - \frac{\partial P_0}{\partial y} \right)_{i,j}^{n+1} \right) \\ V_{i,j}^{n+1} &= -U_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

$$5.5) \quad \begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n - \frac{H_{i,j}}{2-f \cdot \Delta t} \cdot \left(g \cdot \frac{\Delta t}{\Delta s} \cdot (\zeta_{i-1,j'-1}^{n+1} - \zeta_{i-1,j}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{g} \cdot \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} - \frac{\partial P_0}{\partial y} \right)_{i,j}^{n+1} \right) \\ V_{i,j}^{n+1} &= -U_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

$$5.6) \quad \begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n - \frac{H_{i,j}}{2+f \cdot \Delta t} \cdot \left(g \cdot \frac{\Delta t}{\Delta s} \cdot (\zeta_{i,j'-1}^{n+1} - \zeta_{i-1,j'-1}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{g} \cdot \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \right)_{i,j}^{n+1} \right) \\ V_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

$$5.7) \quad \begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n - \frac{H_{i,j}}{2+f \cdot \Delta t} \cdot \left(g \cdot \frac{\Delta t}{\Delta s} \cdot (\zeta_{i,j'}^{n+1} - \zeta_{i-1,j}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{g} \cdot \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \right)_{i,j}^{n+1} \right) \\ V_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

Die Randpunkte aus Abb. 12d und e haben einen 270° -Sektor zum Inneren des Beckens hin. Hier wurde die Normale des Randes als parallel zu den Koordinatenachsen angesehen. Für Abb. 12d ist dann $V=0$ und U wird gemäß Gleichung 5.2 berechnet, für Abb. 12e ist $U=0$ und V wird gemäß Gleichung 5.3 berechnet. Diese Art der Randbedingungen hat sich insoweit bewährt, als in allen Rechnungen keine Störungen beobachtet werden konnten, die von diesen Ecken ausgehen. Die letzte Gruppe von Randpunkten hat jeweils einen 90° -Sektor zum Inneren des Beckens hin. Hier wurden beide Komponenten des Volumentransports zu Null gesetzt.

5.2 Rechnungen mit dem Ostsee-Modell

Es werden Rechnungen mit zwei Versionen des in Kap. 5.1 beschriebenen Rechengitters durchgeführt. Die erste umfaßt die gesamte Ostsee, wie sie in Abb. 10 dargestellt ist, die zweite das System Ostsee-Finnischer Meerbusen. Der Abschluß dieses Systems gegen den Bottnischen Meerbusen ist in Abb. 10 durch die punktierte Linie bei den Alands-Inseln gekennzeichnet. Die Rechnungen in diesem System dienen lediglich zu Vergleichszwecken, um so die Schwingungsordnungen der gesamten Ostsee besser identifizieren zu können. Es soll hier nicht geprüft werden, ob ein solcher Abschluß eines Teils der Ostsee realistisch ist und ob er an der richtigen Stelle vorgenommen wurde. Die westliche Begrenzung beider Systeme liegt im Fehmarn Belt. Dies entspricht den Ergebnissen von G. Neumann (1941), nach denen eine direkte Beteiligung der Kieler Bucht an den Schwingungen der Ostsee unwahrscheinlich ist (siehe auch A. Defant, 1961, Bd. II, Seite 198).

Für die gesamte Ostsee werden mehrere Serien von Rechnungen durchgeführt. Die erste bezieht sich auf den Fall ohne Erdrotation. Die zweite wurde mit $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ berechnet. Das ist der mittlere Wert des Coriolisparameters im Breitenintervall von 54° N bis 66° N . Für diesen Wert des Coriolisparameters wurden ebenfalls Vergleichslösungen im System Ostsee - Finnischer Meerbusen berechnet. Weiterhin wurden

einige Fälle für verschiedene Werte von f im Bereich von 0 bis $1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ berechnet, um den Einfluß der Erdrotation auf die niedrigsten Schwingungsordnungen zu klären. Schließlich wurde ein Fall mit breitenabhängigem Coriolisparameter berechnet.

Für alle Rechnungen, die die gesamte Ostsee betreffen, wurde die folgende Druckverteilung gewählt :

$$F(x, y) = \cos\left(\frac{\pi \cdot \sqrt{0.5}}{L} \cdot (y - x + 42.5)\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{0.5}}{L} \cdot (y - x + 42.5)\right), \quad L = 1320 \text{ km}$$

Dies ist eine Druckverteilung in Nord-Süd-Richtung. Die erste Nullstelle des ersten Anteils liegt direkt südlich der Alands-Inseln etwa bei 58° N . Der zweite Anteil wurde hinzugenommen, um eine bessere Anregung der höheren Ordnungen zu erreichen. Die Vergleichslösungen im System Ostsee-Finnischer Meerbusen wurden mit folgender Druckverteilung berechnet :

$$F(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{L} \cdot y\right) + \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{L} \cdot y\right), \quad L = 1650 \text{ km}$$

Diese Druckverteilung variiert von südwest nach nordost. Die erste Nullstelle des ersten Summanden liegt auf der y -Achse etwa in $57^\circ 30' \text{ N}$, d.h. etwa auf der Breite von Gotland. Beide Druckfunktionen sind relativ einfache Funktionen des Ortes. Wegen der komplizierten Geometrie des Ostsee-Beckens werden damit aber alle Eigenschwingungen des Beckens angeregt, insbesondere jedoch die ersten Ordnungen, die hier betrachtet werden sollen. Es wurden in Versuchsrechnungen auch andere Formen der Druckfunktion verwendet, die aber keine zusätzlichen Ordnungen im Spektrum sichtbar werden ließen, so daß davon ausgegangen werden kann, daß das hier berechnete System von Eigenschwingungen bis zur höchsten betrachteten Ordnung vollständig ist.

Die übrigen Parameter sind für alle Rechnungen die gleichen. Die Parameter sind :

$$\Delta t = 180 \text{ s}, \quad \Delta s = 7.07 \text{ km}, \quad T_0 = 600 \Delta t = 30 \text{ h}$$

Die Länge der berechneten Wasserstandszeitreihen betrug stets $20480 \Delta t = 1024 \text{ h}$. Dabei wurden für die spektrale Analyse der Zeitreihen stündliche Wasserstandswerte genommen, d.h. das Zeitintervall der Zeitreihen betrug $\Delta T = 20 \Delta t = 1 \text{ h}$. Auf diesen Zeitreihen von 1024 stündlichen Werten beruht die

Berechnung der Flutstunden- und Hubhöhenlinien. Zur Bestimmung der Perioden wurde die Zeitreihenlänge durch das Anhängen von Nullen vervierfacht. Dies ergibt im Frequenzbereich eine Frequenzauflösung von $\Delta\nu = 1/4096 = 2.44 \cdot 10^{-4} \text{ h}^{-1}$. Damit läßt sich eine Periode von 30 h auf ± 0.11 h, eine Periode von 20 h auf ± 0.05 h und eine Periode von 10 h auf ± 0.01 h genau angeben. Die Genauigkeit wird für alle Perioden mit angegeben.

Die Qualität der Ergebnisse ist im Allgemeinen gut, d.h. die aus den Amplituden- und Phasenspektren aller φ -Punkte entnommenen Werte für die Funktionen A_n und θ_n aus 2.5 können direkt mit einem Isolinienprogramm als Flutstunden- und Hubhöhenlinien geplottet werden. Lediglich im Fall $f \neq 0$ machen sich einige Störungen dieser Linien für Perioden $\tau > 14$ h bemerkbar. Da alle kürzeren Perioden sowie alle Lösungen für $f=0$ ungestört sind, muß angenommen werden, daß diese Störungen durch die mitangeregten Schwingungen der zweiten Art (siehe Kap. 2.2) verursacht werden. Die Darstellungen der Flutstunden- und Hubhöhenlinien der davon betroffenen Schwingungsordnungen sind hier geglättet wiedergegeben worden.

5.3 Ergebnisse der Rechnungen für die Ostsee

Es werden die ersten zehn Schwingungsordnungen für die gesamte Ostsee berechnet. Da es nicht immer einwandfrei möglich ist, die berechneten Schwingungen durch ihre räumliche Struktur als erste, zweite, dritte, u.s.w. Ordnung der Systeme Ostsee - Finnischer Meerbusen oder Ostsee-Bottnischer Meerbusen zu charakterisieren, werden sie hier lediglich durch ihre Periode gekennzeichnet. Einen Überblick über die berechneten und in den Abb. 13 bis 22 dargestellten Schwingungsordnungen gibt Tabelle 4. Dabei erschien es sinnvoll, alle Ergebnisse für jeweils eine Schwingungsordnung zusammenzufassen, damit der Einfluß der Erdrotation besser sichtbar wird. Wo es zur Verdeutlichung der Ergebnisse nötig erschien, wurde die Vergleichslösung im System Ostsee - Finnischer Meerbusen mit angegeben. Alle

f Ordnung	0	$0.3 \cdot 10^{-4}$	$0.6 \cdot 10^{-4}$	$0.9 \cdot 10^{-4}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$	variabel	$1.26 \cdot 10^{-4}$ (*)
1	40.55 (0.2)	39.77 (0.2)	37.58 (0.17)	34.42 (0.15)	31.03(0.12)	31.03 (0.12)	-
2	27.67 (0.09)	27.67 (0.09)	27.49 (0.09)	27.31 (0.09)	26.77 (0.09)	26.42 (0.09)	27.68 (0.09)
3	23.67 (0.07)	-	23.54 (0.07)	-	22.38 (0.06)	-	23.81 (0.07)
4	21.44 (0.06)	-	-	-	19.79 (0.05)	-	18.62 (0.04)
5	17.88 (0.04)	-	-	-	17.07 (0.04)	-	-
6	13.01 (0.02)	13.01 (0.02)	13.01 (0.02)	13.04 (0.02)	13,04 (0.02)	13.04 (0.02)	13.43 (0.03)
7	10.45 (0.01)	-	-	-	10.45 (0.01)	-	10.72 (0.01)
8	8.68 (0.01)	-	-	-	8.75 (0.01)	-	8.83 (0.01)
9	7.74 (0.01)	-	-	-	7.82 (0.01)	-	7.88 (0.01)
10	7.22 (0.01)	-	-	-	7.31 (0.01)	-	-

Tabelle 4 Berechnete Perioden der ersten zehn Schwingungsordnungen der Ostsee für verschiedene Werte für f .

Alle Perioden in h , alle Werte für f in s^{-1}

(*) Vergleichslösung im System Ostsee - Finnischer Meerbusen

() Genauigkeit der Periodenangabe in h

Ordnungen sind in den Abbildungen so normiert, daß das mittlere Amplitudenquadrat im jeweiligen Becken zu hundert gesetzt wurde. Der Phasennullpunkt fällt mit dem ersten ξ -Punkt des Feldes zusammen, d.h. er liegt etwa bei Marienleuchte. Der Linienabstand aller gezeichneten Hubhöhenlinien beträgt 2.5 cm, der Linienabstand aller Flutstundenlinien $30^\circ = \tau/12$. Lediglich für die Rechnungen mit $f=0$ sind die Knotenlinien gesondert gekennzeichnet, da hier die Amplitude Null ist und ein Phasensprung von 180° vorliegt. Die in den Darstellungen verwendeten Symbole und Linientypen sind in der Legende Abb. 23 zusammengefaßt.

5.3.1 Erste Schwingungsordnung der Ostsee

In Abb. 13a - f sind die Ergebnisse für die erste Schwingungsordnung der Ostsee für verschiedene Werte von f dargestellt. Abb. 13 a zeigt den Fall ohne Erdrotation. Die Periode dieser Ordnung beträgt 40.55 h. Diese Schwingung läßt sich ohne Schwierigkeiten als einknotige Schwingung im System Ostsee - Bottnischer Meerbusen identifizieren. Die Knotenlinie liegt direkt südlich der Alands-Inseln. Der Finnische Meerbusen ist mit einer Amplitude kleiner als 5 cm praktisch nicht an der Schwingung beteiligt. Dieses Ergebnis weicht nur sehr wenig von den Ergebnissen der eindimensionalen Rechnungen von G. Neumann (1941) und W. Krauß und L. Maggaard (1962) ab. Sie ermittelten eine etwas geringere Periode von 39.4 - 39.6 h, beziehungsweise 39.4 h. Die Amplitudenverteilung längs des Talwegs stimmt ebenfalls prinzipiell mit dem hier berechneten Ergebnis überein (siehe W. Krauß und L. Maggaard, 1962, Abb. 4). Lediglich die maximalen Amplituden im nördlichen Bottnischen Meerbusen sind hier im Verhältnis zur westlichen Ostsee größer. Dies ist zu erwarten, da hier der Finnische Meerbusen in die Rechnung einbezogen ist und der Eingang zum Finnischen Meerbusen südlich der Knotenlinie liegt. Dadurch fallen alle Amplituden südlich der Knotenlinie etwas geringer aus als bei geschlossenem Finnischen Meerbusen. Im Verlauf der weiteren Rechnungen mit Erdrotation für

$f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ergab sich überraschenderweise, daß die längste auftretende Periode nun nur noch 31.03 h betrug. Obwohl der Einfluß der Erdrotation stets auf die niedrigsten Schwingungsordnungen eines Beckens am größten ist, erschien eine Abnahme der Periode der einknotigen Schwingung im System Ostsee - Bottnischer Meerbusen um fast zehn Stunden bei Berücksichtigung der Erdrotation als außerordentlich groß. Es wurden daher vier Rechnungen für $f=0.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $0.6 \cdot 10^{-4}$, $0.9 \cdot 10^{-4}$ und $1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ durchgeführt, um den Einfluß der Erdrotation auf diese Schwingung zu klären. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Abb. 13b - e dargestellt. Abb. 13b zeigt, daß die Knotenlinie schon für $f=0.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ in eine relativ stark ausgeprägte linksdrehende Amphidromie übergegangen ist. Bemerkenswert ist auch, daß die Amplituden im östlichen Finnischen Meerbusen jetzt 5 cm übersteigen. Die übrige Amplitudenverteilung dagegen hat sich kaum geändert. Für $f=0.6 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ setzt sich diese Entwicklung fort (Abb. 13c). Die Amphidromie südlich der Alands-Inseln ist jetzt sehr gleichmäßig ausgebildet und die 5 cm-Hubhöhenlinie ist an den Eingang des Finnischen Meerbusens gerückt. Trotzdem ist der Zusammenhang mit Abb. 13a und 13b noch deutlich zu erkennen. Die Periode ist allerdings schon um 3.5 h kürzer als mit $f=0$. Für $f=0.9 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ hat sich der Charakter der Schwingung völlig geändert (Abb. 13d). Finnischer und Bottnischer Meerbusen schwingen mit vergleichbaren Amplituden. Gleichzeitig hat sich zwischen den Alands-Inseln und Gotland ein System von drei Amphidromien gebildet. Die mittlere Amphidromie ist rechtsdrehend, die nördliche und die südliche sind linksdrehend. Schließlich ist in Abb. 13e die gleiche Schwingung für $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ dargestellt. Hier ändert sich der Charakter der Schwingung nicht mehr wesentlich. Die Amplituden im Finnischen Meerbusen haben um 2.5 cm zugenommen, die im Bottnischen Meerbusen um den gleichen Betrag abgenommen. Die nördliche linksdrehende Amphidromie liegt jetzt auf den Alands-Inseln während die südliche näher an die Nordspitze von Gotland gerückt ist. Auffallend ist noch ein relatives Amplitudenmaximum südöstlich der Alands-Inseln. Die Periode beträgt nur noch 31.03h. Trotz der sehr star-

ken Veränderungen sowohl in der räumlichen Struktur als auch in der Periode gegenüber dem Ergebnis für $f=0$ zeigt diese Entwicklung, daß es sich um die gleiche Schwingung handelt. Wegen des großen Einflusses der Erdrotation auf die erste Schwingungsordnung der Ostsee wurde hierfür noch ein Fall mit breitenabhängigem Coriolisparameter berechnet. Das Ergebnis ist in Abb. 13f dargestellt. Es ergeben sich jedoch nur geringe Änderungen in der räumlichen Struktur. Das prinzipielle Bild und auch die Periode sind die gleichen geblieben:

Die Umformung der einknotigen Schwingung im System Ostsee - Bottnischer Meerbusen, die auf der nicht rotierenden Erde möglich wäre, zu einer Schwingung der gesamten Ostsee läßt sich dadurch verstehen, daß eine einfache stehende Welle unter dem Einfluß der Erdrotation in eine Welle übergeht, deren Amplitudenmaximum im Verlauf einer Periode einmal den Beckenrand umläuft, wobei der Rand rechts von der Fortpflanzungsrichtung des Maximums liegt. Eine solche Welle kann nicht mehr auf das System Ostsee - Bottnischer Meerbusen beschränkt bleiben, sondern muß in den Finnischen Meerbusen eindringen.

Das Ergebnis, daß eine 40 h - Welle Ostsee - Bottnischer Meerbusen nicht auftritt, wird durch das Fehlen dieser Schwingung in den Beobachtungen belegt. Lediglich G. Neumann (1941) hat ein Beispiel für eine 40 h - Welle angegeben, wobei es sich jedoch auch um eine erzwungene Schwingung der Ostsee handeln kann. Auch weisen L. Magaard und W. Krauß (1966) auf ein häufig beobachtetes Maximum in den Spektren der Pegelzeitreihen der Ostseestationen im Bereich von 30 h hin, so daß die Existenz einer solchen Eigenschwingung sehr wahrscheinlich ist.

5.3.2 Zweite Schwingungsordnung der Ostsee

Die Ergebnisse für die zweite Schwingungsordnung der Ostsee sind in Abb. 14a-g dargestellt. Hier wurden die gleichen Rechnungen wie für die erste Ordnung durchgeführt. Zusätzlich wurde eine Vergleichslösung im System Ostsee - Finnischer Meerbusen berechnet. Abb. 13a zeigt den Fall ohne Erdrotation.

Auch hier läßt sich die Schwingung ohne Schwierigkeiten als einknotige Schwingung im System Ostsee - Finnischer Meerbusen erkennen. Die maximalen Amplituden treten im Finnischen Meerbusen mit 37.5 cm auf. In der westlichen Ostsee betragen die maximalen Amplituden 20 cm, im Bottnischen Meerbusen dagegen lediglich 7.5 cm. Im Bottnischen Meerbusen liegt südlich der Kvarken noch eine angedeutete Knotenlinie mit einem zugehörigen Amplitudenminimum. Die Periode dieser Schwingung ist 27.67 h. Wie bei der ersten Ordnung sind auch hier die Unterschiede zu den Ergebnissen der eindimensionalen Rechnungen, sowohl in der Periode als auch in der Amplitudenverteilung im System Ostsee - Finnischer Meerbusen, gering. Die hier berechnete Knotenlinie liegt allerdings etwas weiter südlich.

Die vier folgenden Bilder zeigen wieder die Entwicklung der Schwingung für wachsende Werte des Coriolisparameters. Für diese Ordnung ist der Einfluß der Erdrotation viel geringer als für die erste Ordnung, da die Amplitudenverteilung in der ganzen Ostsee erhalten bleibt. Lediglich die Knotenlinie bei Gotland geht über in eine linksdrehende Amphidromie, deren Nullpunkt seine Lage an der Nordspitze von Gotland beibehält. Auch im Bottnischen Meerbusen bildet sich eine linksdrehende Amphidromie bei den Kvarken, die für zunehmendes f nach Süden wandert und schließlich etwa in der Mitte des südlichen Bottnischen Meerbusens liegt, wobei die maximalen Amplituden im nördlichen Bottnischen Meerbusen auf 12.5 cm angestiegen sind. Die Periode nimmt dabei von 26.67 für $f=0$ auf 26.77 h für $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ab. Das Ergebnis der Rechnung mit breitenabhängigem Coriolisparameter zeigt ebenfalls keine wesentlichen Veränderungen in der räumlichen Struktur (Abb. 14f). Die Periode ist allerdings mit 26.42 h etwas kürzer. Die Vergleichslösung im System Ostsee - Finnischer Meerbusen schließlich zeigt deutlich, daß sich der Charakter der zweiten Schwingungsordnung beim Abschluß des Bottnischen Meerbusens praktisch nicht ändert.

Für diese Schwingung existieren zahlreiche Beispiele von Pegelzeitreihen (G. Neumann, 1941, E. Lisitzin, 1972, J. Kielmann, J. Holtorff und U. Reimer, 1976). Aus den Pegelregistrierungen

ergibt sich eine minimale Amplitude der Schwingung etwa bei Landsort an der schwedischen Küste und Libau an der russischen Küste. Dies deckt sich sehr gut mit den hier berechneten Ergebnissen für $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, wenn man die Stellen betrachtet, an denen die 2.5 cm -Hubhöhenlinie der Amphidromie nördlich von Gotland der Küste am nächsten kommt. Dies trifft ebenfalls auf die Ergebnisse mit variablem Coriolisparameter zu. Weiterhin hat G. Neumann (1941) aus Pegelzeitreihen eine Phasenverzögerung in der Eintrittszeit des Amplitudenmaximums zwischen Tallinn und Helsinki von 2.2 h ermittelt. Bezieht man dies auf die Periode für $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ von 26.77 h, so erhält man eine Phasendifferenz zwischen Helsinki und Tallinn von 30.4° . Auch diese Beobachtungsergebnisse werden hier sehr gut wiedergegeben (Abb. 14e und 14f). Schließlich gibt G. Neumann (1941) die aus den Pegelregistrierungen ermittelte Periode dieser Schwingung mit 27.6 h ab. Die hier berechneten Perioden für $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ und für variables f sind mit 26.77 h und 26.42 h etwa eine Stunde kürzer. Es liegen allerdings auch Ergebnisse von M. Laska (1969) und E. Lisitzin (1972) vor, die eine Periode von 26.6 beziehungsweise 26.2 ± 0.2 h aus den Beobachtungen bestimmten. Damit erscheinen die hier berechneten Perioden als durchaus realistisch.

5.3.3 Dritte, vierte und fünfte Schwingungsordnung der Ostsee

Diese drei Ordnungen werden hier zusammengefaßt, da sie einige Gemeinsamkeiten haben. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 15a-d, 16a-c und 17a-b dargestellt. Die Perioden sind für $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ jeweils 22.38, 19.79 und 17.07 h. Alle drei Ordnungen besitzen je eine linksdrehende Amphidromie zwischen Gotland und Bornholm, bei den Kvarken und am Eingang des Finnischen Meerbusens. Die fünfte Ordnung besitzt zusätzlich dazu eine linksdrehende Amphidromie am Eingang des Bottnischen Meerbusens.

Auffallend sind die hohen Amplituden im Rigaer Meerbusen. Die maximalen Amplituden betragen dort jeweils 40, 27.5 und 12.5 cm für die dritte, vierte und fünfte Ordnung. Für die dritte Ordnung liegt die Amphidromie im Finnischen Meerbusen direkt

nördlich des Einganges zum Rigaer Meerbusen zwischen der Insel Dagö und dem Festland. Für die vierte und fünfte Ordnung liegt jeweils eine linksdrehende Amphidromie im südlichen Eingang des Rigaer Meerbusens zwischen der Insel Ösel und dem Festland. Es scheinen sich auch für diese Ordnungen in den nördlichen Eingängen Amphidromien zu bilden. Die räumliche Auflösung ist hier aber für genauere Aussagen zu gering. Die hohen Amplituden, insbesondere bei der dritten Ordnung, scheinen durch Resonanz zu entstehen. Ein sehr ähnliches Verhalten hat G. Platzman (1972) für den Golf von Mexiko beschrieben. Der Rigaer Meerbusen ist dem Golf von Mexiko sehr ähnlich, da beide Becken durch zwei relativ schmale Kanäle mit einem jeweils sehr viel größeren Becken verbunden sind. Dadurch wird neben den Eigenschwingungen der Becken, die auch bei abgeschlossenen Eingängen existieren, eine zusätzliche Schwingungsordnung ermöglicht, die eine sehr viel längere Periode als die übrigen haben kann. Für den Golf von Mexiko gibt G. Platzman (1972) die Periode dieser Schwingung mit 21.2 h an, wohingegen die Periode der nächstfolgenden Ordnung im Inneren des Golfes 6.68 h beträgt. Für den Rigaer Meerbusen beträgt die Periode der ersten inneren Eigenschwingung 5.42 h, so daß auch hier eine zusätzliche Schwingungsordnung mit einer Periode von etwa 20 h möglich erscheint.

Vergleicht man die oben angegebenen Perioden für die dritte, vierte und fünfte Schwingungsordnung der Ostsee mit den Ergebnissen der eindimensionalen Rechnungen von W. Krauß und L. Maggaard (1962), so entsprechen sie mit geringen Abweichungen den dort angegebenen Perioden für die zweiknotige Schwingung Ostsee - Bottnischer Meerbusen (22.5 h), die zweiknotige Schwingung Ostsee - Finnischer Meerbusen (19.1 h) und die dreiknotige Schwingung Ostsee - Bottnischer Meerbusen (17.9 h). Für $f = 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ entspricht auch die Lage der Amphidromien in den jeweiligen Systemen etwa der von W. Krauß und L. Maggaard (1962) angegebenen Lage der Knotenlinien. Da aber der Bottnische und der Finnische Meerbusen bei allen drei Ordnungen mit vergleichbaren Amplituden schwingen, ist aus den Abbildungen 15c, 16b und 17b eine solche Zuordnung nicht zu erkennen. Gegen diese Zuordnung

spricht auch die in Abb. 15d gezeigte Vergleichslösung bei abgeschlossenem Bottnischen Meerbusen. Sie zeigt deutlich, daß die dritte Schwingungsordnung der Ostsee praktisch unabhängig vom Bottnischen Meerbusen ist.

Sehr gut dagegen deckt sich das Ergebnis für die vierte Schwingungsordnung für $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ mit den Beobachtungsergebnissen von G. Neumann (1941). Er analysiert zwei Pegelzeitreihen für Ystad an der südschwedischen Küste und Primorsk am östlichen Ende des Finnischen Meerbusens und ermittelt daraus eine Schwingung mit einer Periode von 19.5 h sowie einer Phasendifferenz zwischen den beiden Orten von nahezu 0° . Das Amplitudenverhältnis von Primorsk zu Ystad beträgt dabei etwa 1.5. Wie aus Abb. 16b zu ersehen ist, entspricht die hier berechnete vierte Schwingungsordnung diesen Werten sehr gut.

Für die dritte und fünfte Schwingungsordnung der Ostsee liegen keine Beobachtungen vor.

5.3.4 Sechste und siebte Schwingungsordnung der Ostsee

Für die sechste Schwingungsordnung wurden mehrere Lösungen für verschiedene Werte für f berechnet. Sie sind in den Abb. 18a-g dargestellt. Diese Entwicklung zeigt jedoch keine Besonderheiten, sondern lediglich die zu erwartende Umformung der Knotenlinien in linksdrehende Amphidromien, wobei die Nullpunkte auf den ursprünglichen Knotenlinien liegen. Da diese Umformung für alle berechneten Ordnungen mit Ausnahme der ersten und zweiten Ordnung prinzipiell die gleiche ist, wird sie hier stellvertretend für die übrigen Ordnungen gezeigt. In Abb. 19a-c sind die Ergebnisse für die siebte Schwingungsordnung dargestellt.

Die Perioden der sechsten und siebten Schwingungsordnung sind für $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 13.04 und 10.45 h. Ihre räumliche Struktur wird bestimmt durch drei beziehungsweise vier sehr ausgeprägte linksdrehende Amphidromien in der westlichen Ostsee und im Finnischen Meerbusen (Abb. 18e und 19b). Die maximalen Amplituden werden jeweils bei Fehmarn angenommen. Die relativen Amplitudenmaxima zwischen den Amphidromien

sind jedoch bei der siebten Ordnung stärker ausgeprägt als bei der sechsten. Dagegen sind die maximalen Amplituden beider Ordnungen im Bottnischen Meerbusen mit 5 cm sehr gering. Beide Ordnungen besitzen hier zwei linksdrehende Amphidromien nördlich der Alands-Inseln und nördlich der Kvarken. Die Amplituden im Rigaer Meerbusen haben gegenüber der fünften Ordnung weiter abgenommen. Sie betragen jetzt nur noch 7.5 beziehungsweise 5 cm. In beiden Fällen liegen zwei linksdrehende Amphidromien in den Eingängen des Rigaer Meerbusens. Diese allgemeinen Merkmale findet man bei beiden Schwingungen auch für $f=0$ (Abb. 18a und 19a), wobei jeder Amphidromie eine Knotenlinie entspricht. Die Perioden ohne Erdrotation sind 13.01 und 10.45 h. Insgesamt ist also der Einfluß der Erdrotation auf diese Öffnungen sehr viel geringer als auf die niedrigeren Schwingungsordnungen. Die Vergleichslösungen (Abb. 18g und 19c) sowie die kleinen Amplituden im Bottnischen Meerbusen legen es nahe, diese beiden Ordnungen als drei- und vierknotige Schwingungen im System Ostsee - Finnischer Meerbusen aufzufassen. Ein Vergleich mit den aus eindimensionalen Rechnungen gewonnenen Amplitudenverteilungen dieser Schwingungen von W. Krauß und L. Maggaard (1962) zeigt eine überraschend gute Übereinstimmung in der Lage der Knotenlinien und Amphidromien sowie der Amplitudenmaxima auf dem Talweg. Allerdings findet man die gleiche gute Übereinstimmung, wenn man die sechste Ordnung mit der von W. Krauß und L. Maggaard (1962) berechneten vierknotigen Schwingung Ostsee - Bottnischer Meerbusen und die siebte Ordnung mit der dort angegebenen fünfknotigen Schwingung Ostsee - Bottnischer Meerbusen vergleicht. Die Aufteilung der Ostsee in zwei Systeme scheint also in diesem Zusammenhang nicht sinnvoll zu sein, da es sich offenbar jeweils um die gleichen Schwingungen in beiden Systemen handelt, wobei das Schwergewicht auf dem System Ostsee - Finnischer Meerbusen liegt. Dafür sprechen auch die von Krauß und Maggaard berechneten Perioden. Für die vierknotige Schwingung Ostsee - Bottnischer Meerbusen und die dreiknotige Schwingung Ostsee - Finnischer Meerbusen ermittelten sie 12.9 und 13.0 h, für die fünfknotige Schwingung Ostsee - Bottnischer Meerbusen und die vierknotige Schwingung Ostsee - Finnischer Meerbusen 9.4 und

9.6 h. Die Schwingungen in den beiden Systemen sind also auch nach der Periode nur schwer zu unterscheiden. Trotzdem liefert die eindimensionale Methode für diese Schwingungsordnungen recht gute Ergebnisse bei vergleichsweise geringem Aufwand.

Es liegen für diese Schwingungsordnungen wie auch für alle höheren Ordnungen keine Beobachtungsergebnisse vor.

5.3.5 Achte bis zehnte Schwingungsordnung der Ostsee

Abb. 20a-c, 21a-c und 22a-c zeigen die Ergebnisse für die achte, neunte und zehnte Schwingungsordnung der Ostsee. Diese drei Ordnungen zeigen zwei verschiedene Schwingungstypen. Während die achte und neunte Ordnung einen ähnlichen Charakter haben wie die sechste und siebte Ordnung (siehe 5.3.4), d.h. ausgesprochen geringe Amplituden im Bottnischen Meerbusen (5 cm) und relativ hohe Amplituden im System Ostsee - Finnischer Meerbusen, ist es bei der zehnten Ordnung umgekehrt. Hier werden die höchsten Amplituden (65 cm) im nördlichen Bottnischen Meerbusen angenommen, wohingegen die übrige Ostsee mit Ausnahme einiger schmaler, flacher Buchten lediglich Amplituden in der Größenordnung von 5 cm aufweist. Dies wird besonders deutlich für $f=0$ (Abb. 20a, 21a und 22a). Auffallend ist auch das Verhalten des Rigaer Meerbusens. Alle drei Ordnungen haben nur geringe Amplituden im Inneren des Meerbusens. Die achte Schwingungsordnung hat jedoch sehr hohe Amplituden (85 cm) im nördlichen Eingang dazu. Diese hohen Amplituden nehmen bei der neunten Ordnung auf 12.5 cm und bei der zehnten Ordnung auf 10 cm ab. Dies scheint die Vermutung bezüglich der Eigenschwingungen des Rigaer Meerbusens aus Abschnitt 5.3.3 zu bestätigen, wonach dessen nullte und erste Eigenperiode bei etwa 20h und 5.4 h liegen, denn damit würden für die achte Schwingungsordnung mit einer Periode von 8.75 h sehr schlechte Resonanzverhältnisse im Rigaer Meerbusen vorliegen, wodurch die hohen Amplituden im Eingang erklärlich wären. Gleichzeitig mit der Abnahme der Amplituden im nördlichen Eingang verschiebt sich die dort liegende Amphidromie für die höheren Ordnungen immer weiter in die Mitte des Rigaer Meerbusen, wo sie für die zehnte Ordnung der Ostsee den Cha-

rakter einer ersten Eigenschwingungsordnung des Meerbusens annimmt (Abb. 22b).

Bei allen drei Ordnungen ist die Periodenverschiebung beim Übergang von $f=0$ auf $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ geringer als 0.1 h. Auch die Hubhöhenlinien der dabei entstehenden Amphidromien sind nicht mehr kreisförmig wie zum Beispiel bei der sechsten Schwingungsordnung (Abb. 18e), sondern eher ellipsenförmig, wobei die großen Halbachsen etwa parallel zu den ursprünglichen Knotenlinien verlaufen. Gleichzeitig drängen sich die Flutstundenlinien um die ursprünglichen Knotenlinien, so daß der Eindruck einer aufgefächerten Knotenlinie entsteht. Diese Merkmale treten für die höheren Schwingungsordnungen immer deutlicher hervor und zeigen den zu höheren Ordnungen hin abnehmenden Einfluß der Erdrotation auf die räumliche Struktur der Schwingungen. Unerwartet dagegen ist die Aufspaltung der Knotenlinie bei Gotland für die neunte Schwingungsordnung in zwei linksdrehende Amphidromien westlich und östlich von Gotland (Abb. 21a und 21b).

Die Vergleichslösungen zeigen, daß die achte und neunte Ordnung zum System Ostsee - Finnischer Meerbusen gehören (Abb. 20c und 21c). Allerdings zeigt der Vergleich mit den eindimensionalen Ergebnissen von W. Krauß und L. Magaard (1962) nur eine prinzipielle Übereinstimmung in der Amplitudenverteilung längs des Talweges. Die dort angegebenen Perioden dieser Schwingungen fallen mit 8.1 und 6.9 h auch etwa um 10% niedriger aus als die hier berechneten. Schließlich fehlt hier eine äquivalente Schwingung zu der von Krauß und Magaard angegebenen sechsknotigen Schwingung im System Ostsee - Bottnischer Meerbusen, da die zehnte Schwingungsordnung nur als siebenknotige Schwingung in diesem System angesehen werden kann und da weder die achte noch die neunte Ordnung eine ähnliche Amplitudenverteilung im Bottnischen Meerbusen zeigen. Hier scheint die eindimensionale Methode also zu versagen. Der Grund dafür liegt sicherlich zum Teil darin, daß alle Strukturen sehr kleinräumig geworden sind und daß die bei der eindimensionalen Methode vernachlässigten Querbewegungen für die höheren Ordnungen immer größere Bedeutung gewinnen.

6. Zusammenfassung der Ergebnisse für die Ostsee

Es soll in diesem Abschnitt versucht werden, einige Merkmale des gesamten Lösungssystems der ersten zehn Schwingungsordnungen der Ostsee zu erläutern. Es fällt zunächst auf, daß alle Amphidromien der zehn Ordnungen mit Ausnahme der ersten Ordnung linksdrehend sind. Die Ergebnisse von D. Rao (1965) in einem rechteckigen Becken zeigen, daß rechtsdrehende Amphidromien immer dann entstehen, wenn die entsprechenden Ordnungen ohne Erdrotation Querschwingungscharakter haben (siehe auch D. Schwab und D. Rao, 1977). Dies ist aber für keine der hier betrachteten Ordnungen der Fall. Die rechtsdrehende Amphidromie der ersten Ordnung südlich der Alands-Inseln scheint daher nur aufgrund der komplizierten Verhältnisse am Eingang des Bottnischen Meerbusens zu entstehen; zumal sie keinen Einfluß auf die prinzipielle Form der ersten Schwingungsordnung hat. Alle Amphidromien der ersten zehn Ordnungen sind sehr ausgeprägt, obwohl der zu den höheren Ordnungen hin abnehmende Einfluß der Erdrotation auf die räumliche Struktur der Schwingungen deutlich sichtbar ist. Die Hubhöhenlinien der Ordnungen mit $\tau > \tau_c$ ($\tau_c = 13.85$ h, Trägheitsperiode für $f = 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$) sind ellipsenförmig, wobei die große Halbachse in Längsrichtung des Beckens liegt, während die der Ordnungen mit $\tau < \tau_c$ ellipsenförmig mit der großen Halbachse in Querrichtung des Beckens sind (siehe z. B. Abb. 16b, 18e und 22b). Bemerkenswert ist auch die Periodenverschiebung beim Übergang von $f=0$ auf $f = 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Dabei nehmen die Perioden der ersten fünf Ordnungen ab und die der höheren Ordnungen zu (siehe Tabelle 4). Auch hier liegt die Trennung der beiden Gruppen wieder bei der Trägheitsperiode τ_c . Da auch im Testbecken 1 die Perioden der ersten Ordnungen bei Berücksichtigung der Erdrotation zunehmen (siehe Kap. 4.2), erscheint die Periodenabnahme der ersten fünf Schwingungsordnungen der Ostsee außergewöhnlich. Dies wird ebenfalls durch viele Beispiele aus der Literatur bestätigt (D. Rao, 1965, D. Rao und D. Schwab, 1974). Eine mögliche Ursache für dieses Verhalten liegt darin, daß sich die Ostsee aus mehreren Teilbecken zusammensetzt, die mehr oder weniger stark gegeneinander abgeschlossen sind. Einen ähnlichen Fall beschreibt G. Platzman (1972). Bei der Berechnung der Eigenschwingungen

des Golfes von Mexiko stellte er fest, daß die Periode derjenigen Eigenschwingung, die bei der Öffnung der Florida Straße zum Atlantik und der Straße von Yucatan zur Caribik zusätzlich zu den Eigenschwingungen des abgeschlossenen Golfes entsteht, ebenfalls bei der Berücksichtigung der Erdrotation abnahm. Allerdings bestehen hier zwei Unterschiede zum Golf von Mexiko. Zum einen ist die Trägheitsperiode des Golfes von Mexiko mit etwa 28.3 h (für 25° N) größer als die längste auftretende Eigenperiode von 21.8 h, zum anderen setzt G. Platzman (1972) voraus, daß durch die Öffnung der Eingänge zum Golf von Mexiko keine Rückwirkungen der äußeren Meere auf den Golf stattfinden, was wegen der großen Unterschiede in der Ausdehnung der beteiligten Becken auch gerechtfertigt ist. Die Struktur der hier gezeigten Ordnungen legt es nahe, die gesamte Ostsee in das System Ostsee - Finnischer Meerbusen sowie den Bottnischen Meerbusen zu gliedern. Für diese Einteilung spricht auch, daß sieben der zehn berechneten Ordnungen bei abgeschlossenem Bottnischen Meerbusen nahezu unverändert existieren. Bei dieser Einteilung haben jedoch die an den gekoppelten Schwingungen der gesamten Ostsee beteiligten Becken durchaus vergleichbare Dimensionen, so daß Rückwirkungen der Becken aufeinander eintreten müssen. Sehr deutlich wird dies durch die teilweise recht hohen Amplituden im Bottnischen Meerbusen, die dort bei Schwingungen des Systems Ostsee - Finnischer Meerbusen erzeugt werden (siehe z.B. Abb. 14g). Ein direkter Vergleich mit den Ergebnissen von G. Platzman (1972) scheint hier also nicht möglich zu sein. Zur Erklärung der Periodenabnahme der ersten fünf Schwingungsordnungen wäre daher eine genauere Untersuchung der Schwingungseigenschaften der einzelnen Teilbecken der Ostsee notwendig.

7. Anhang: Benutzte Programme

Bis auf zwei Ausnahmen wurden alle Programme selbst entwickelt. Bei den Ausnahmen handelt es sich um das Unterprogramm FFT.F4 für die schnelle Fouriertransformation nach dem Cooley-Tukey Algorithmus sowie um die Zeichenprogramme für den Trommelplotter des Instituts für Meereskunde. Das FFT-Programm wurde von Herrn J. Kielmann, die Zeichenprogramme von Herrn J. Holtorff, beide aus der Abteilung Theoretische Ozeanographie des IfM, Kiel, zur Verfügung gestellt. Alle selbst erstellten Programme wurden für die DEC-PDP10-Rechenanlage des Rechenzentrums der Universität Kiel in Fortran F10 geschrieben. Alle Programme laufen im 32 K-Core Tagesbetrieb des Rechenzentrums und sind für den Batch-Betrieb geeignet. Dadurch könnte der Rechengang weitgehend automatisiert werden. Allerdings konnte nicht auf Magnetbänder zur Zwischenspeicherung der anfallenden Daten verzichtet werden, da z.B. für die Ostsee in einem Rechenlauf mit 3570 ζ -Punkten und Zeitreihen von 1024 stündlichen Werten etwa 3.65 Millionen Daten erzeugt werden. Um die Rechenzeit zu verkürzen, sind alle Programme weitgehend spezialisiert worden. Daher ist für die Rechnungen mit der Ostsee ein ganzes Programmsystem entstanden. Die Rechenzeit für eine vollständige Rechnung, mit der zehn Schwingungsordnungen berechnet und gezeichnet werden können, beträgt etwa 5.5 Stunden. Alle Programme liegen dokumentiert vor. Das Programmsystem ist so ausgelegt, daß als Eingabedaten lediglich die Tiefenverteilung des Beckens sowie die Druckfunktionen vorgegeben werden müssen. Alle anderen Parameter werden selbsttätig erzeugt. Dadurch können sehr schnell Änderungen in der Form des Beckens vorgenommen werden. Die Ergebnisse im Testbecken 2 sind ebenfalls mit dieser Programmserie berechnet worden, so daß der im Kapitel 4.4 durchgeführte Vergleich mit bekannten Ergebnissen gleichzeitig als Test für die Richtigkeit der später für das Ostsee - Modell benutzten Programme diente.

Literaturverzeichnis

Defant, A. 1960

Physical oceanography, Vol. II
Pergamon Press, New York

Fischer, G. 1965

A survey of finite-difference approximations to the
primitive equations
Monthly Weather Review, Vol. 93, No. 1

Harris, D. und C. Jelesnianski 1964

Some problems involved in the numerical solution of
tidal hydraulics equations
Monthly Weather Review, Vol. 92, No. 9

Henry, R. und P. Graefe 1971

Zero padding as a means of improving definition of
computed spectra
Manuscript Series, No. 20
Marine Sciences Branch, published for Environment Canada
by Department of Energy, Mines and Resources, Ottawa

Kielmann, J. 1976

Numerical modelling in connection with Baltic 75
In: Proc. of 10th Conf: Baltic Oceanographers, Göteborg

Kielmann, J., J. Holtorff und U. Reimer 1976

Data report Baltic 75
Berichte aus dem Institut für Meereskunde an der
Christians-Albrechts-Universität, Kiel, Nr. 26

Krauß, W. 1973

Methods and results of theoretical oceanography, Vol. 1
Dynamics of the homogeneous and the quasi-homogeneous
ocean
Bornträger, Berlin

Krauß, W. und L. Magaard 1962

Zum System der Eigenschwingungen der Ostsee
Kieler Meeresforschungen, Band 18, Heft 2
Institut für Meereskunde der Universität Kiel

Lisitzin, E. 1974

Sea level changes
Elsevier Oceanography Series, 8

Lamb, H. 1932

Hydrodynamics

Cambridge University Press

Magaard, L., und W. Krauß

Spektren der Wasserstandsschwankungen der Ostsee im
Jahre 1958

Kieler Meeresforschungen, Band 22, Heft 2

Institut für Meereskunde der Universität Kiel

Neumann, G. 1941

Eigenschwingungen der Ostsee

Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte und des Marine-
observatoriums, Band 61, Nr. 4

O'Brien, J., und R. Grotjahn 1976

Some inaccuracies in finite differencing hyperbolic
equations

Monthly Weather Review, Vol. 104, No. 2

Papa, L. 1977

The free oscillations of the Ligurian Sea computed by
the H-N-Method

Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Jahrgang 30, Heft 3

Platzman, G., und D. Rao 1964

The free oscillations of Lake Erie

Studies on Oceanography, University of Tokyo Press

Platzman, G. 1972

Two dimensional free oscillations in natural basins

Journal of Physical Oceanography, Vol. 2, S. 117-138

Radach, G. 1971

Ermittlung zufallsangeregter Bewegungsvorgänge für zwei
Modellmeere mittels des hydrodynamisch-numerischen
Verfahrens

Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Univer-
sität Hamburg, Nr. 20

Rao, D. 1965

Free gravitational oscillations in rotating rectangular
basins

Journal of Fluid Mechanics, Vol. 25, S. 523-555

rao, D., und D.Schwab 1974

Two dimensional normal modes in arbitrary enclosed basins on a rotating earth: Applications to Lakes Ontario and Superior

Special Report No. 19, Center of Great Lakes Studies, University of Wisconsin

Schwab, D., und D.Rao 1977

Gravitational oscillations of Lake Huron, Saginaw Bay, Georgian Bay, and the North Channel

Journal of Geophysical Research, Vol. 82, No. 15

Sielecki, A. 1967

An energy conserving difference scheme for the storm surge equations

Monthly Weather Review, Vol. 96, No. 3

Verzeichnis der Abbildungen

- Abb. 1 Gitterstruktur des Differenzenverfahrens von
A.Sielecki (1967)
- 2 Relative numerische Kreisfrequenz ω_n in Abhän-
gigkeit von den Wellenzahlen κ und γ .
- 3 Randbedingungen im Testbecken 1
- 4 Übersicht zum Testbecken 1
- 5a-e Ergebnisse im Testbecken 1, $f=0$
- 6a-c Ergebnisse im Testbecken 1, $f=1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- 7 Übersicht zum Testbecken 2
- 8 Amplituden- und Phasenspektren der ζ -Punkte
P1 bis P4
- 9 Ergebnisse im Testbecken 2, $f=3.175 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- 10 Stereographische Projektion der Ostsee mit dem
Gitternetz des Ostsee-Modells
- 11 Tiefenverteilung im Ostsee-Modell
- 12 Randbedingungen im Ostsee-Modell
- 13 - 22 Die ersten zehn Schwingungsordnungen der
Ostsee
- 23 Legende zu den Abbildungen

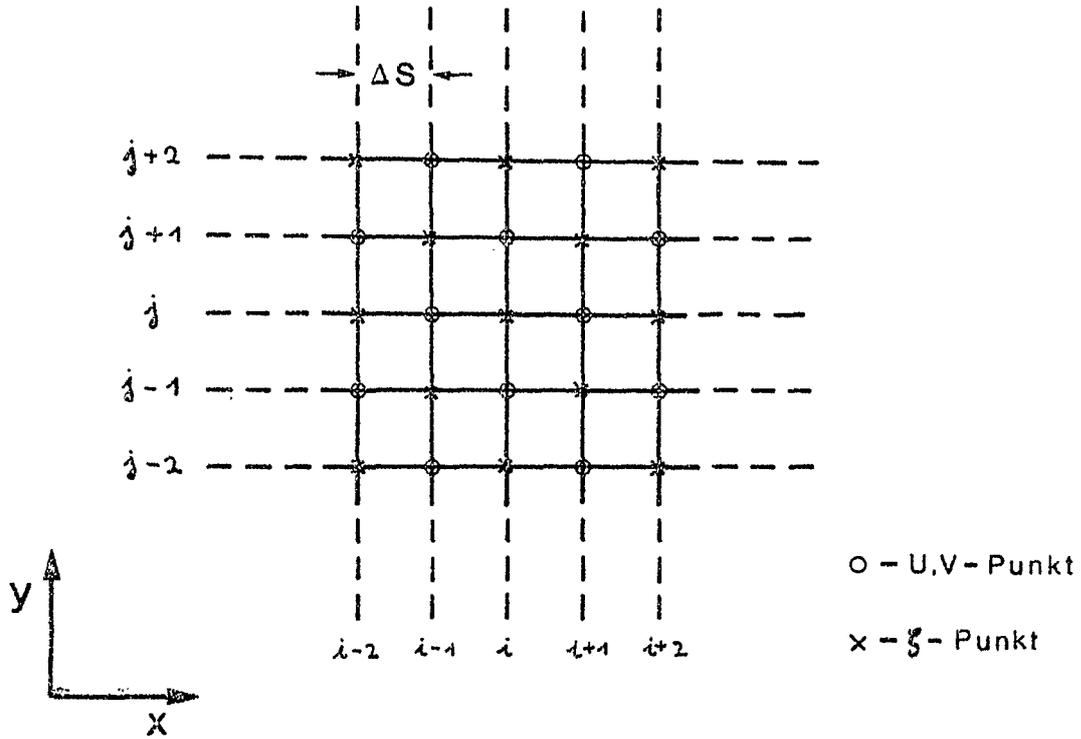


Abb. 1 Gitterstruktur des Differenzenverfahrens von A.Sielecki (1967)

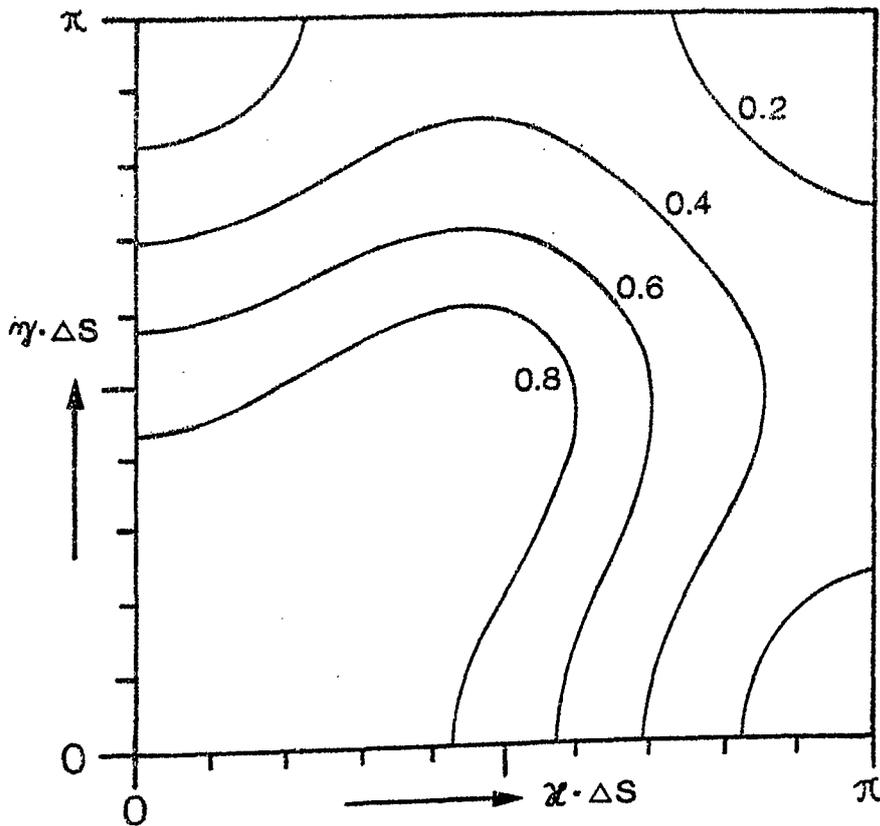
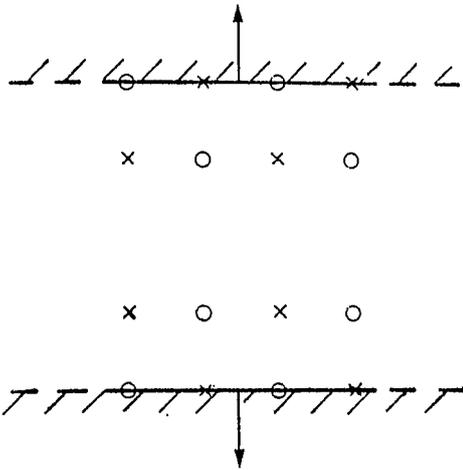
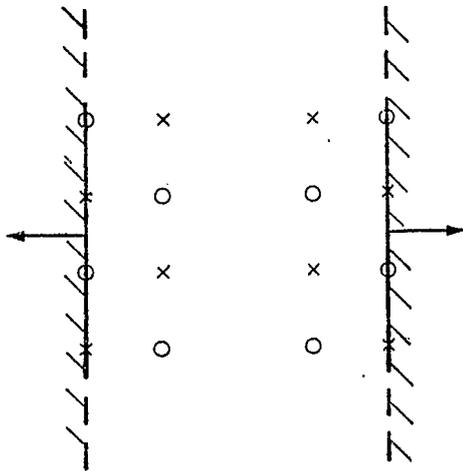


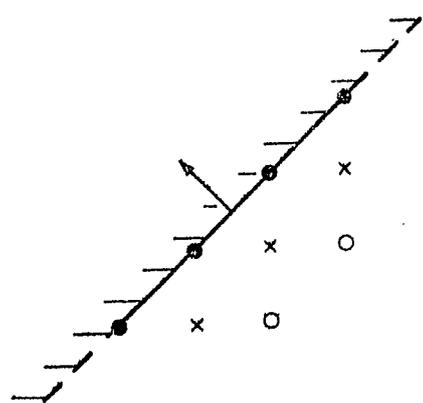
Abb. 2 Relative numerische Kreisfrequenz ω_n in Abhängigkeit von den Wellenzahlen κ und γ .



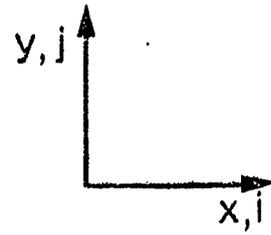
$V=0$ a)



$U=0$ b)



$U-V=0$ c)



- x - ξ -Punkt
- o - U,V-Punkt
- - U,V, ξ -Punkt
- Normale des Randes

Abb.3 Randbedingungen im Festbecken 1

Testbecken 1 Übersicht

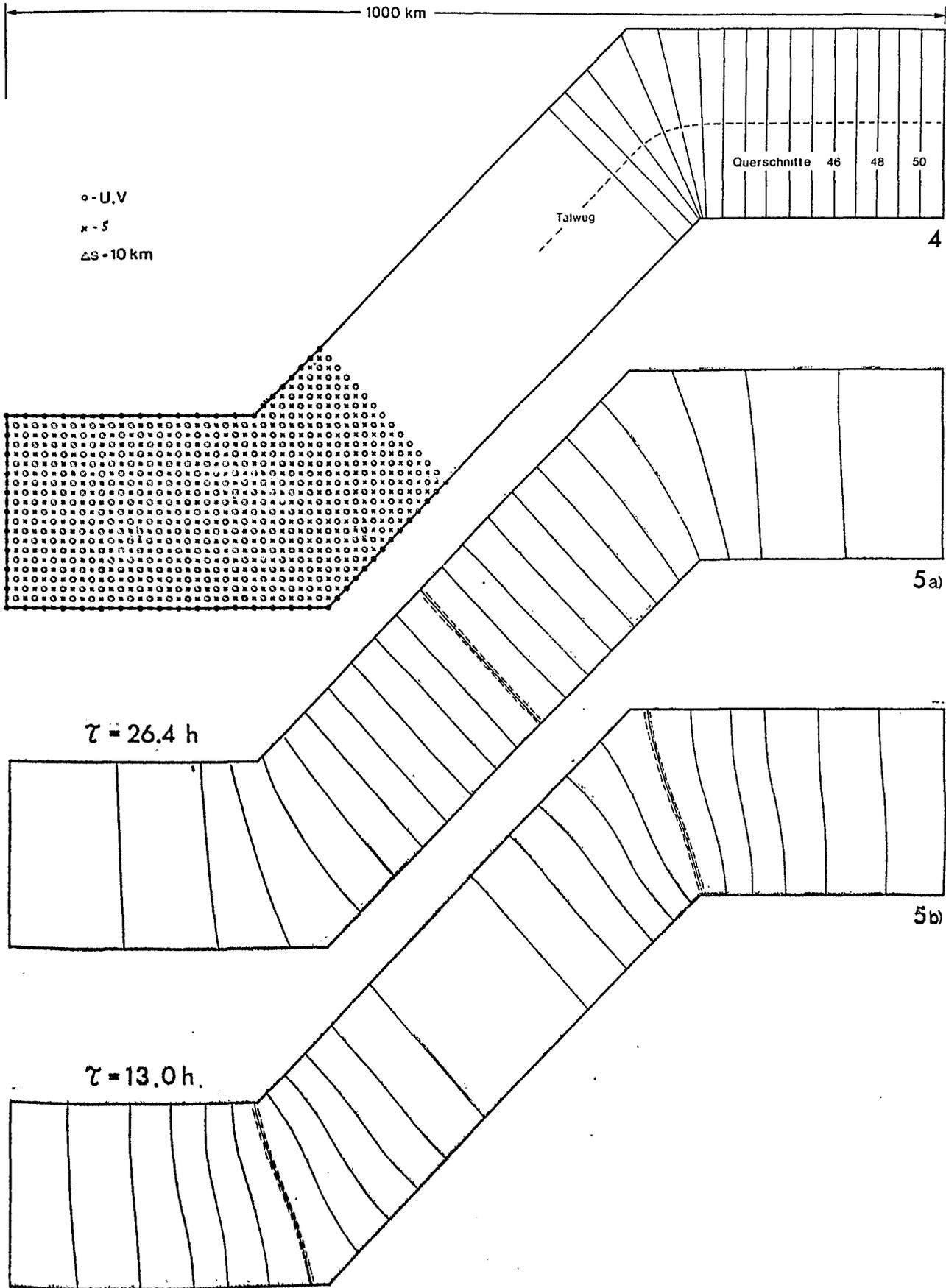


Abb. 4 Übersicht zum Testbecken 1
Abb. 5a, b Ergebnisse im Testbecken 1, $f=0$

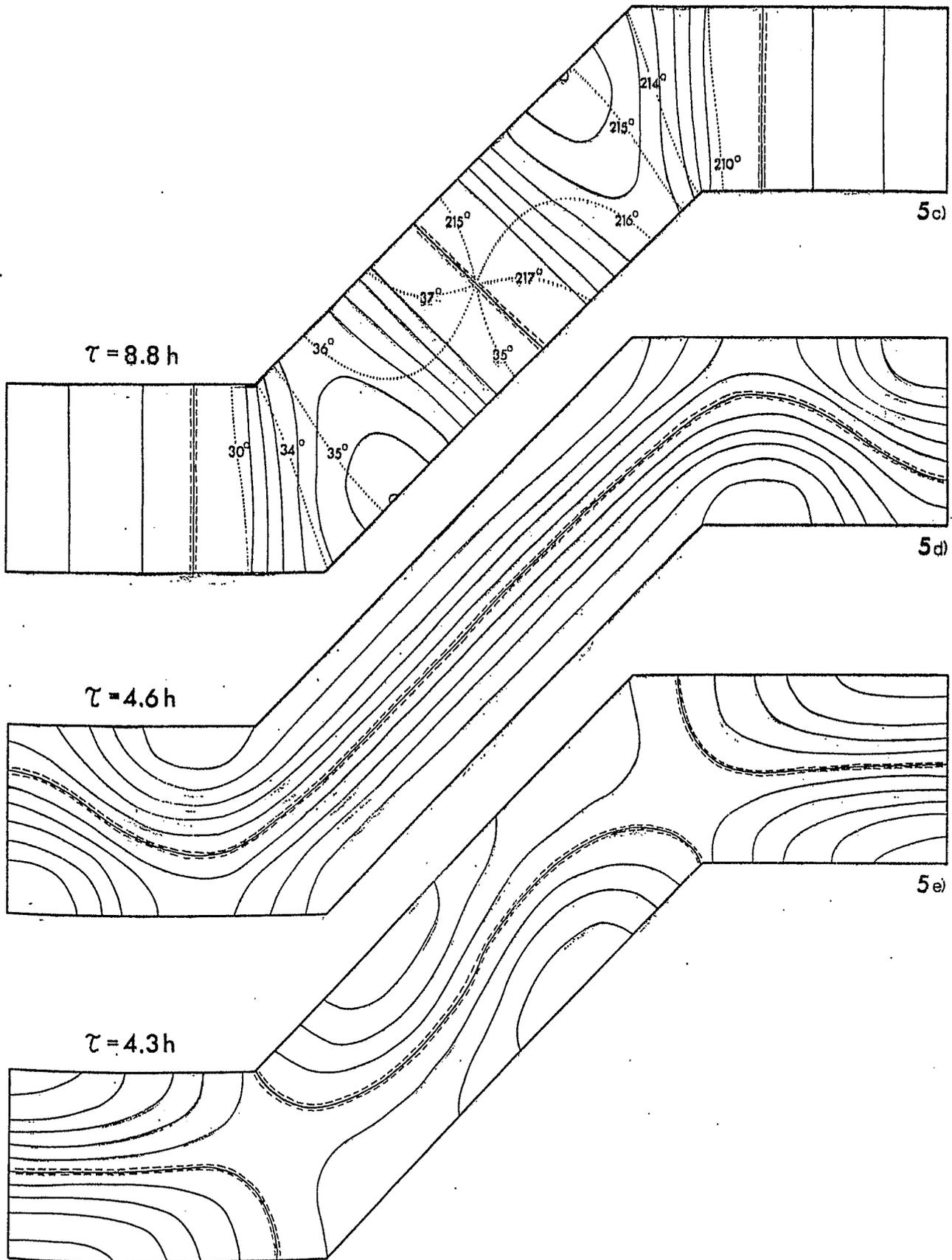


Abb. 5c,d,e Ergebnisse im Testbecken 1, $f=0$

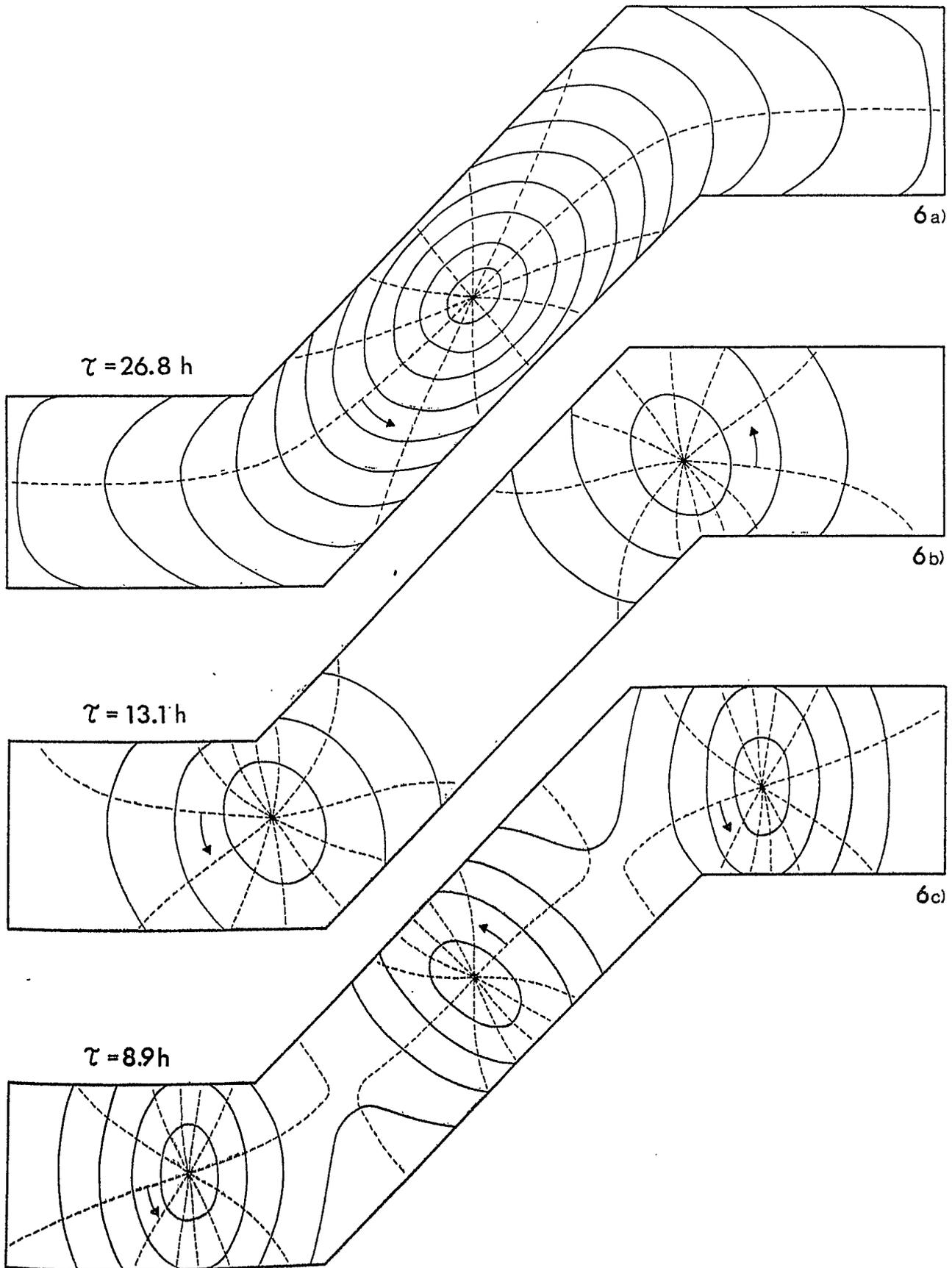


Abb. 6a,b,c Ergebnisse im Testbecken 1, $f=1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

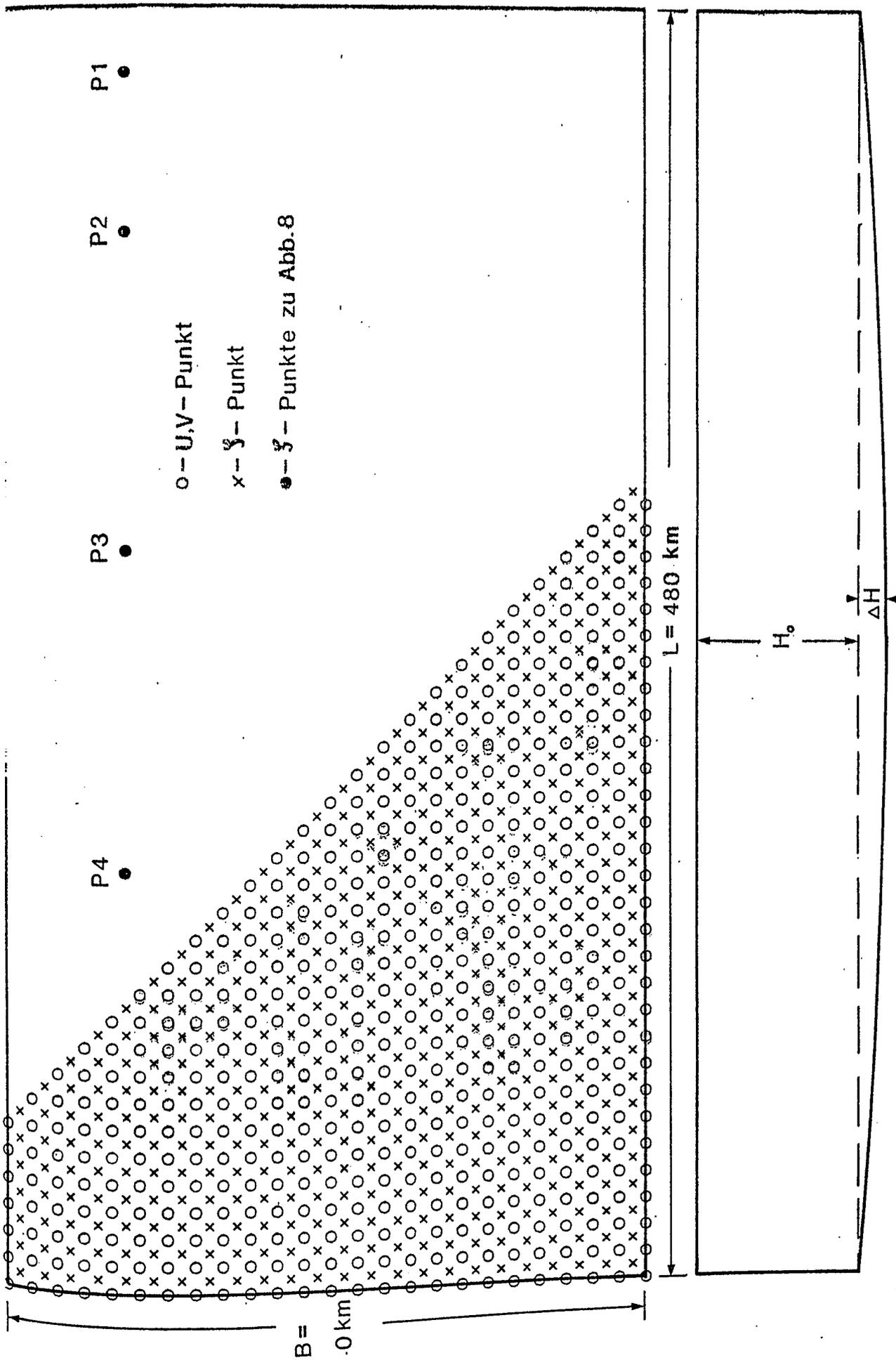


Abb. 7 Übersicht zum Testbecken 2

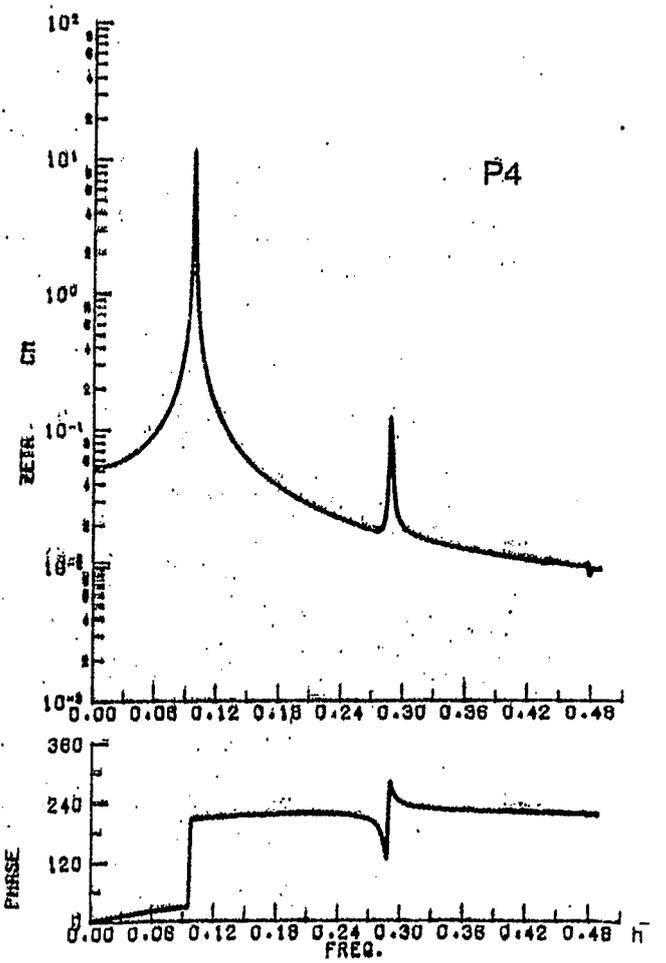
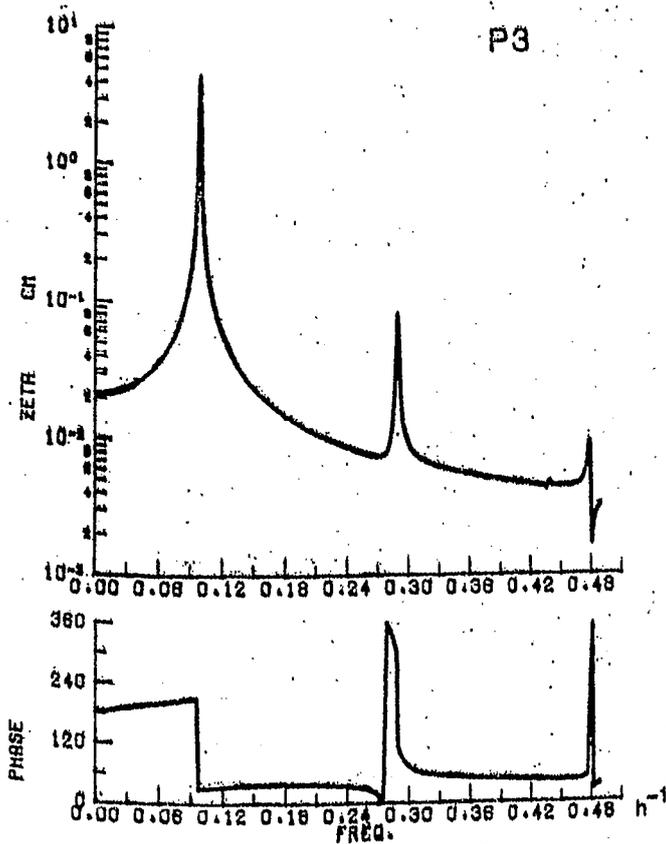
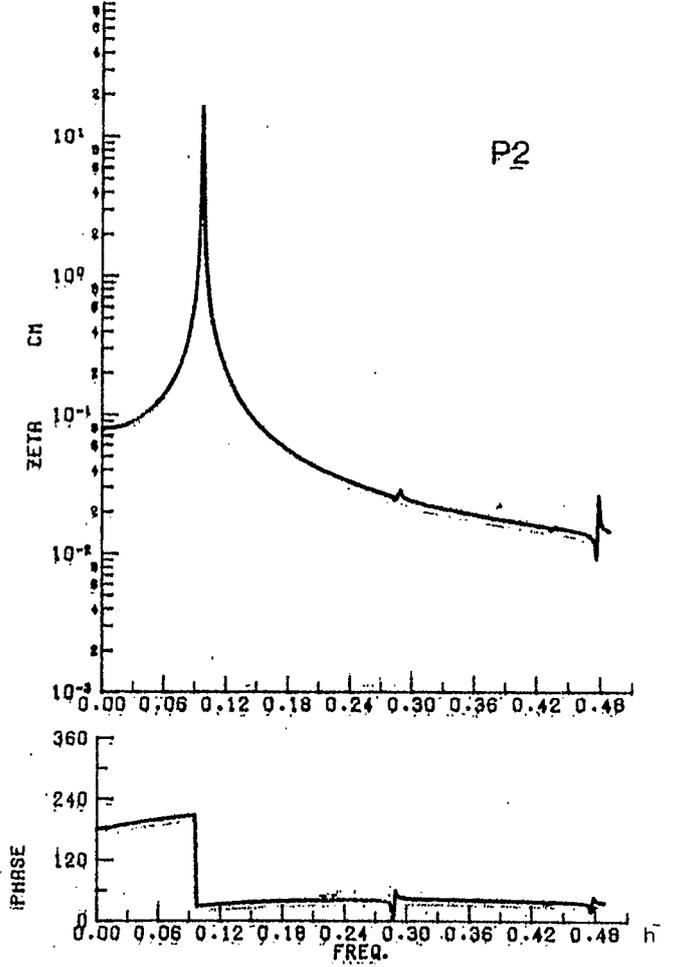
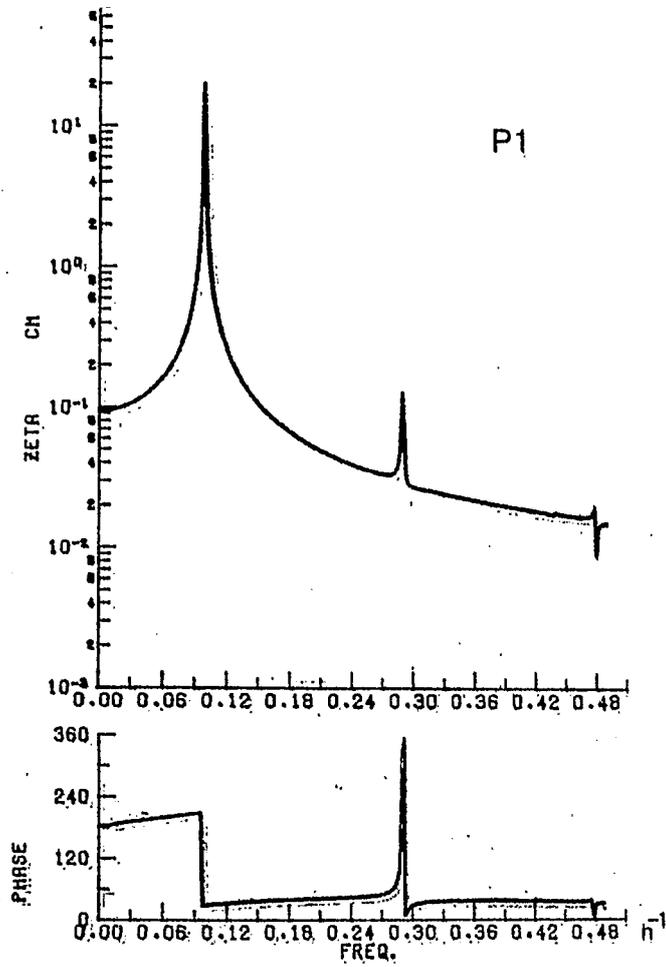


Abb. 8 Amplituden- und Phasenspektren der β -Punkte P1, P2, P3 und P4. (Lage der Punkte siehe Abb. 7)

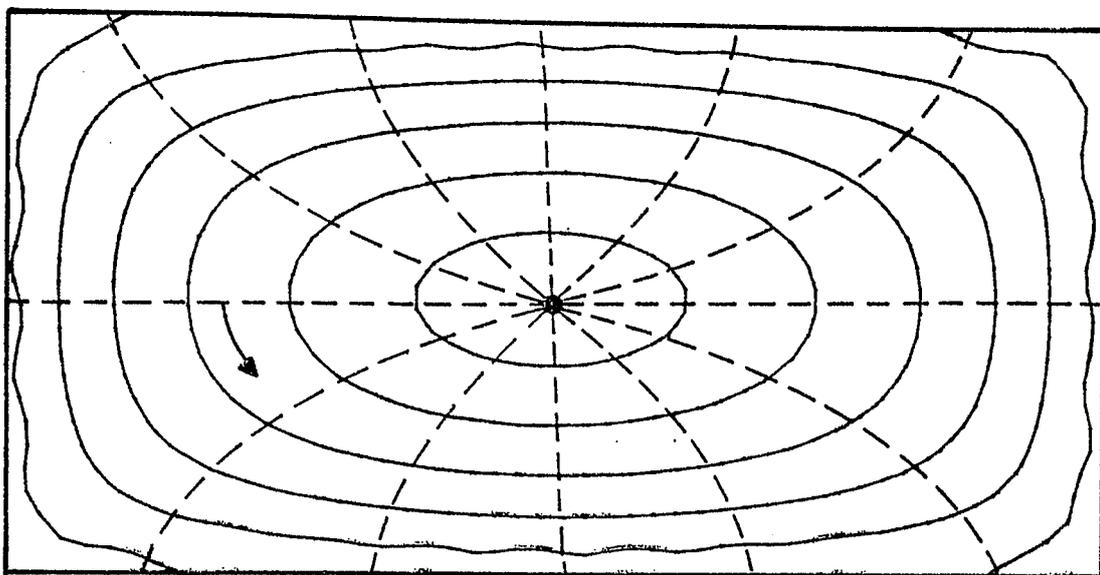


Abb. 9a Ordnung $(1,0)$, $\tau = 12.87$ h.

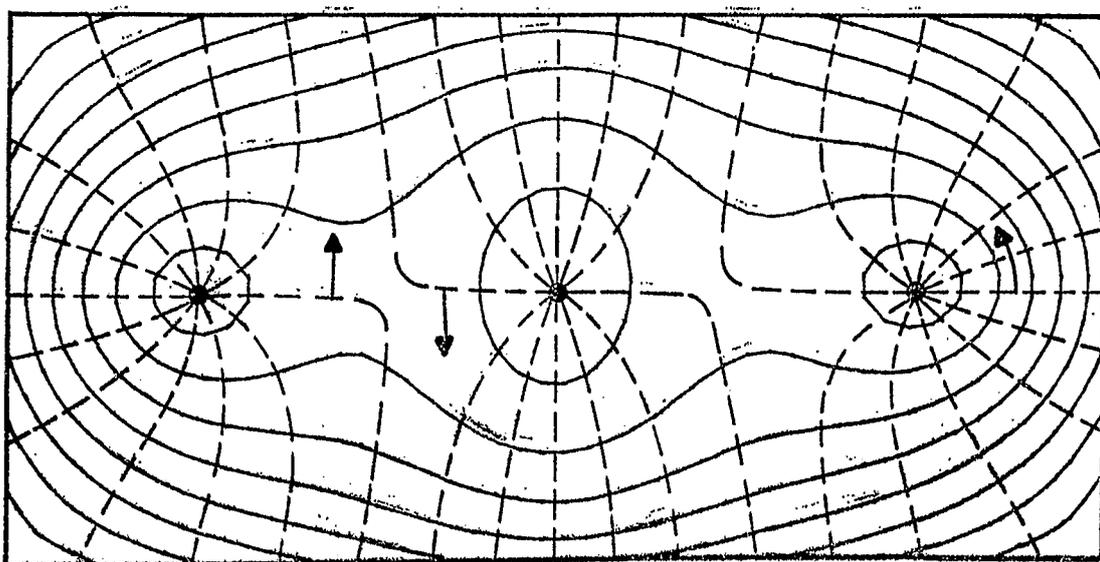


Abb. 9b Ordnung $(0,1)$, $\tau = 4.65$ h.

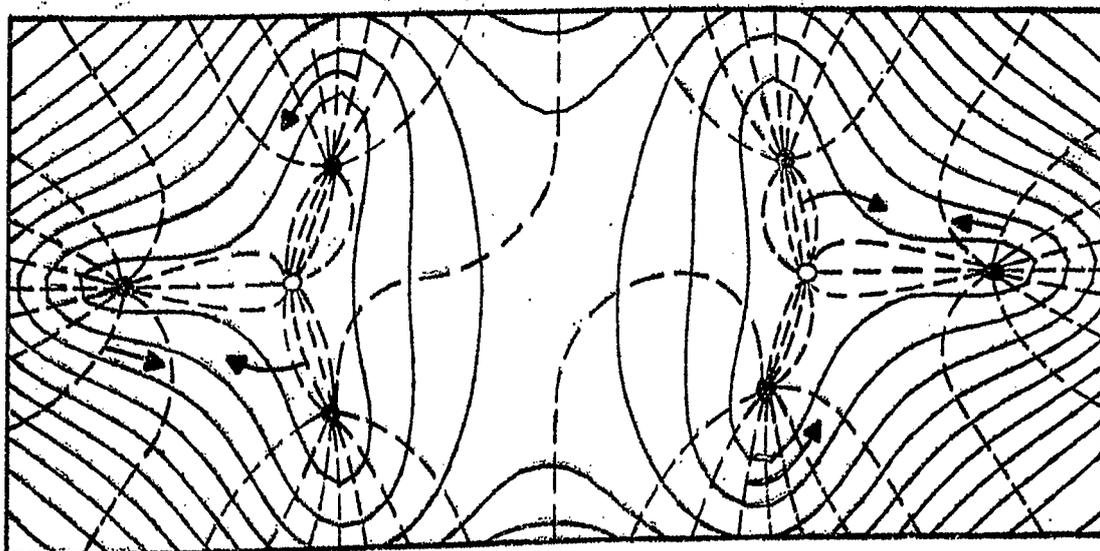


Abb. 9c Ordnung $(1,1)$, $\tau = 3.81$ h.

Abb. 9 Ergebnisse im Testbecken 2 , $H_0 = 60$ m, $f = 3.175 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

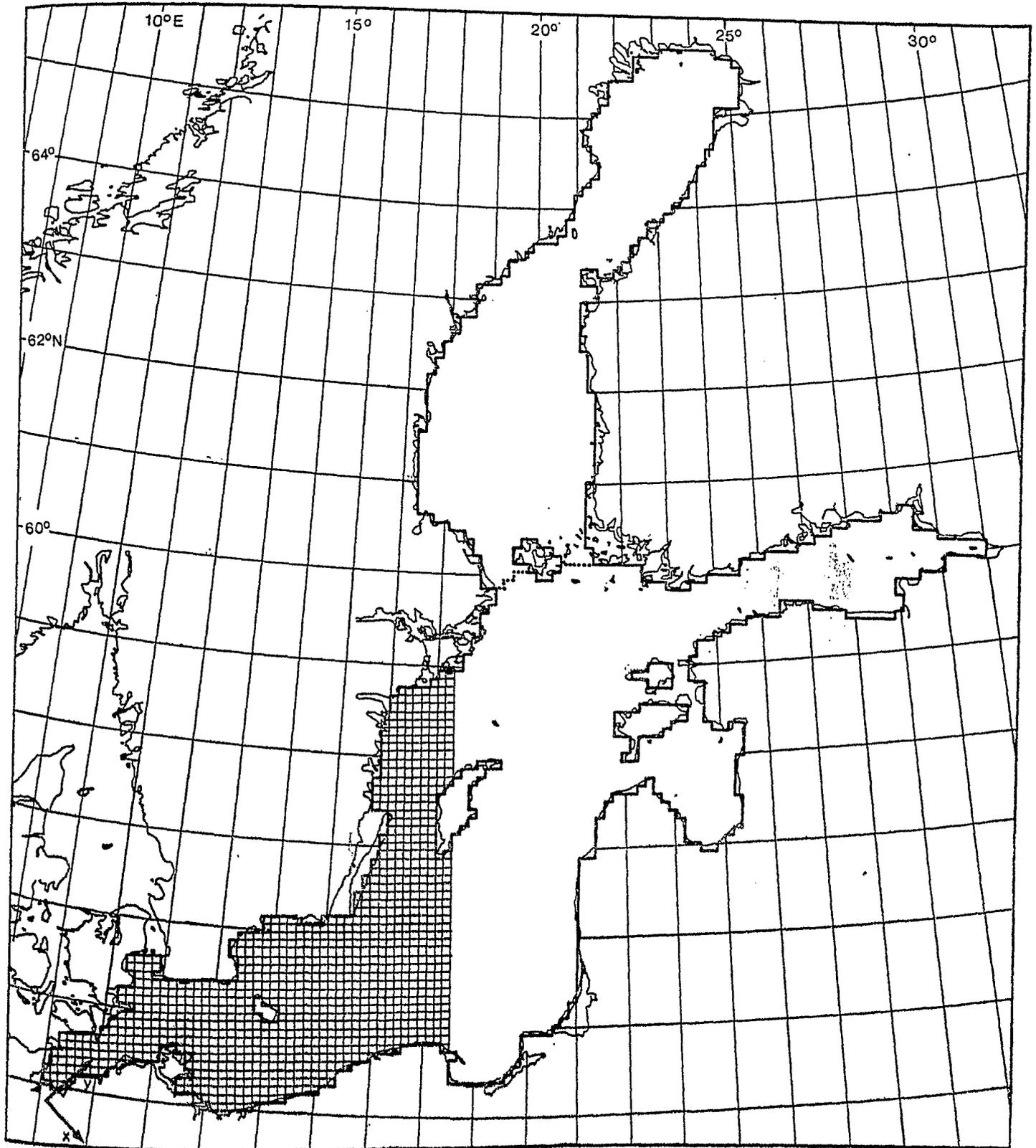


Abb. 10 Stereographische Projektion der Ostsee mit dem Gitternetz des Ostsee - Modells
Zentrum der Projektion $60^{\circ}\text{N}, 20^{\circ}\text{E}$
Gitterweite 10 km

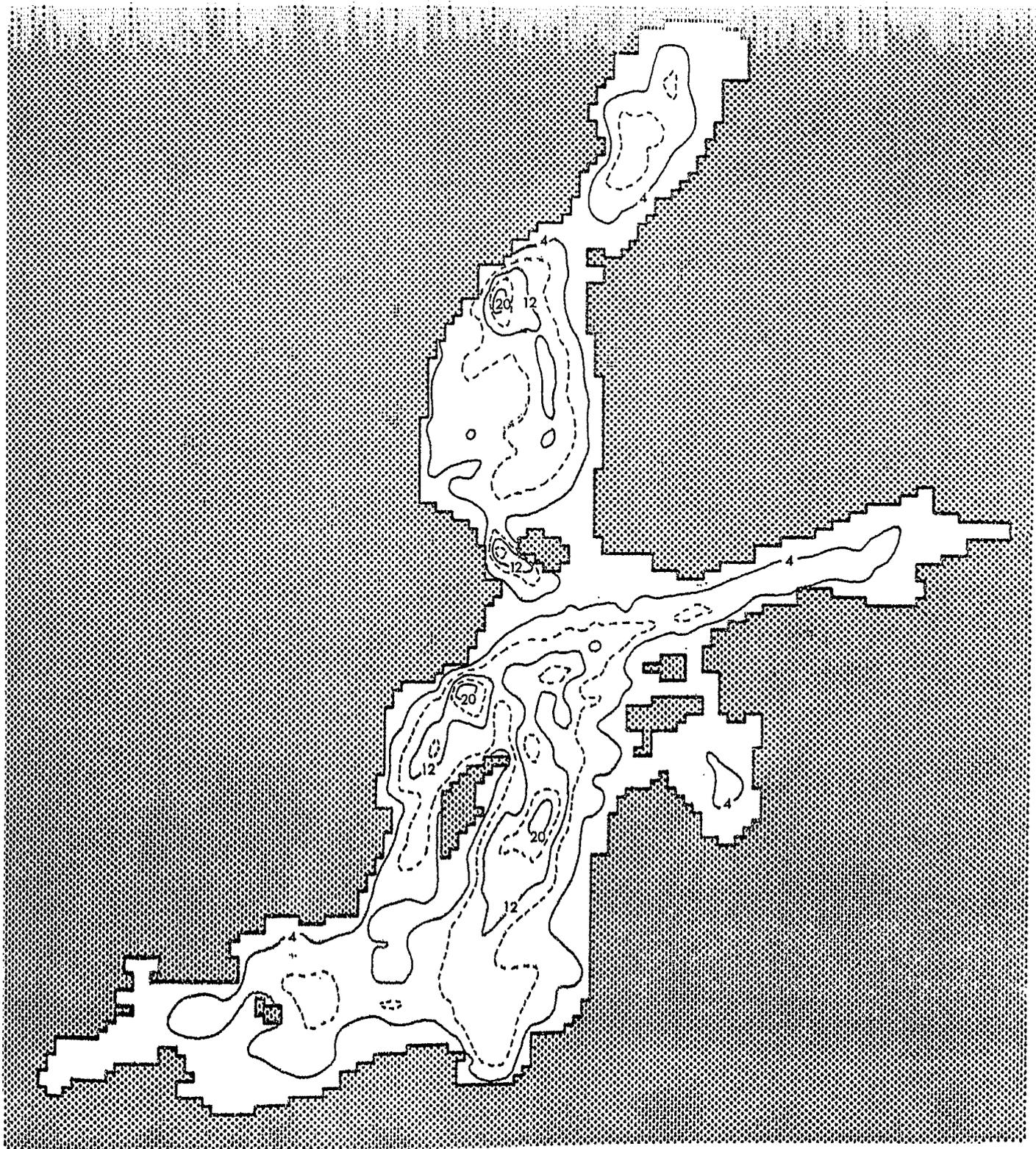
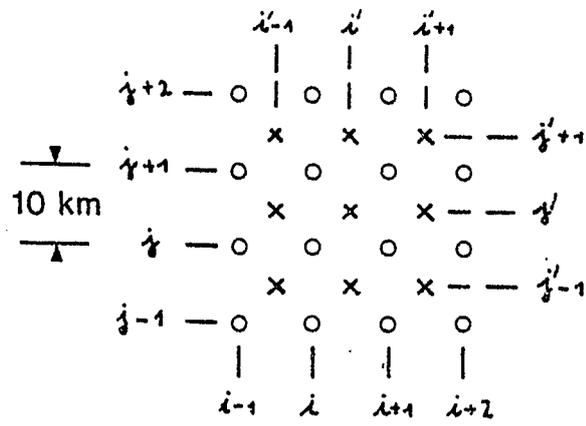
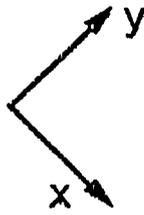
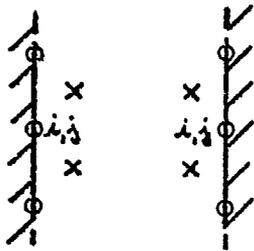


Abb. 11 Tiefenverteilung im Ostsee - Modell
Linienabstand 40 m, Tiefenangaben in
Einheiten von 10 m.

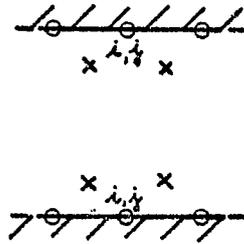


a)



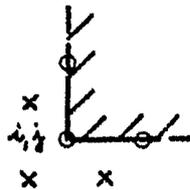
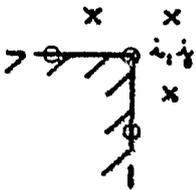
b)

$$U_{i,j}^n + V_{i,j}^n = 0$$



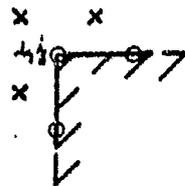
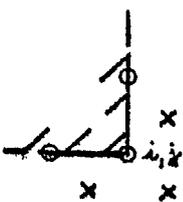
c)

$$U_{i,j}^n - V_{i,j}^n = 0$$



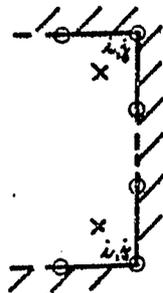
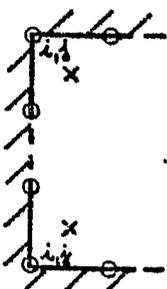
$$V_{i,j}^n = 0$$

d)



$$U_{i,j}^n = 0$$

e)



$$U_{i,j}^n = 0, V_{i,j}^n = 0$$

f)

Abb. 12 Randbedingungen im Ostsee-Modell

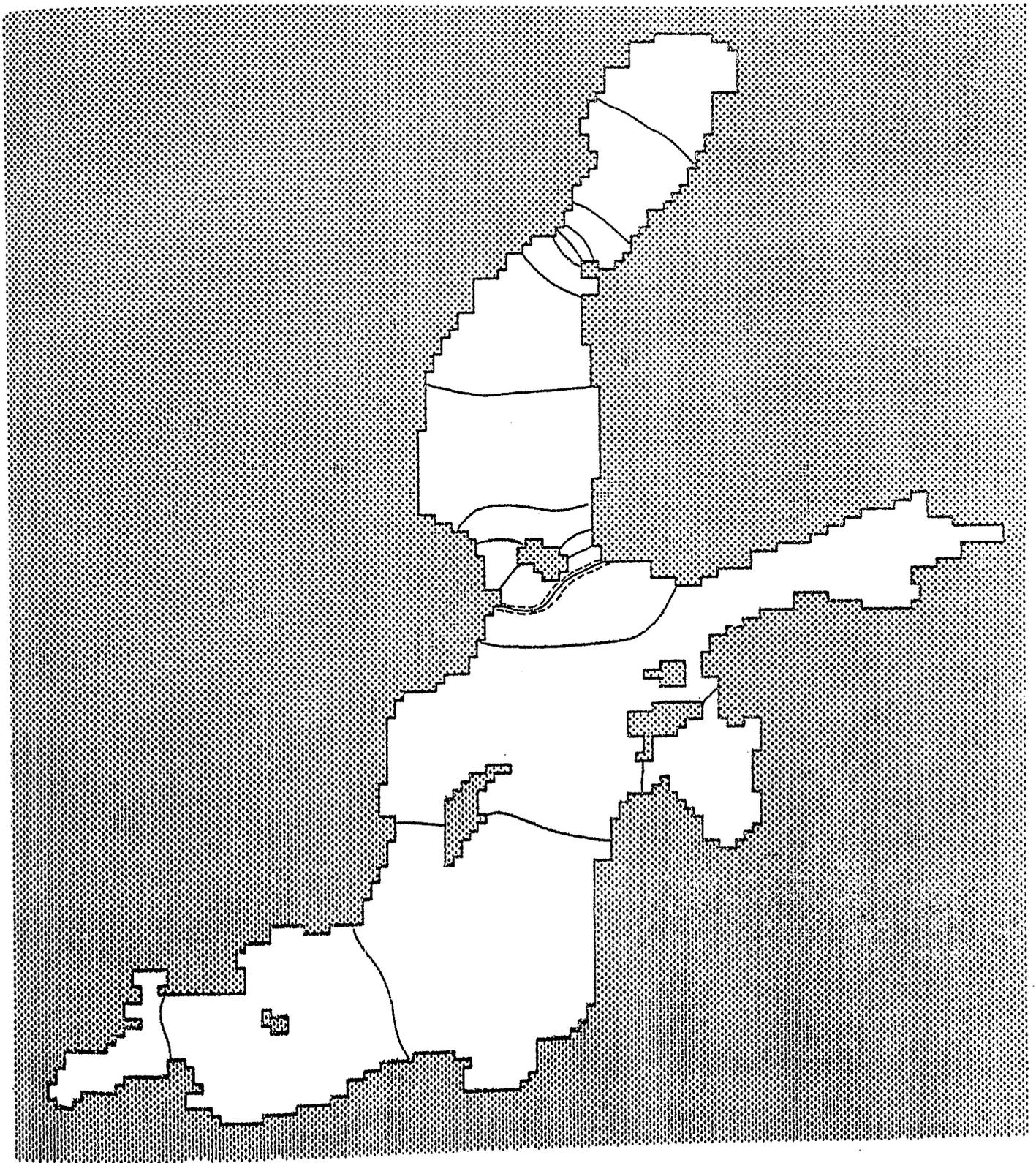


Abb. 13a 1. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=40.55$ h ,
 $f=0$

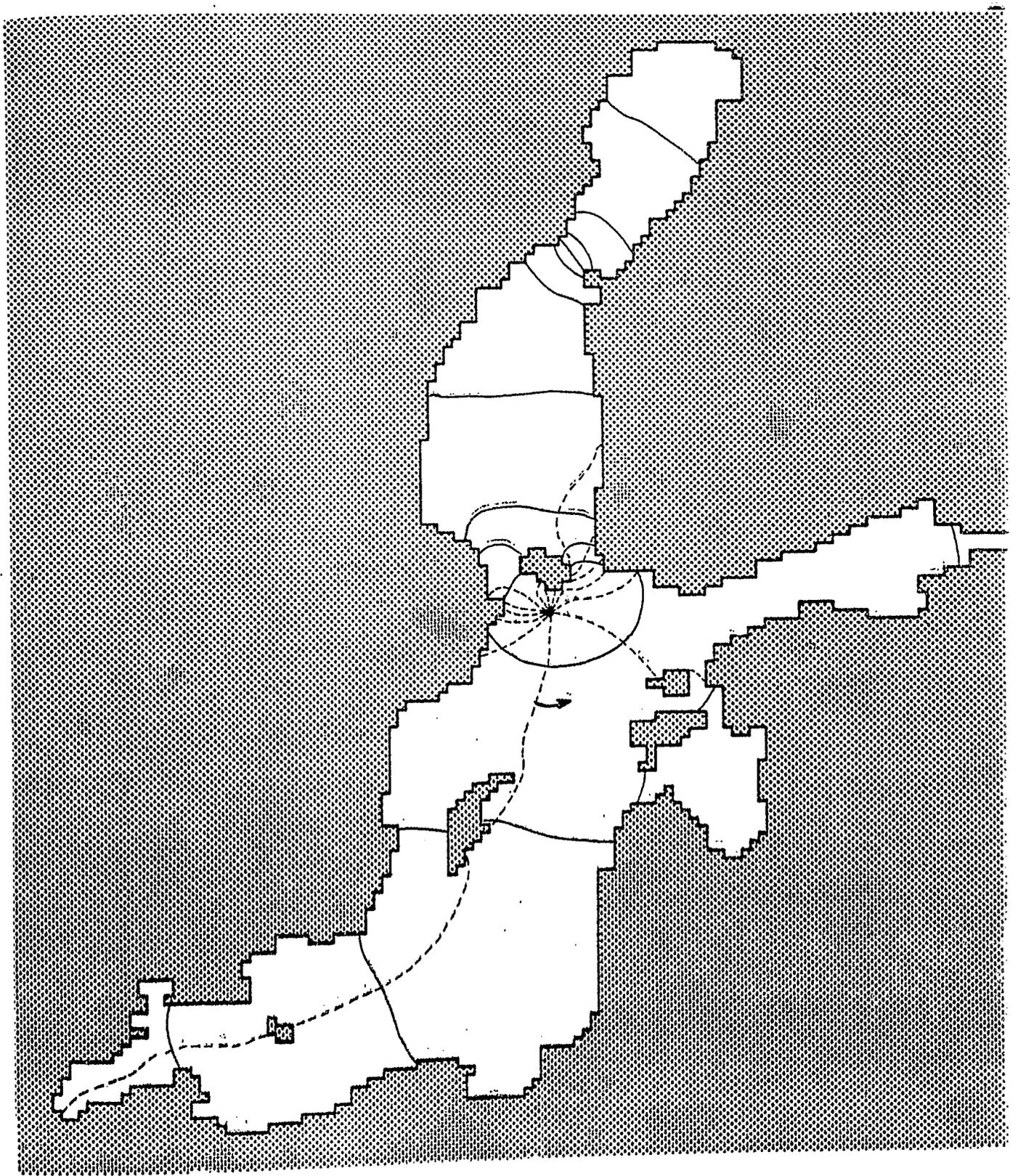


Abb. 13b 1. Schwingungsordnung der Ostsee, $T=39.77$ h ,
 $f=0.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

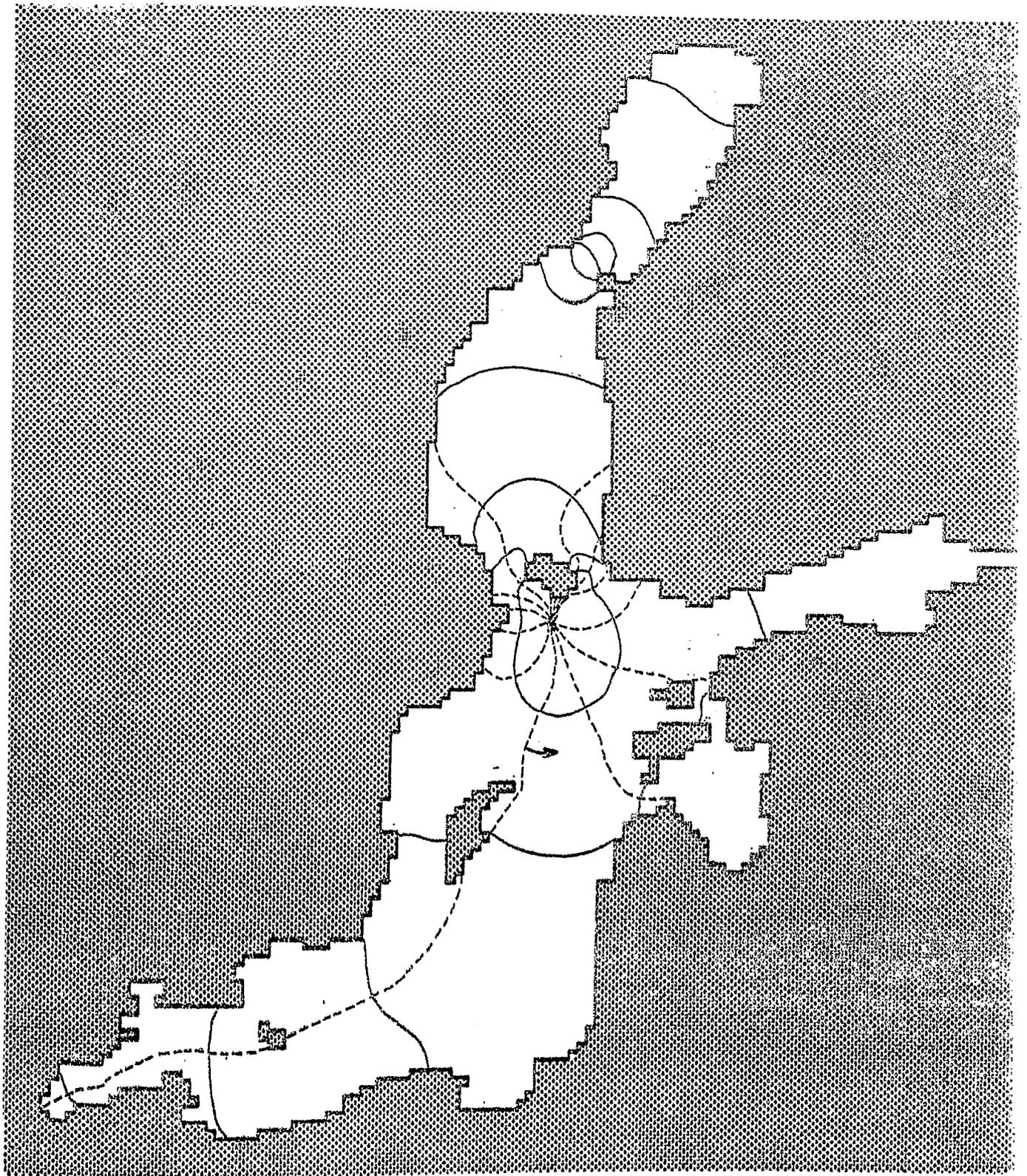


Abb. 13c 1. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=37.58$ h ,
 $f=0.6 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

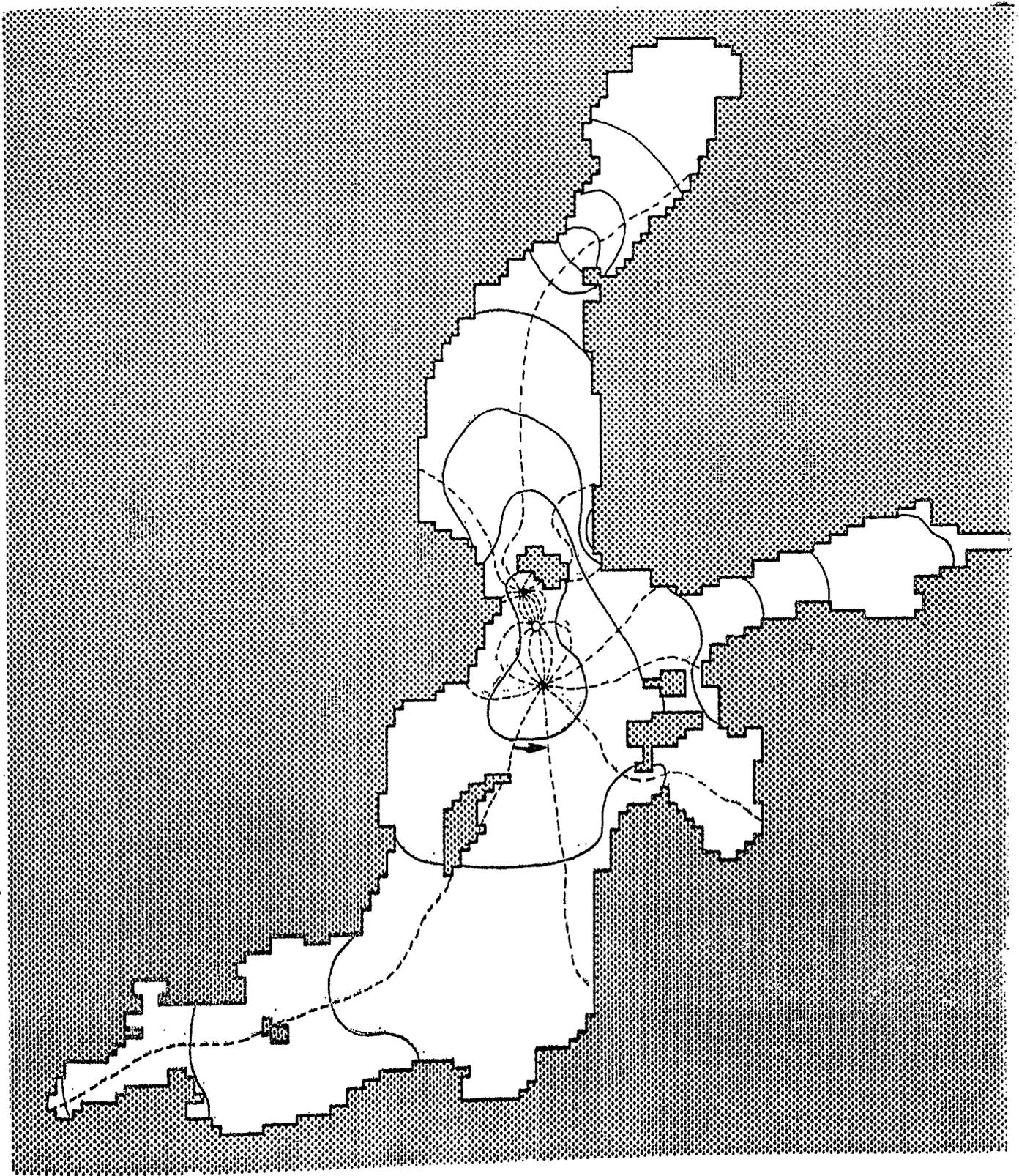


Abb. 13d 1. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=34.42$ h ,
 $f=0.9 \cdot 10^{-4}$ s $^{-1}$

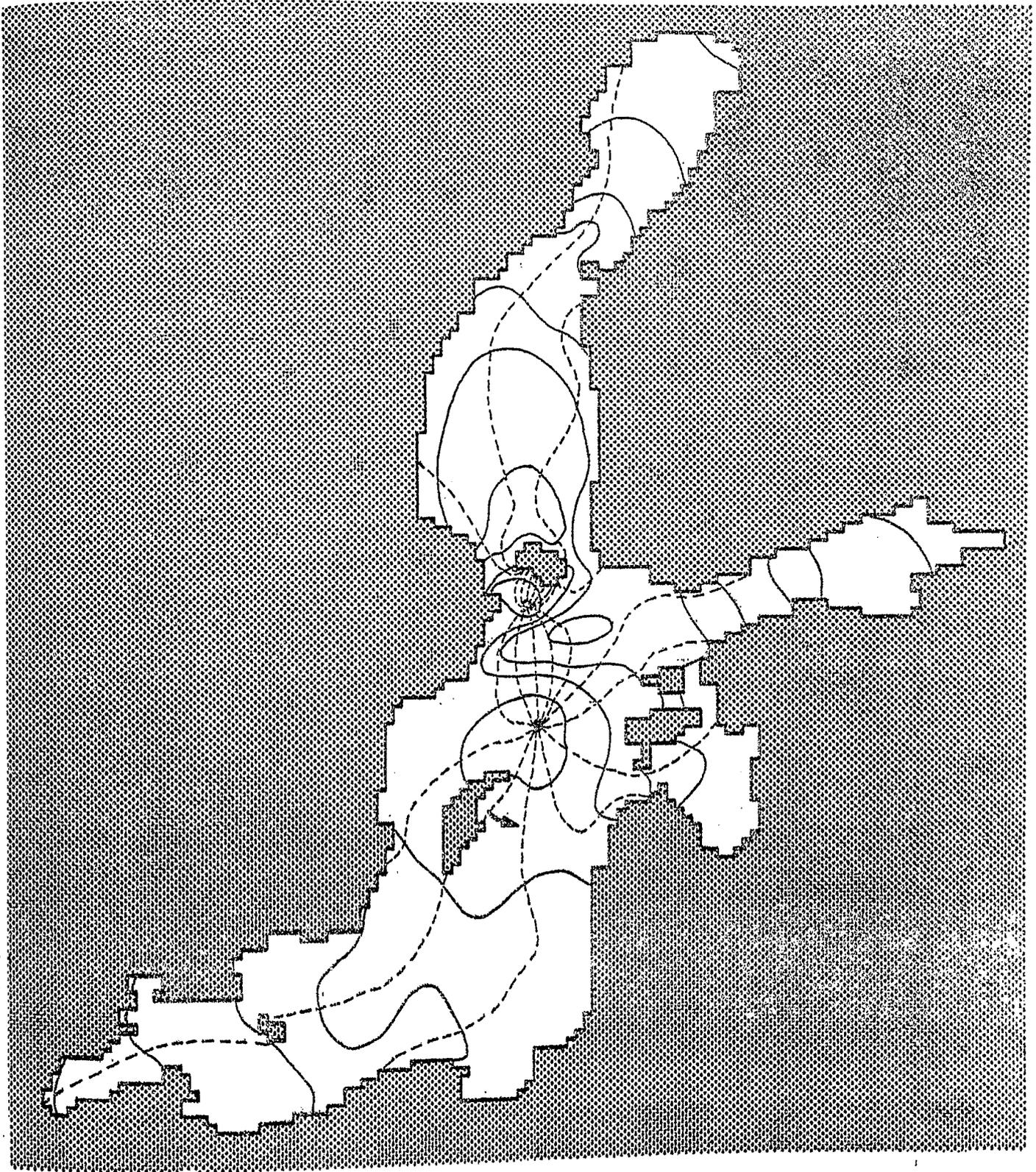


Abb. 13e 1. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=31.03$ h ,
 $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

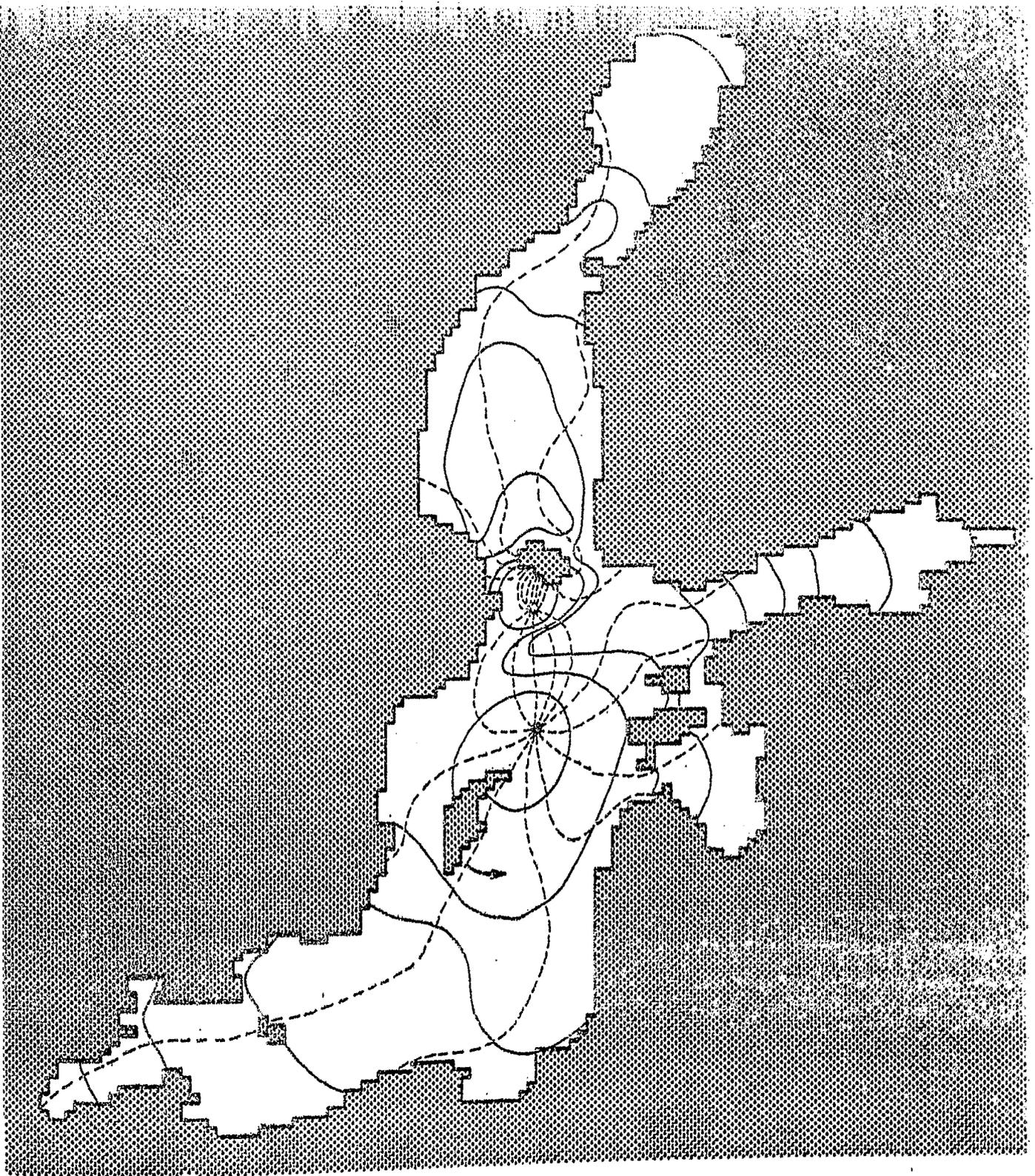


Abb. 13f 1. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 31.03$ h ,
f variabel

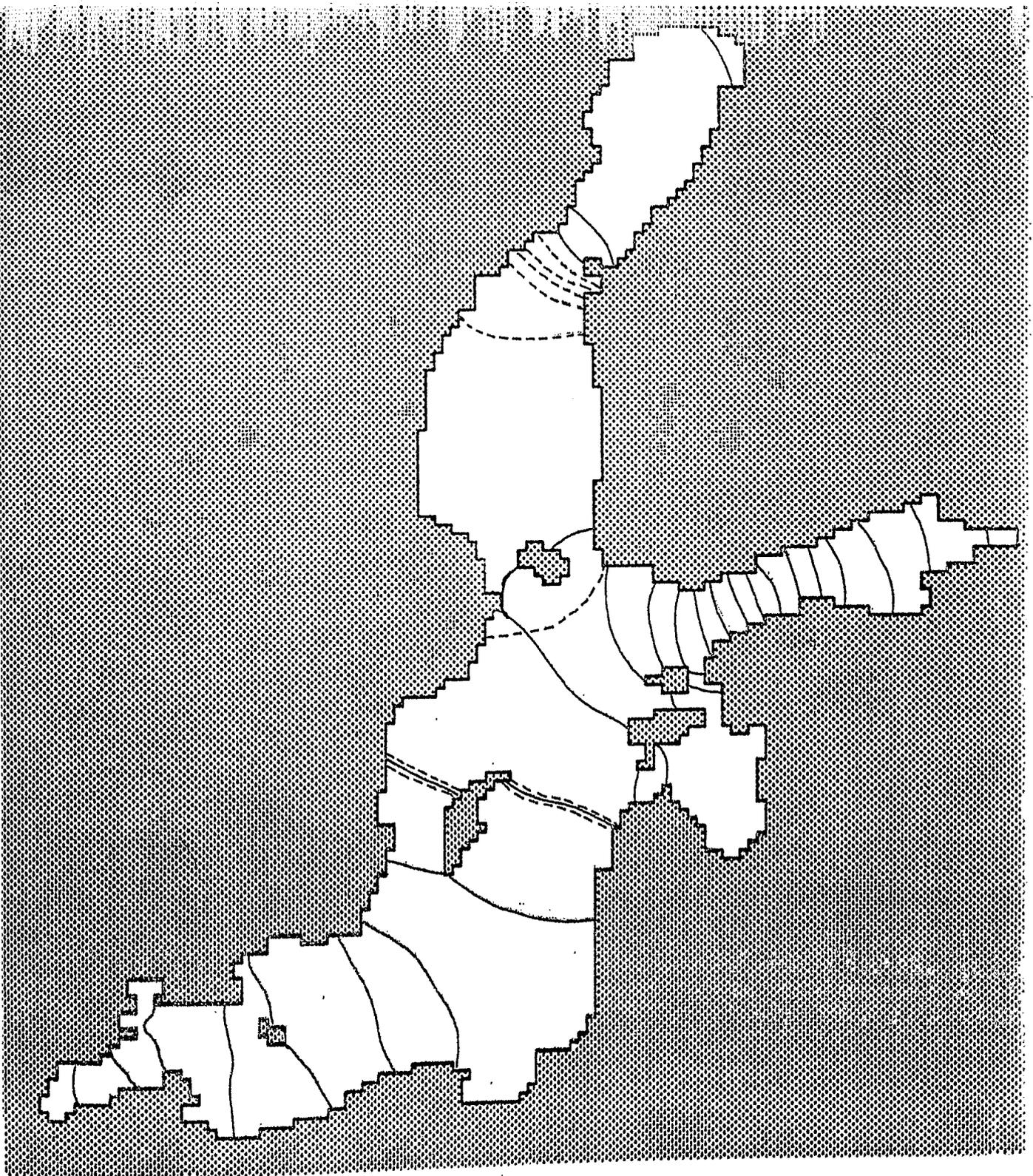


Abb. 14a 2. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 27.67$ h ,
f=0

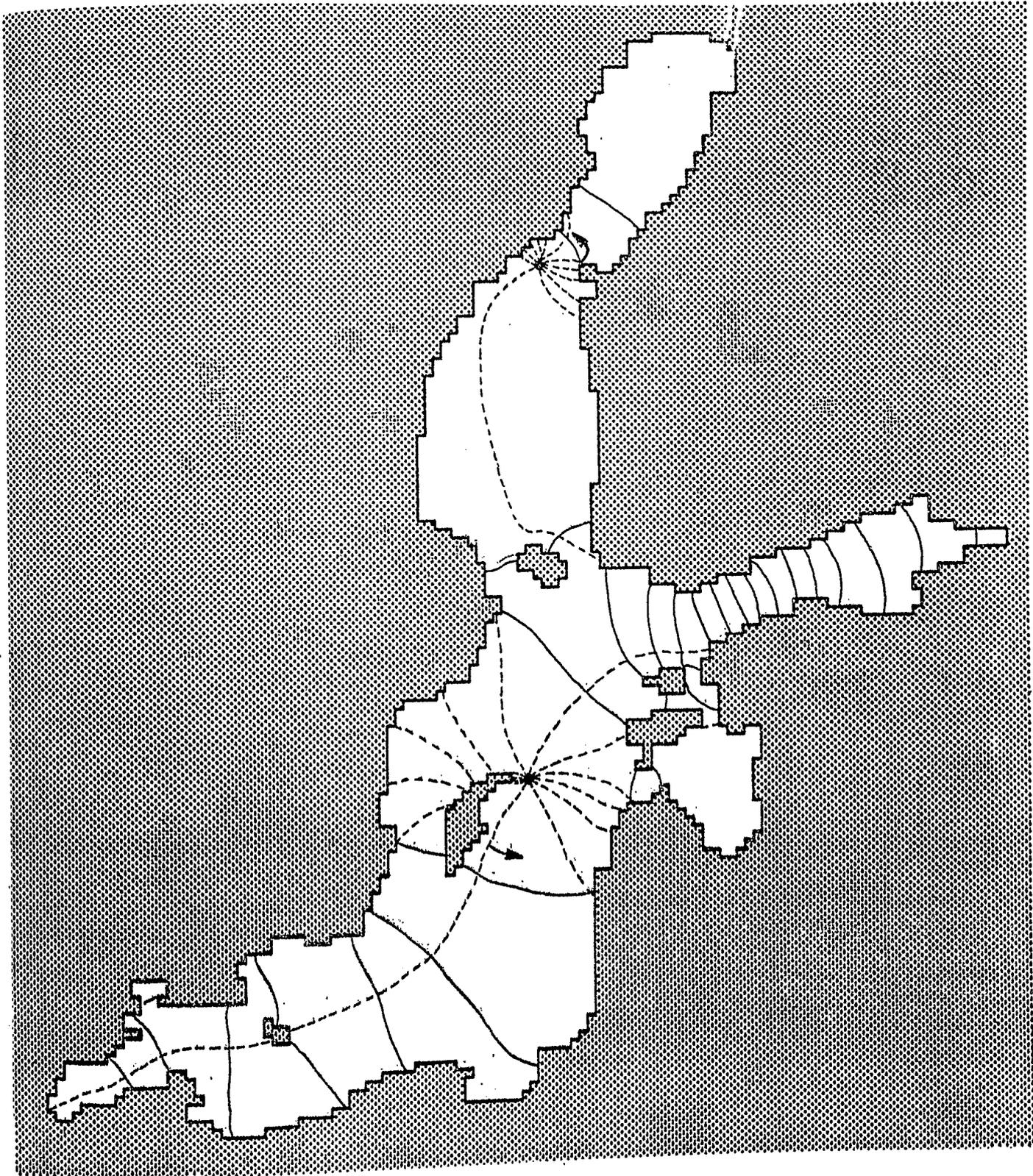


Abb. 14b 2. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=27.67$ h ,
 $f=0.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

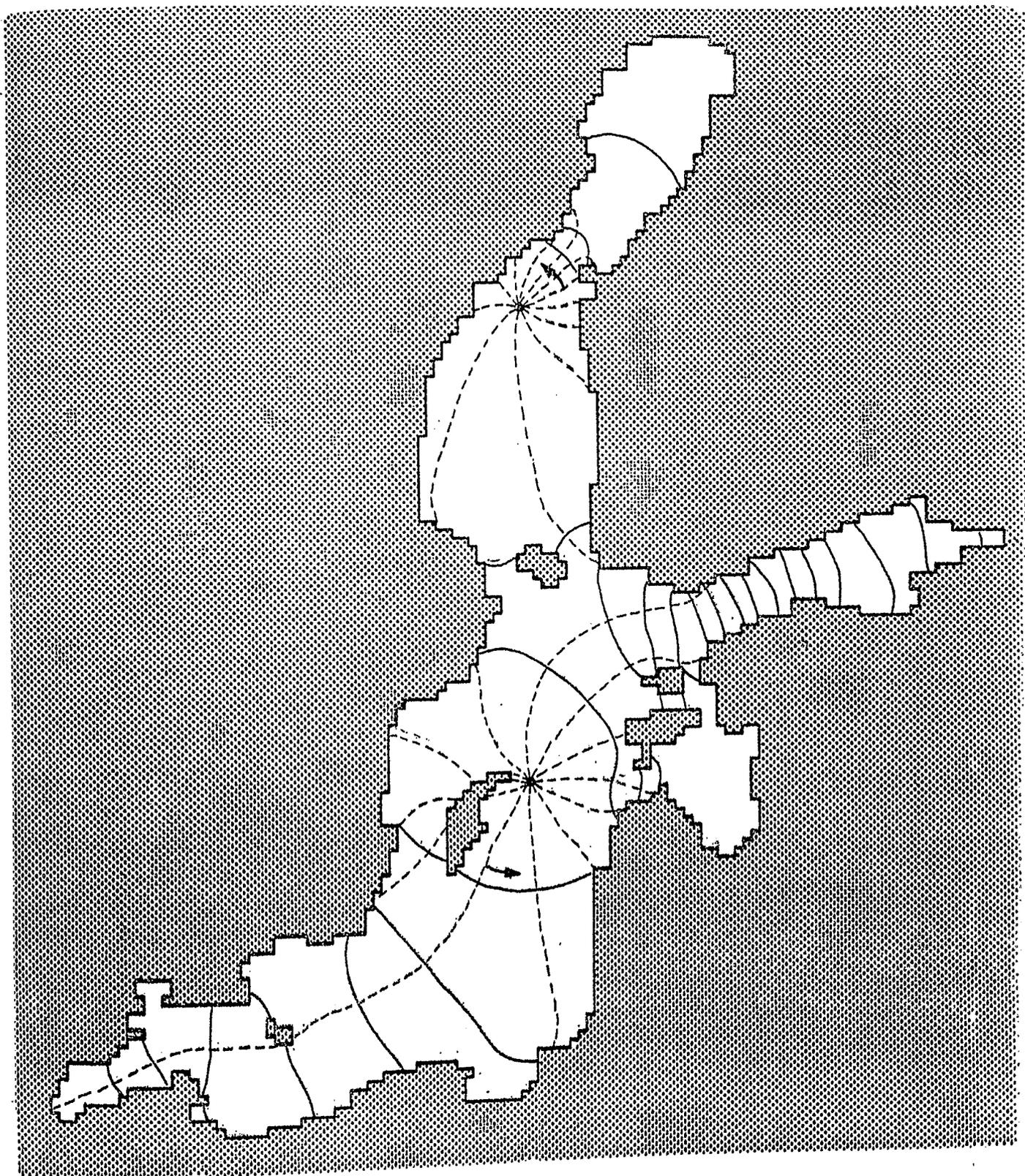


Abb. 14c 2. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 27.49$ h ,
 $f = 0.6 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

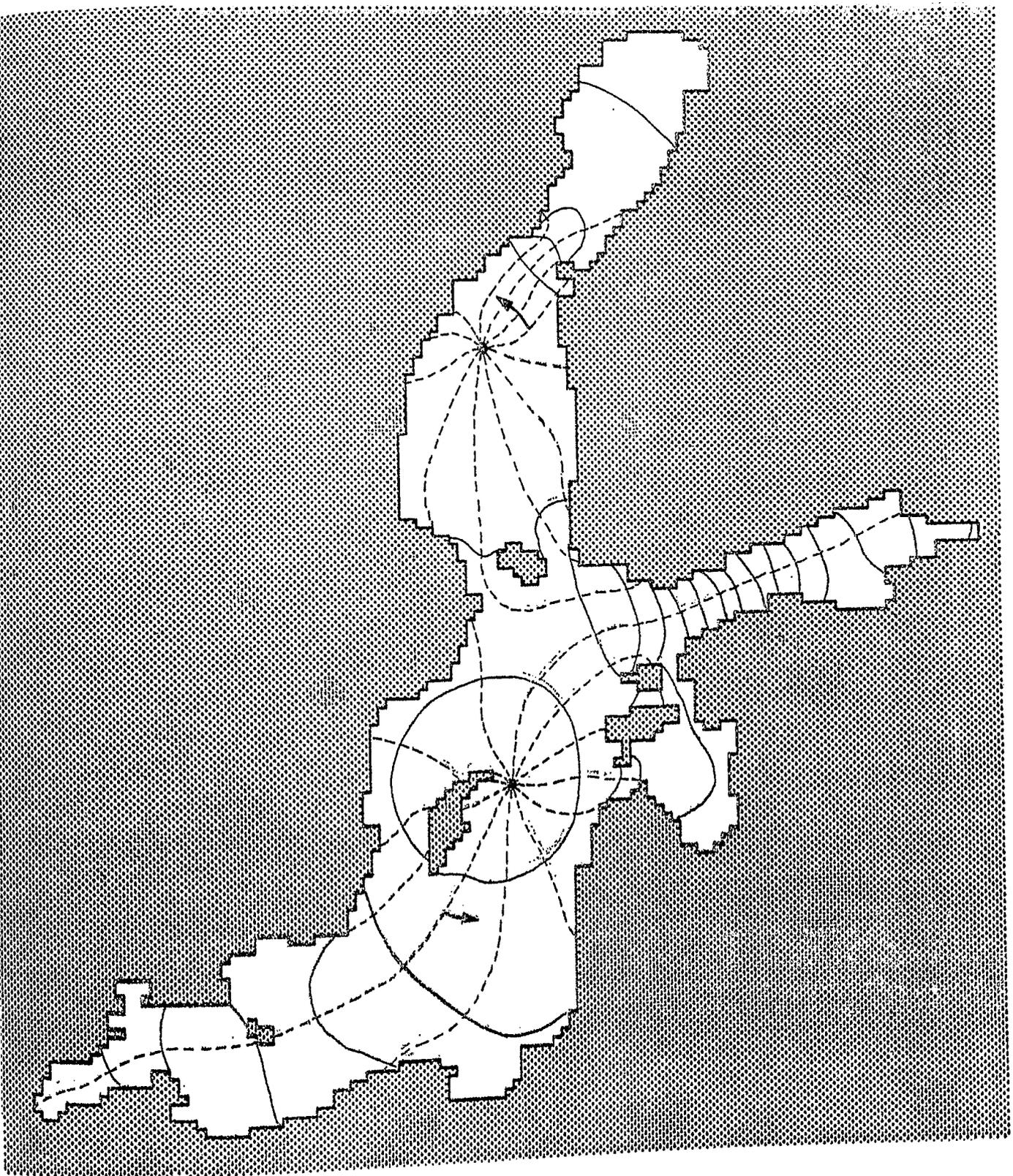


Abb.14d 2. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=27.31$ h ,
 $f=0.9 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

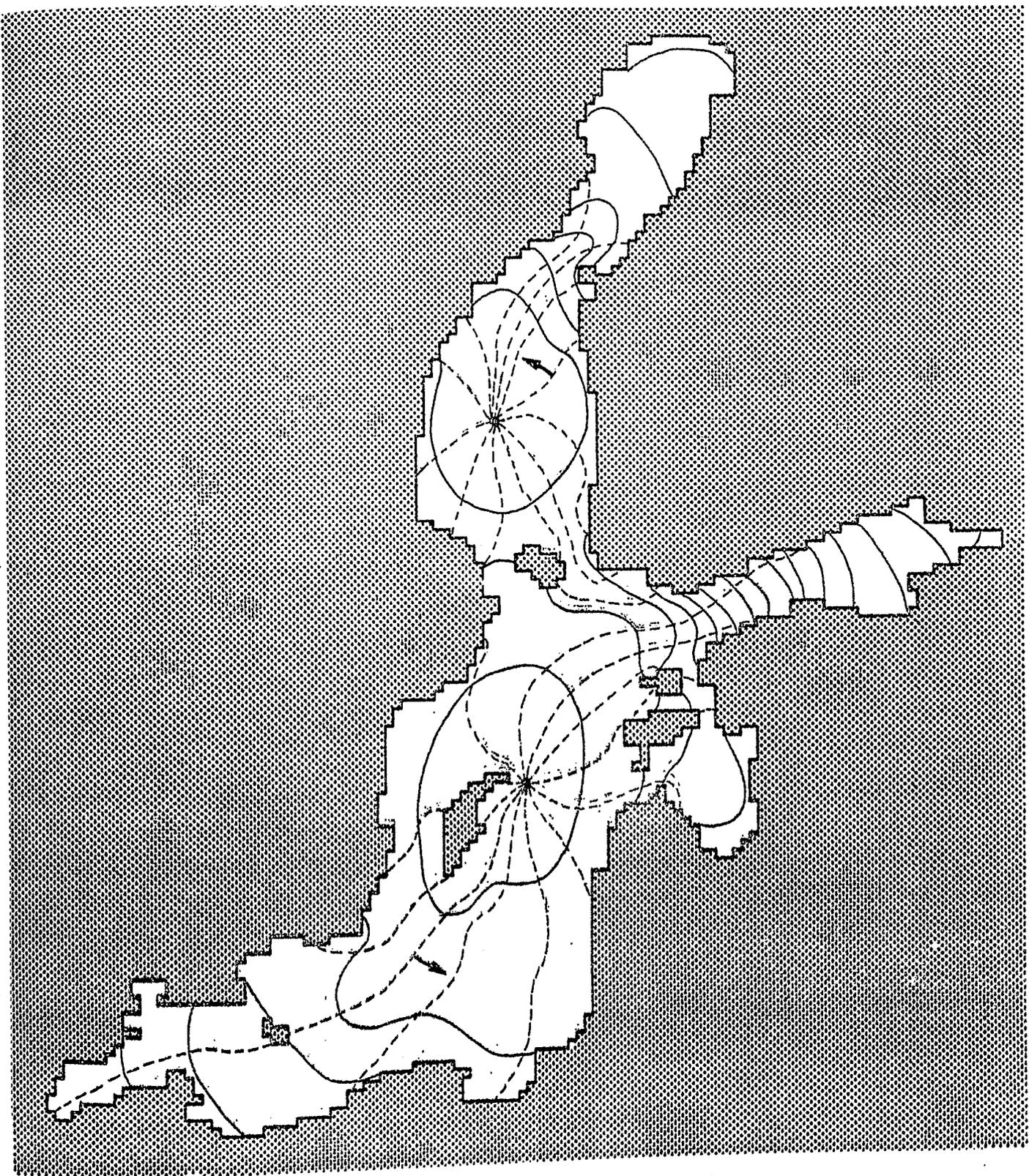


Abb. 14e 2. Schwingungsordnung der Ostsee, $T=26.77$ h ,
 $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

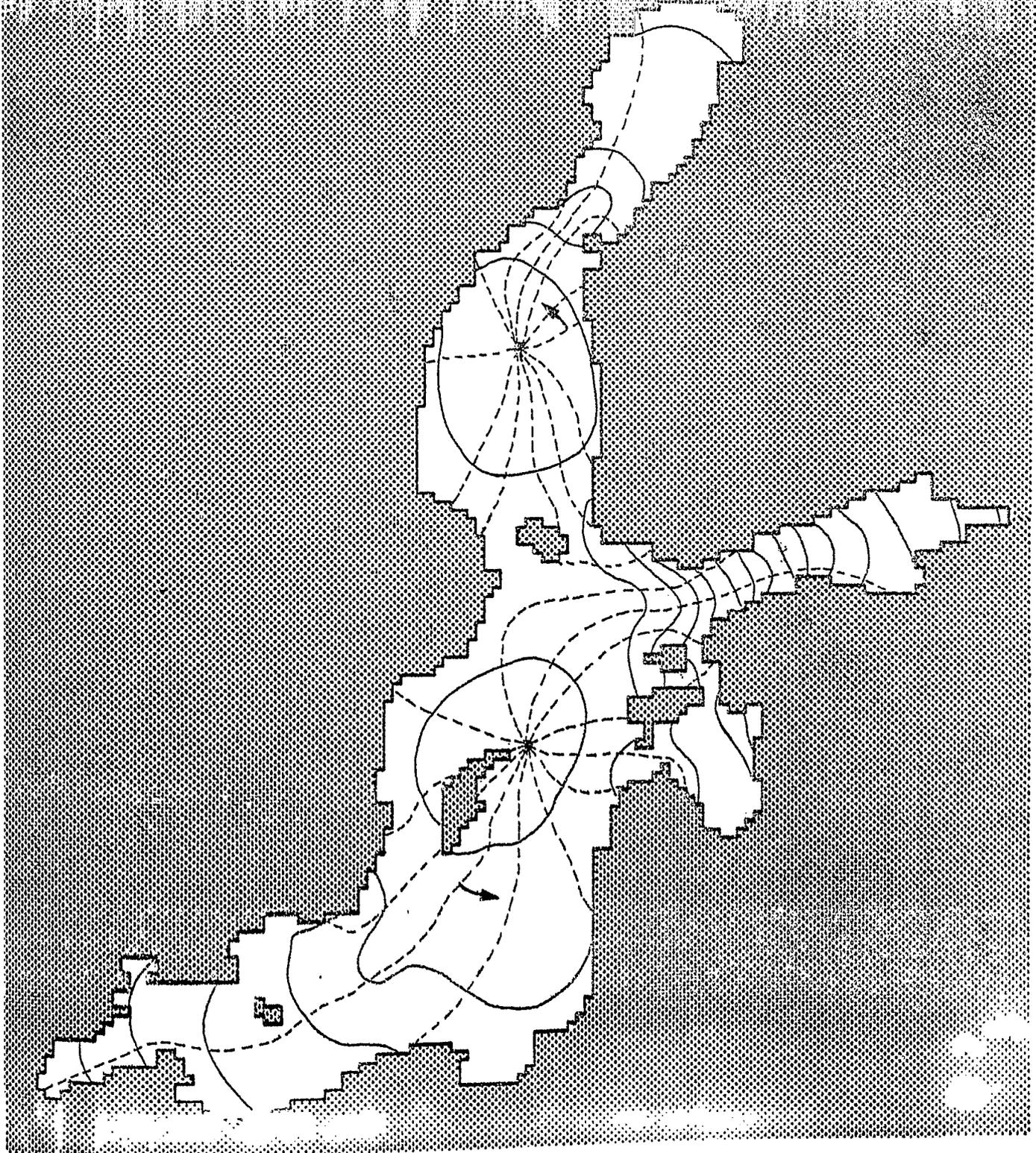


Abb. 14f 2. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 26.42 \text{ h}$,
f variabel

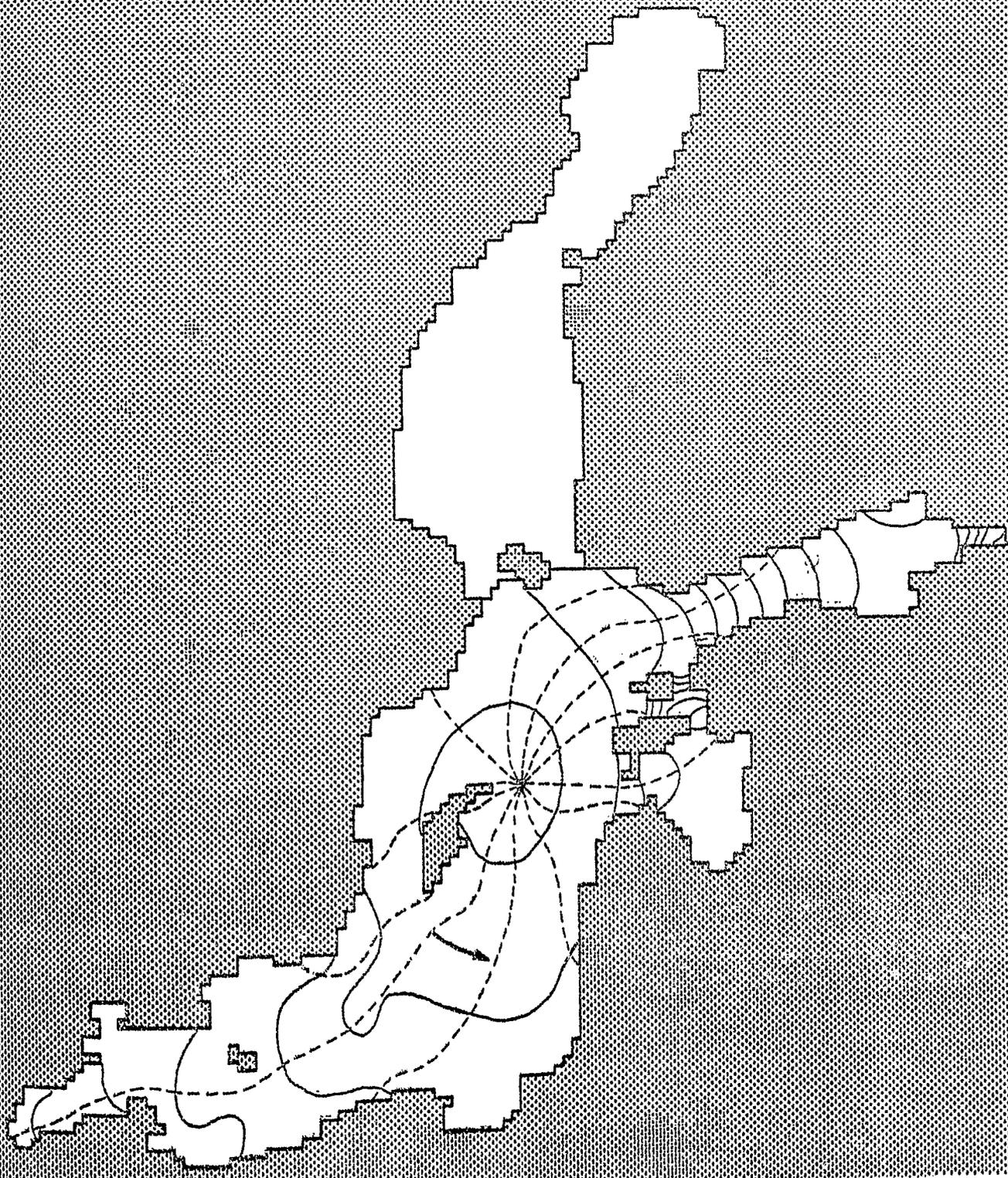


Abb. 14g Vergleichslösung im System Ostsee - Finnischer Meerbusen zur 2. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=27.68$, $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

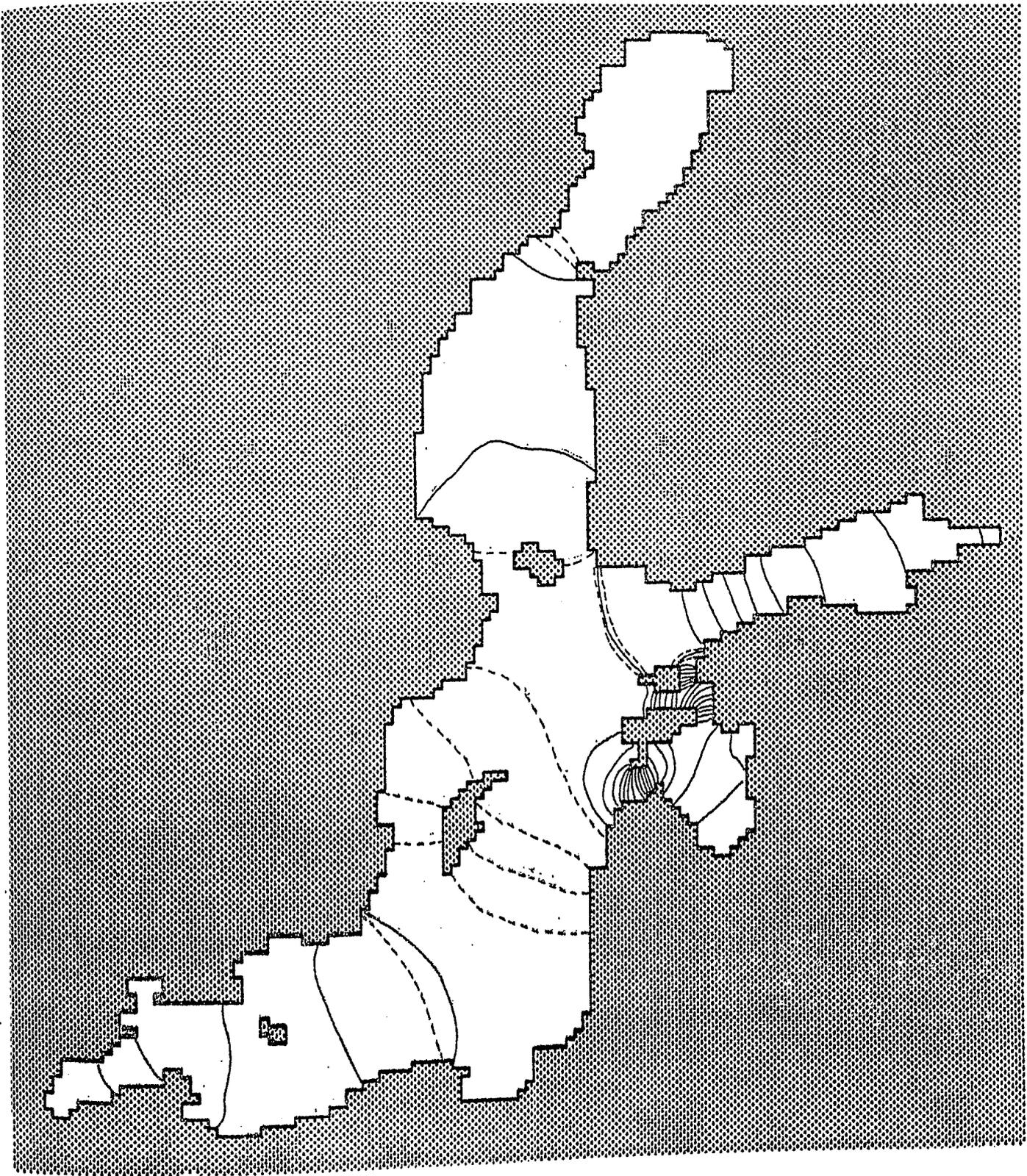


Abb. 15a 3. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=23.67$ h ,
 $f=0$

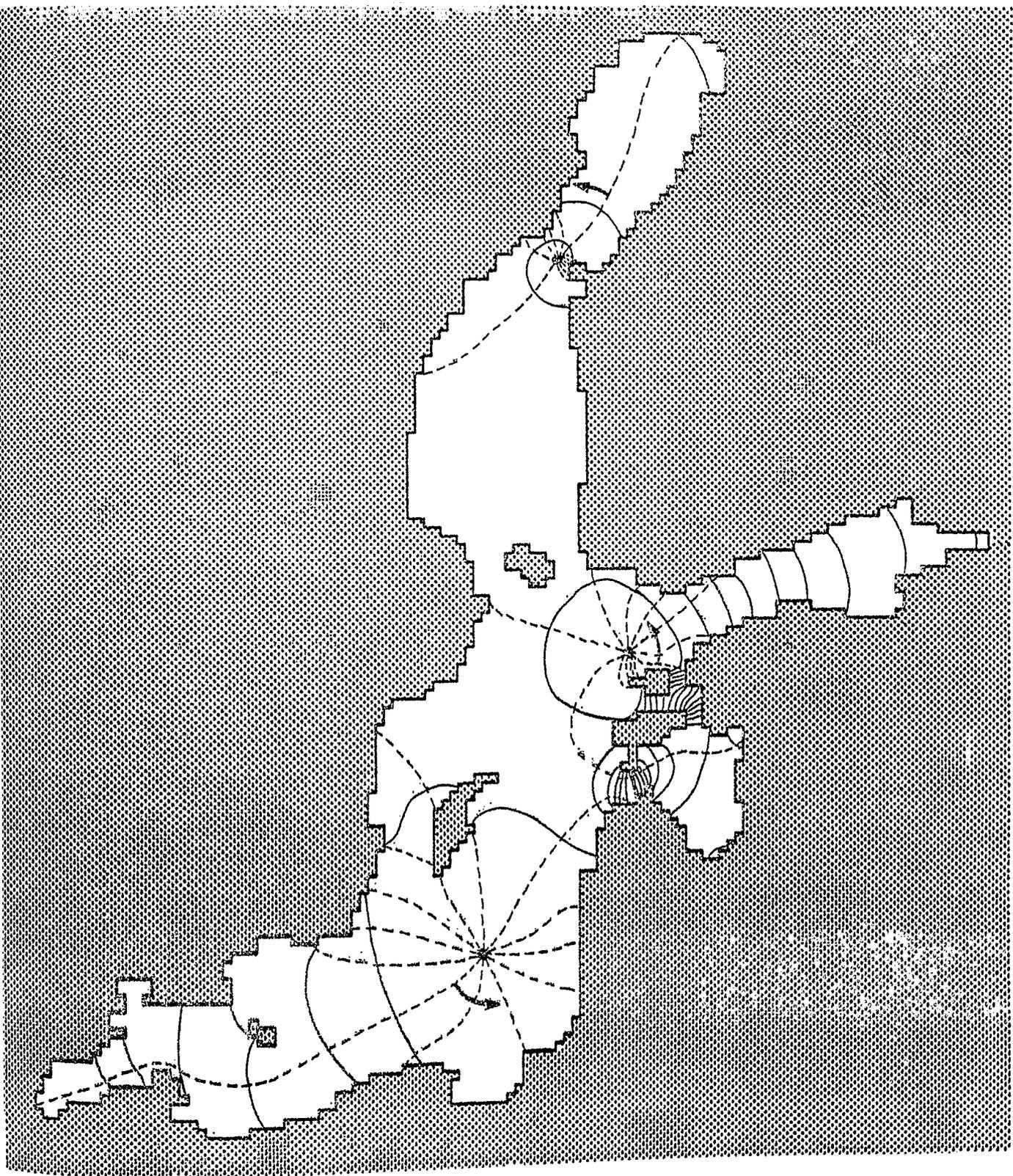


Abb. 15b 3. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 23.54 \text{ h}$,
 $f = 0.6 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

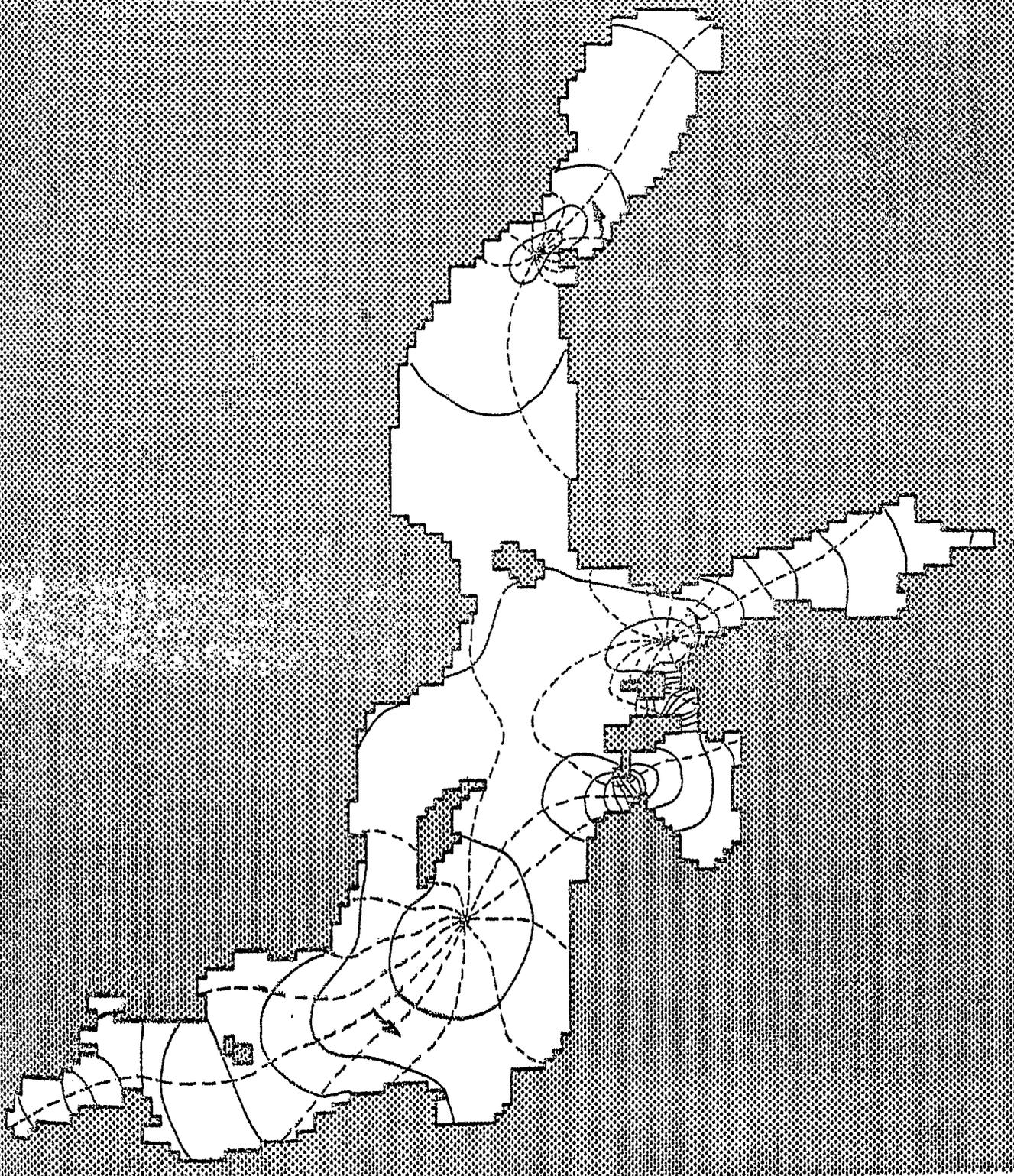


Abb. 15c 3. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 22.38 \text{ h}$,
 $f = 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

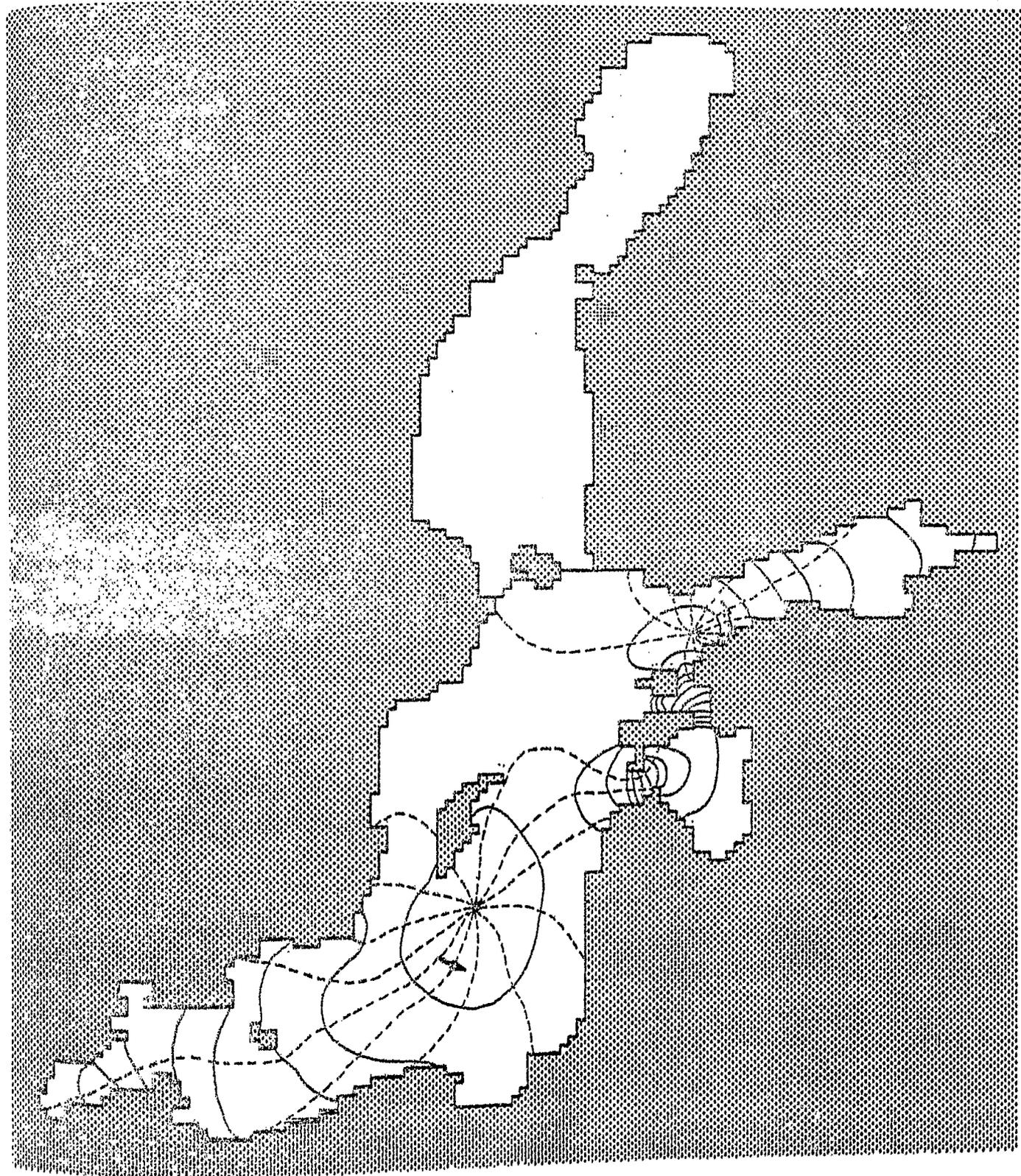


Abb. 154 Vergleichslösung im System Ostsee - Finnischer
Meerbusen zur 3. Schwingungsordnung der Ostsee,
 $\gamma=23.81$, $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

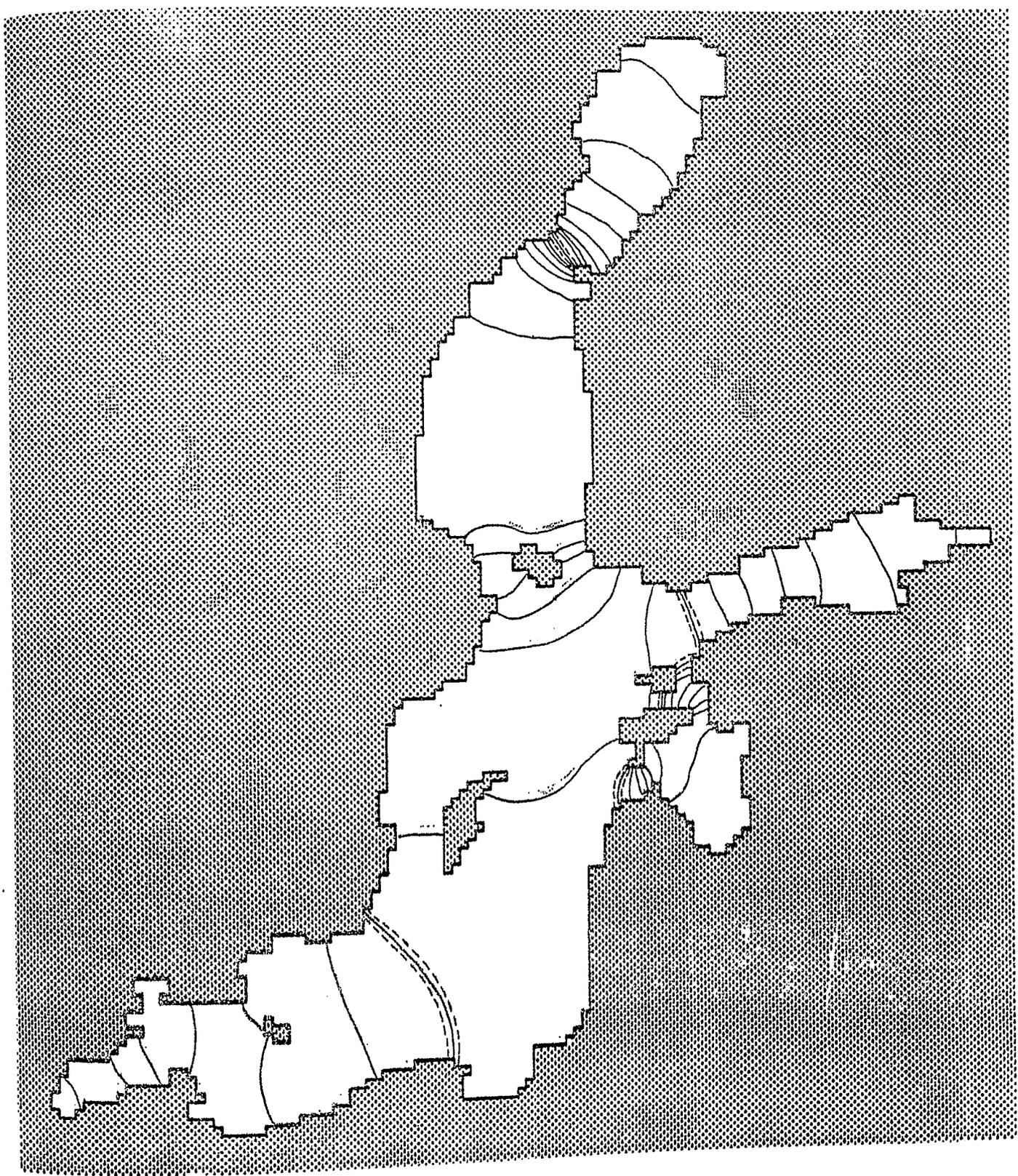


Abb. 16a 4. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=21.44$ h ,
 $\bar{\tau}=0$

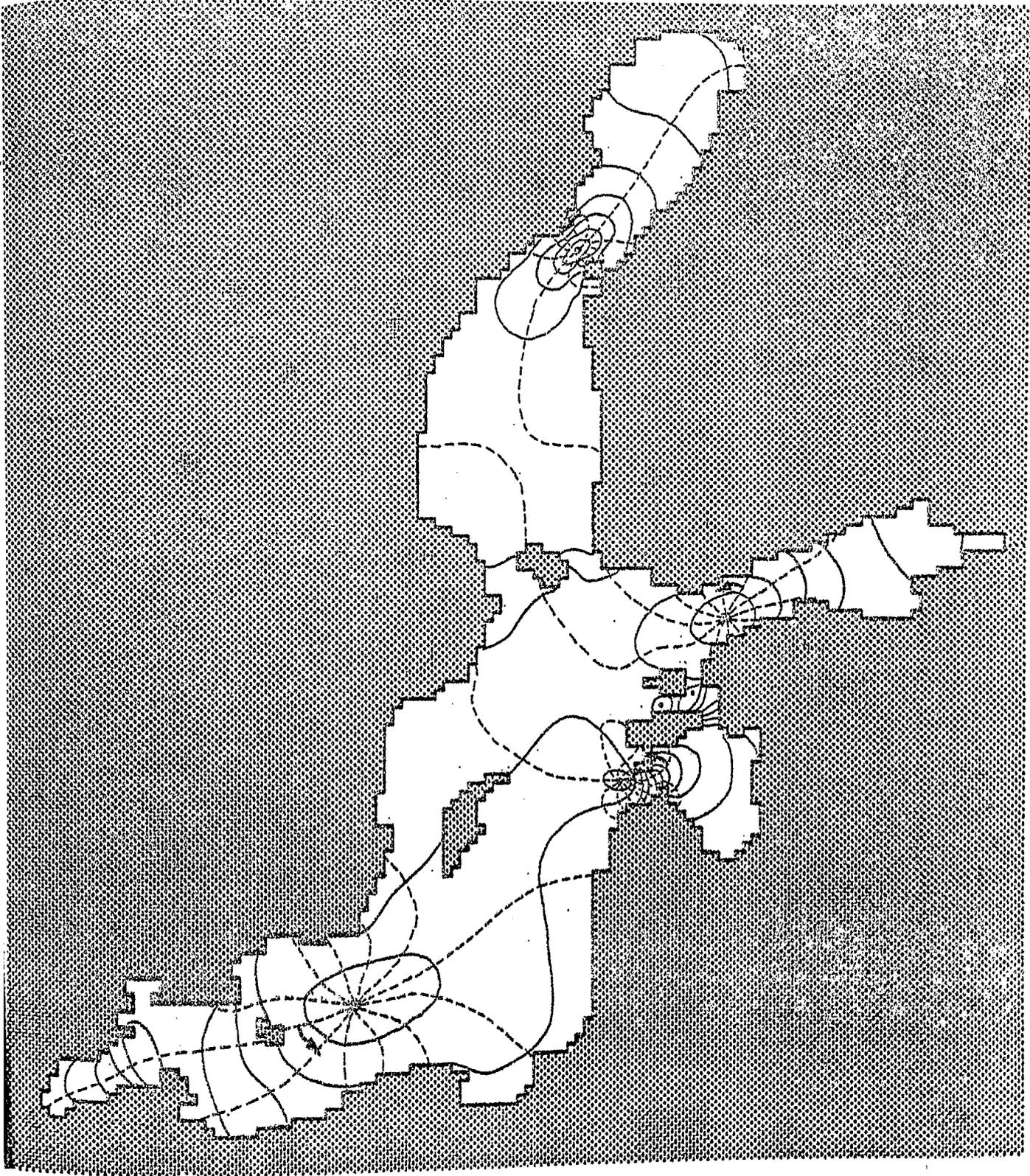


Abb. 16b 4. Schwingungsordnung der Ostsee, $z = 19.79 \text{ h}$,
 $f = 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

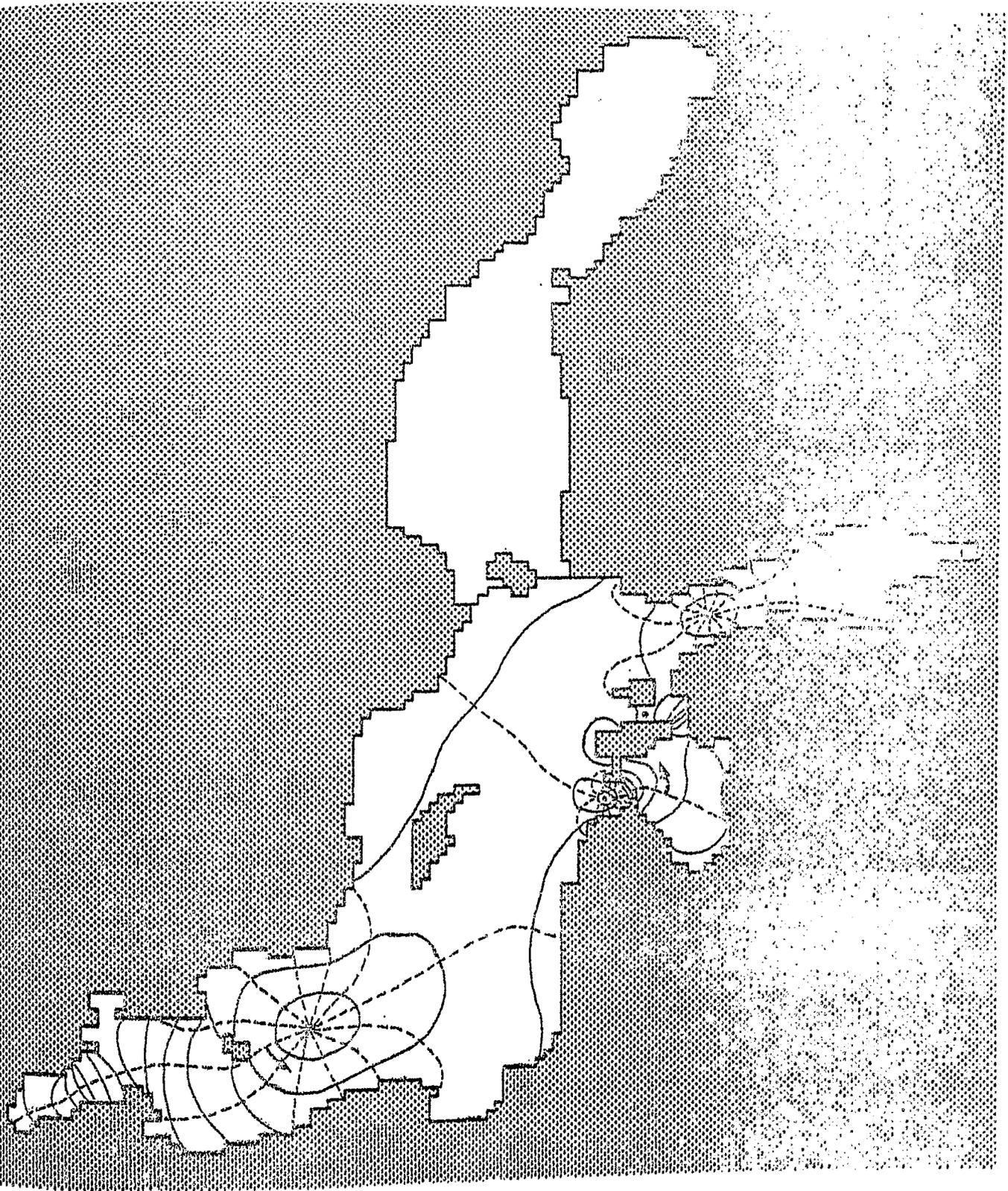


Abb. 16c Vergleichslösung im System Ostsee - Finnland mit
Meerbusen zur 4. Schwingungsordnung der Ostsee.
 $\tau=18.62 \text{ h}$, $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

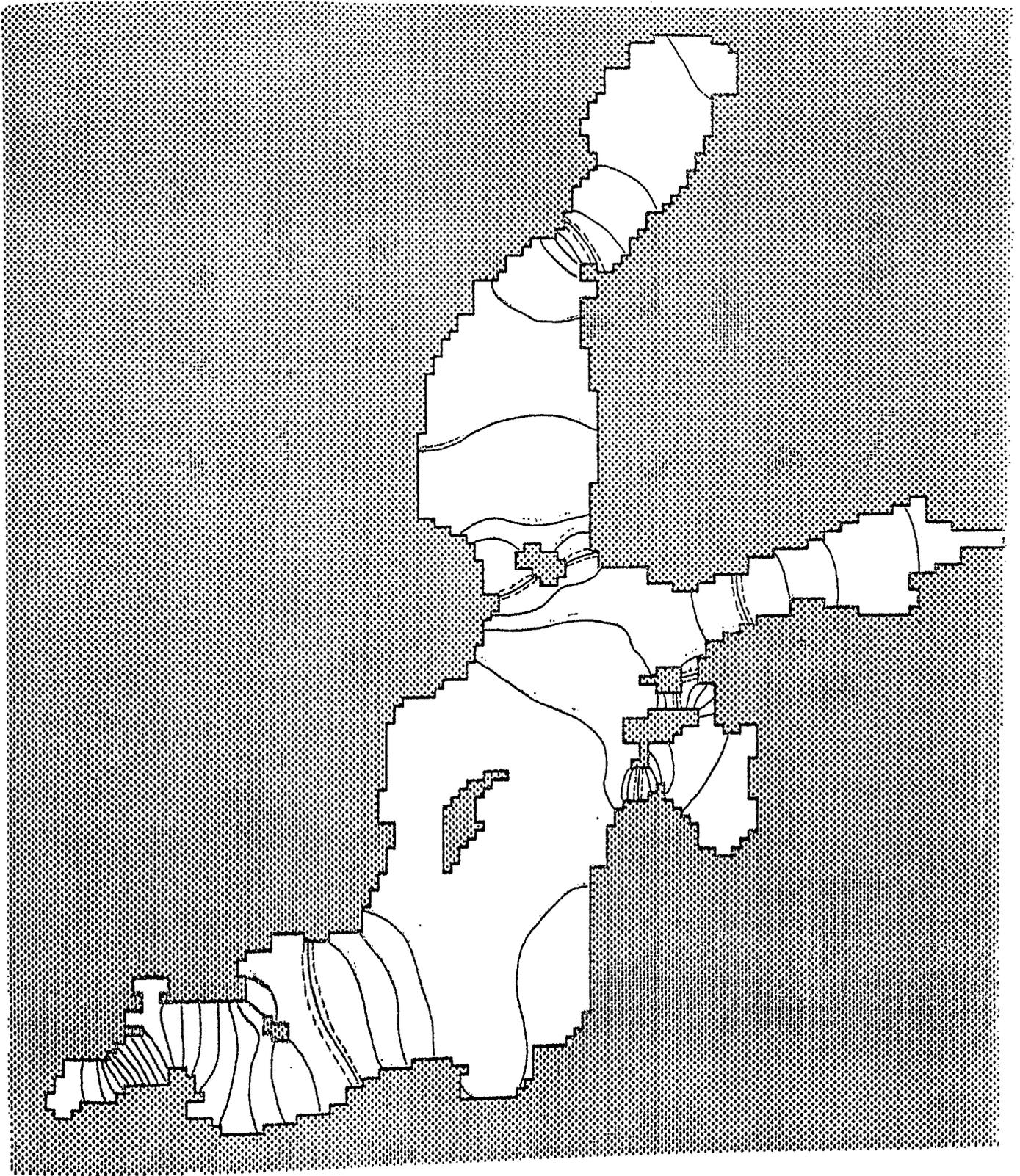


Abb. 17a 5. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 17.88$ h ,
 $f = 0$

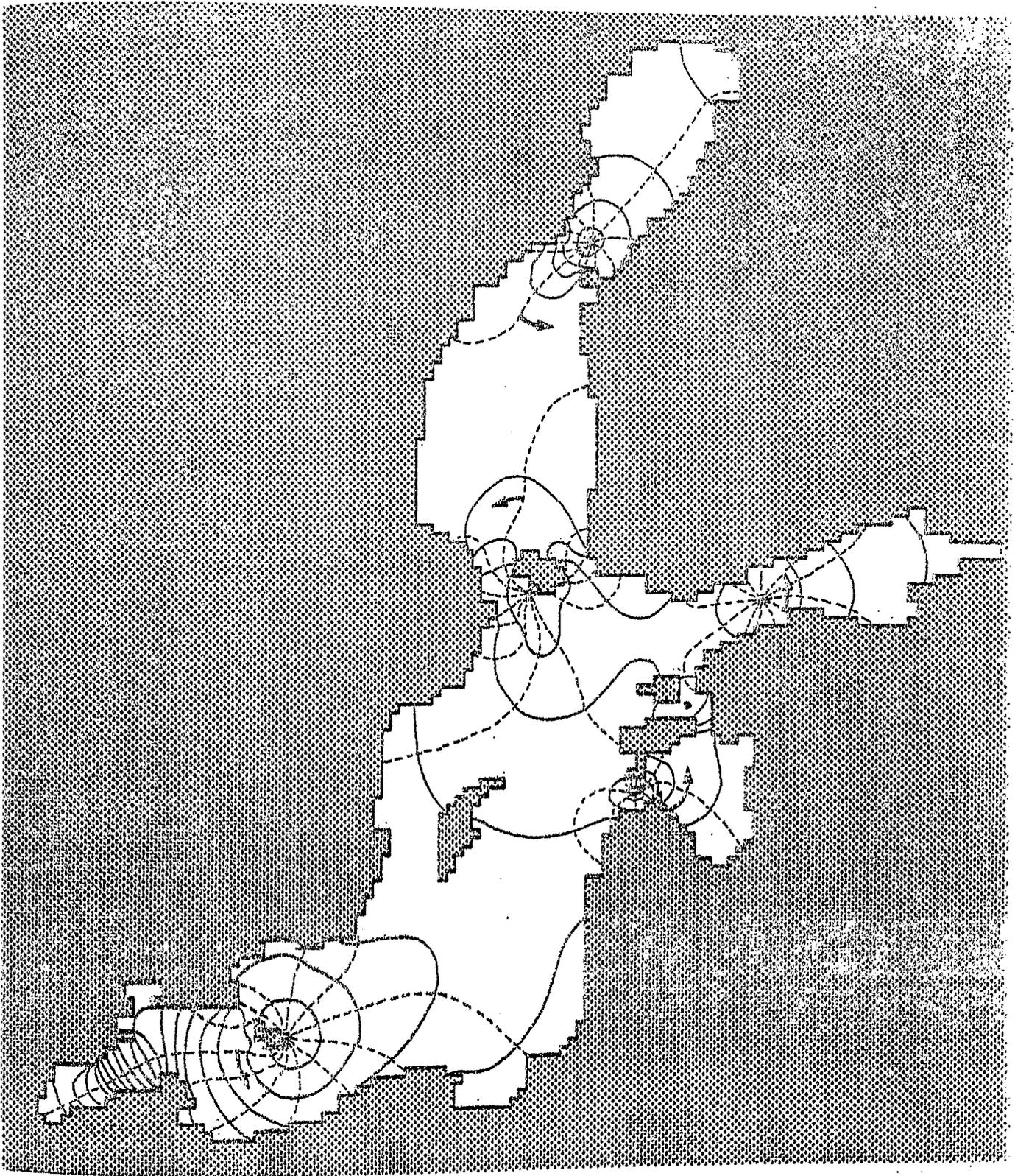


Abb. 17b 5. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=17.07$ h ,
 $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

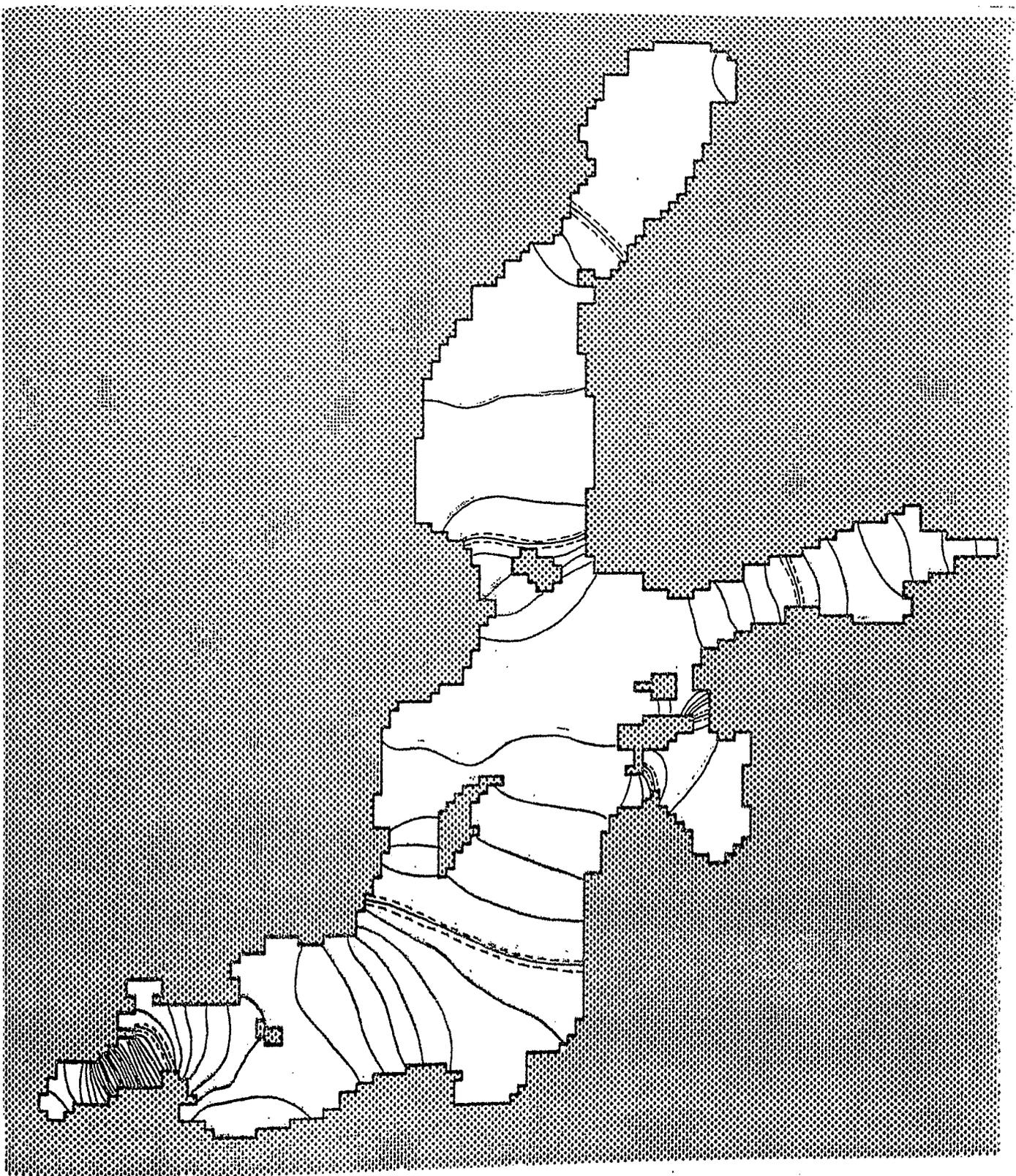


Abb. 18a 6. Schwingungsordnung der Ostsee; $\tau = 13.01$ h ,
 $f = 0$

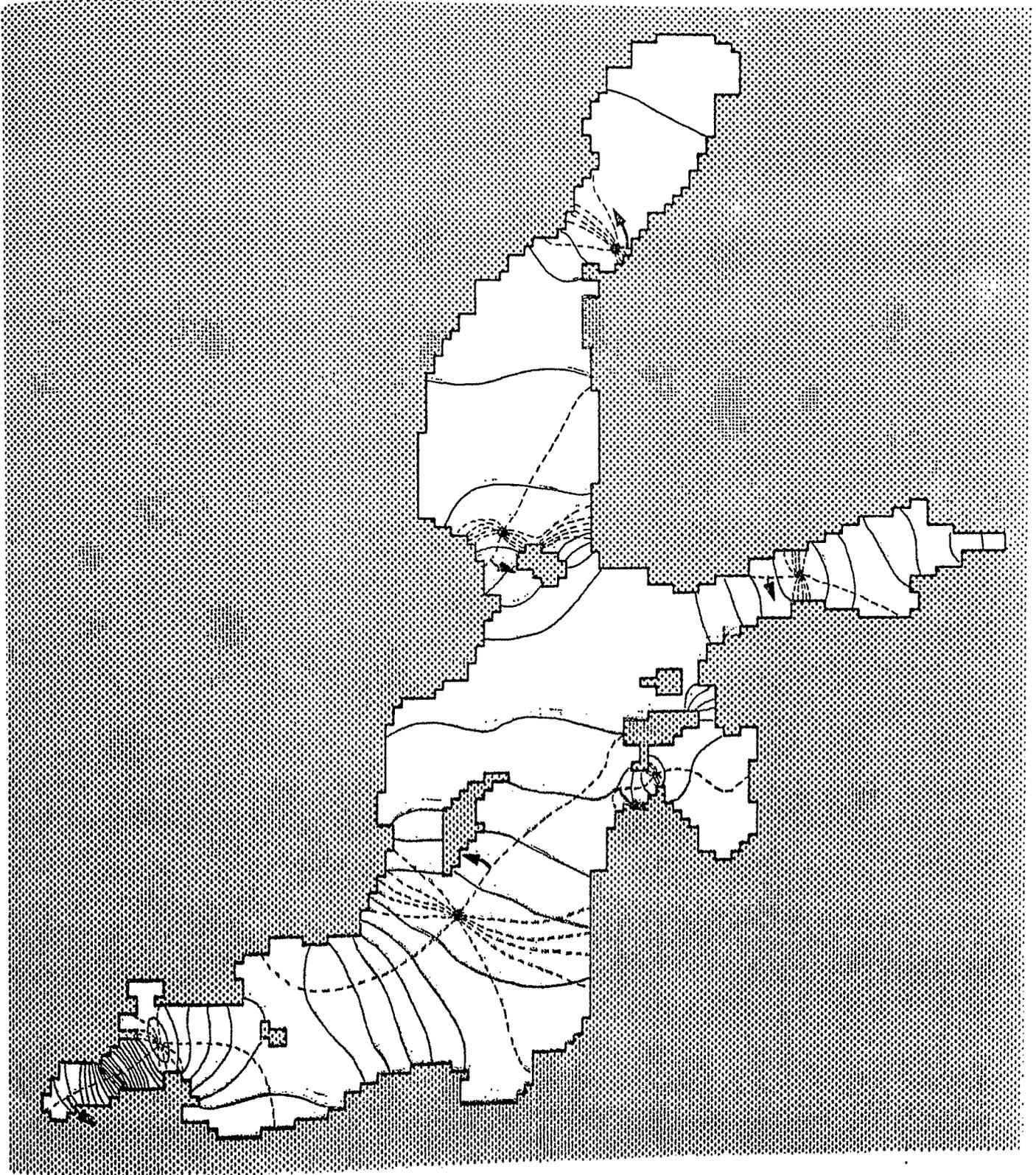


Abb. 18b 6. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 13.01 \text{ h}$,
 $f = 0.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

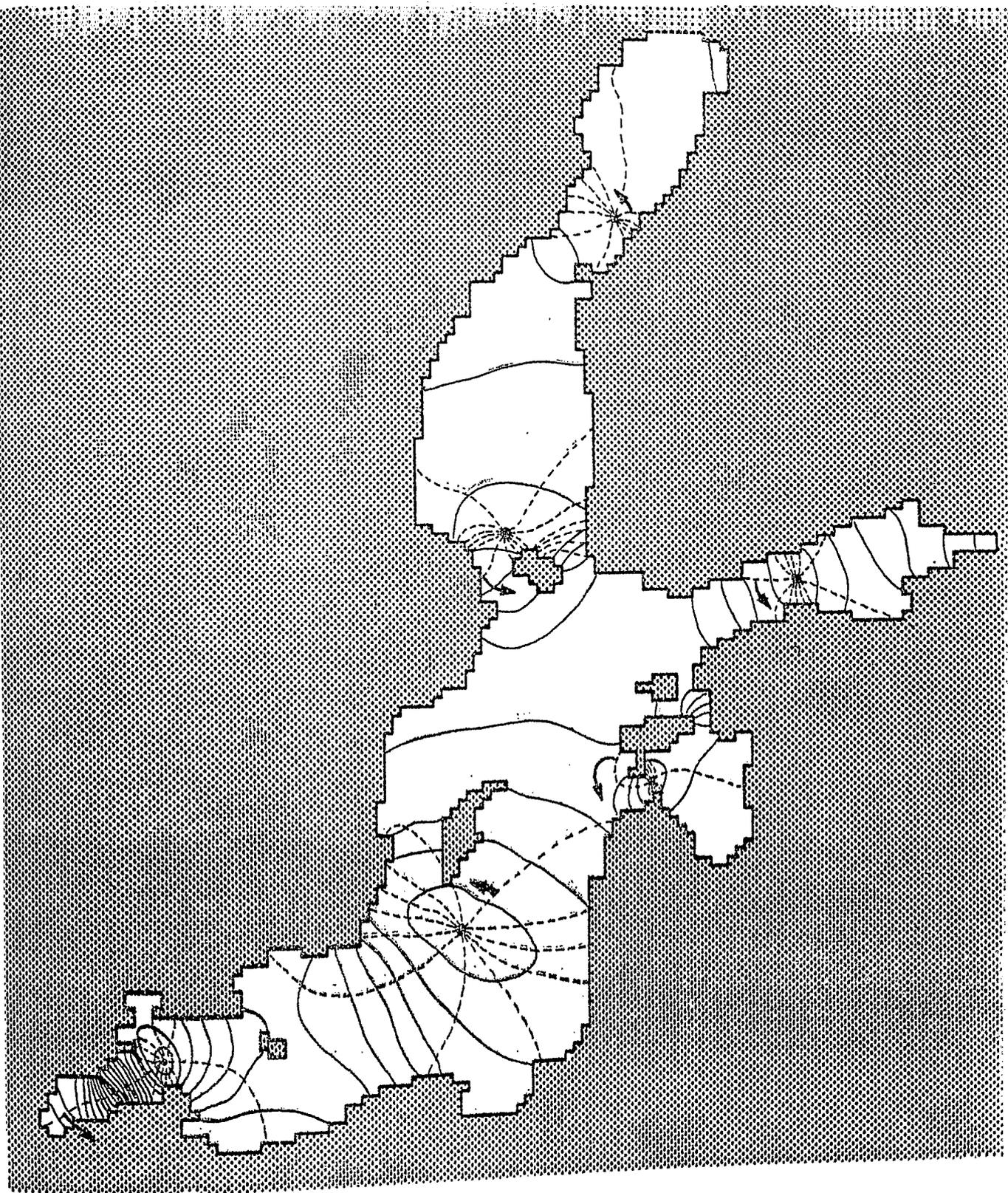


Abb. 18c 6. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=13.01$ h ,
 $f=0.6 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

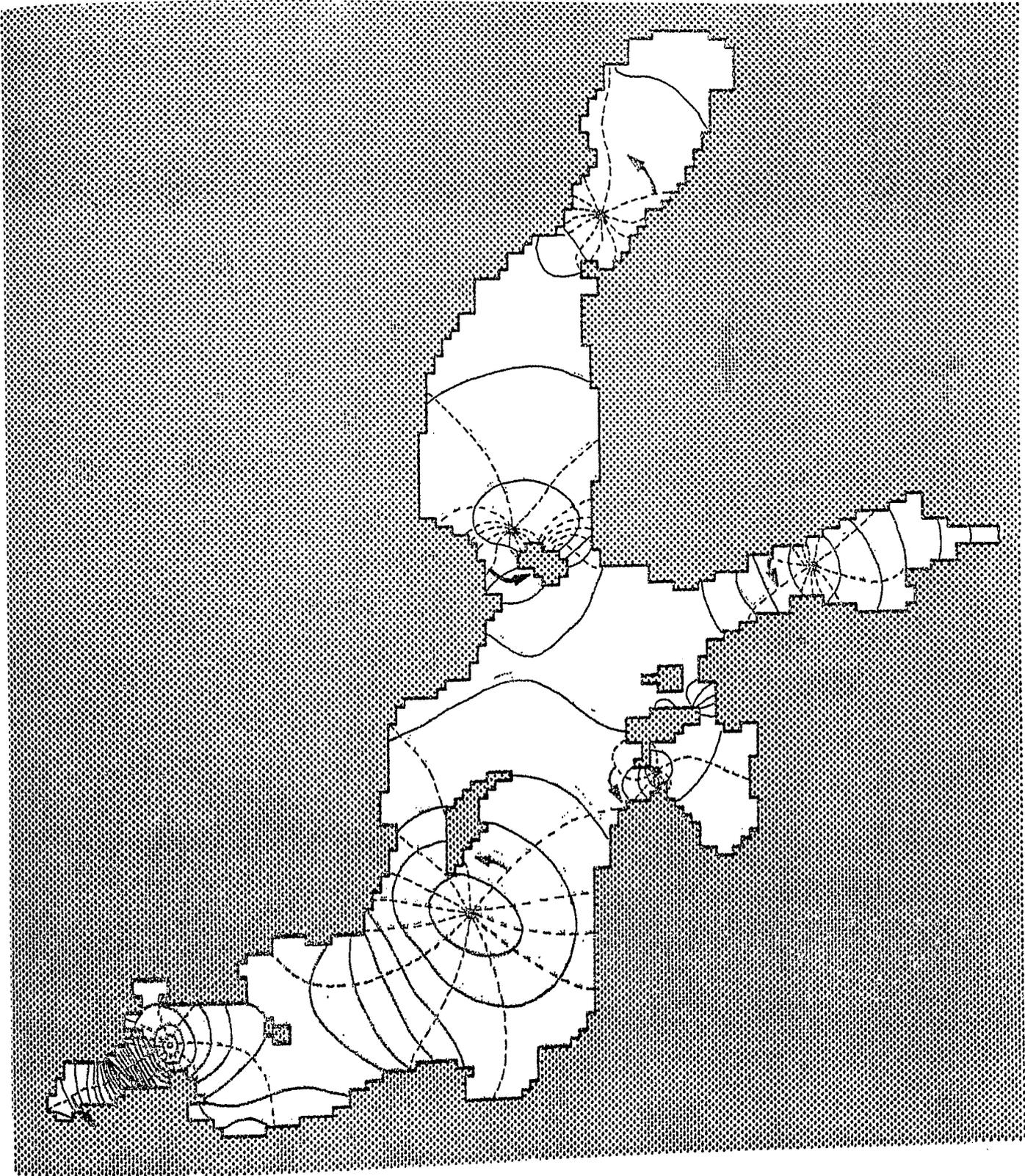


Abb. 18d 6. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 13.04 \text{ h}$,
 $f = 0.9 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

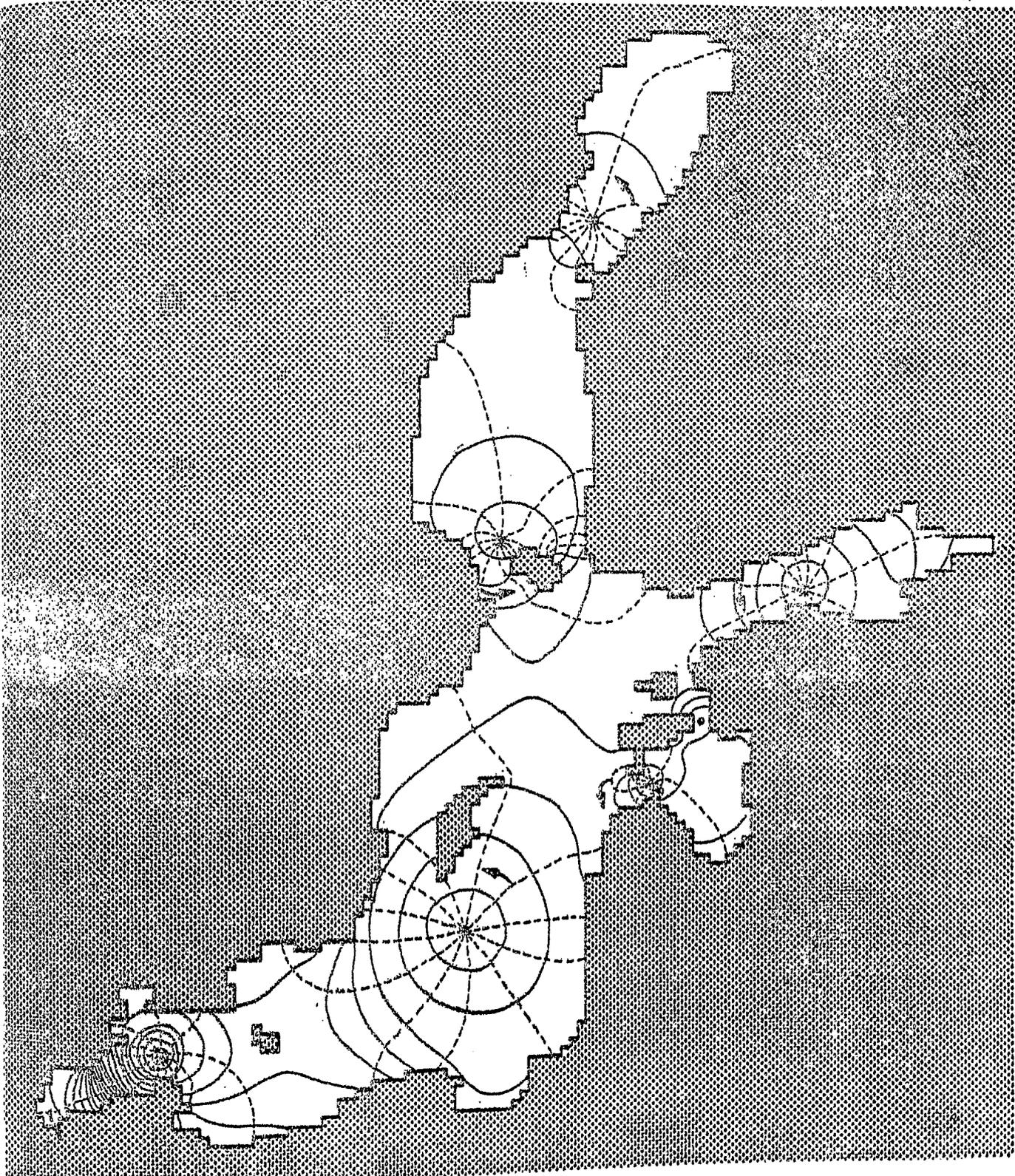


Abb. 18e 6. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 13.04 \text{ h}$,
 $f = 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

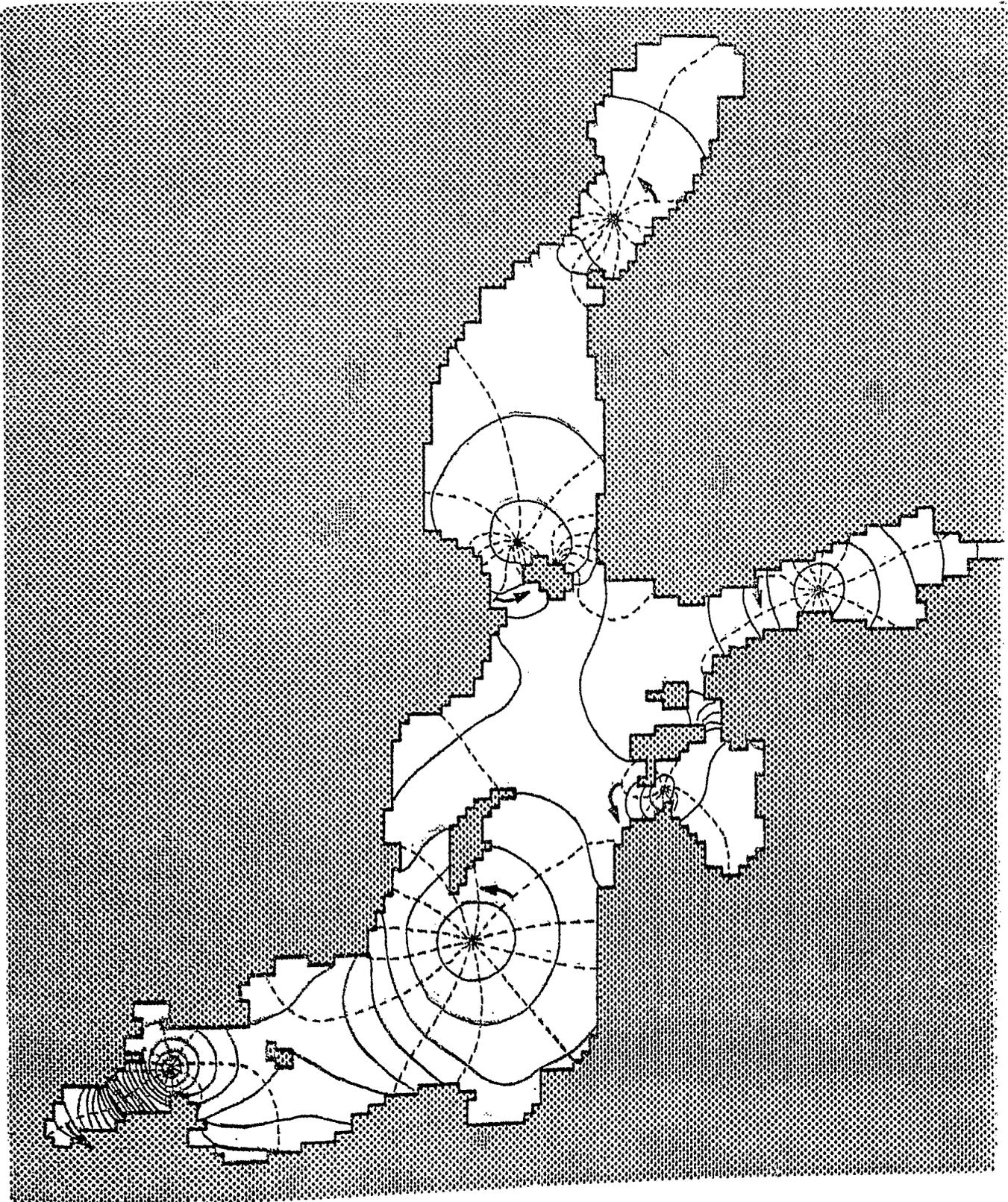


Abb. 18f 6. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=13.04$ h ,
f variabel

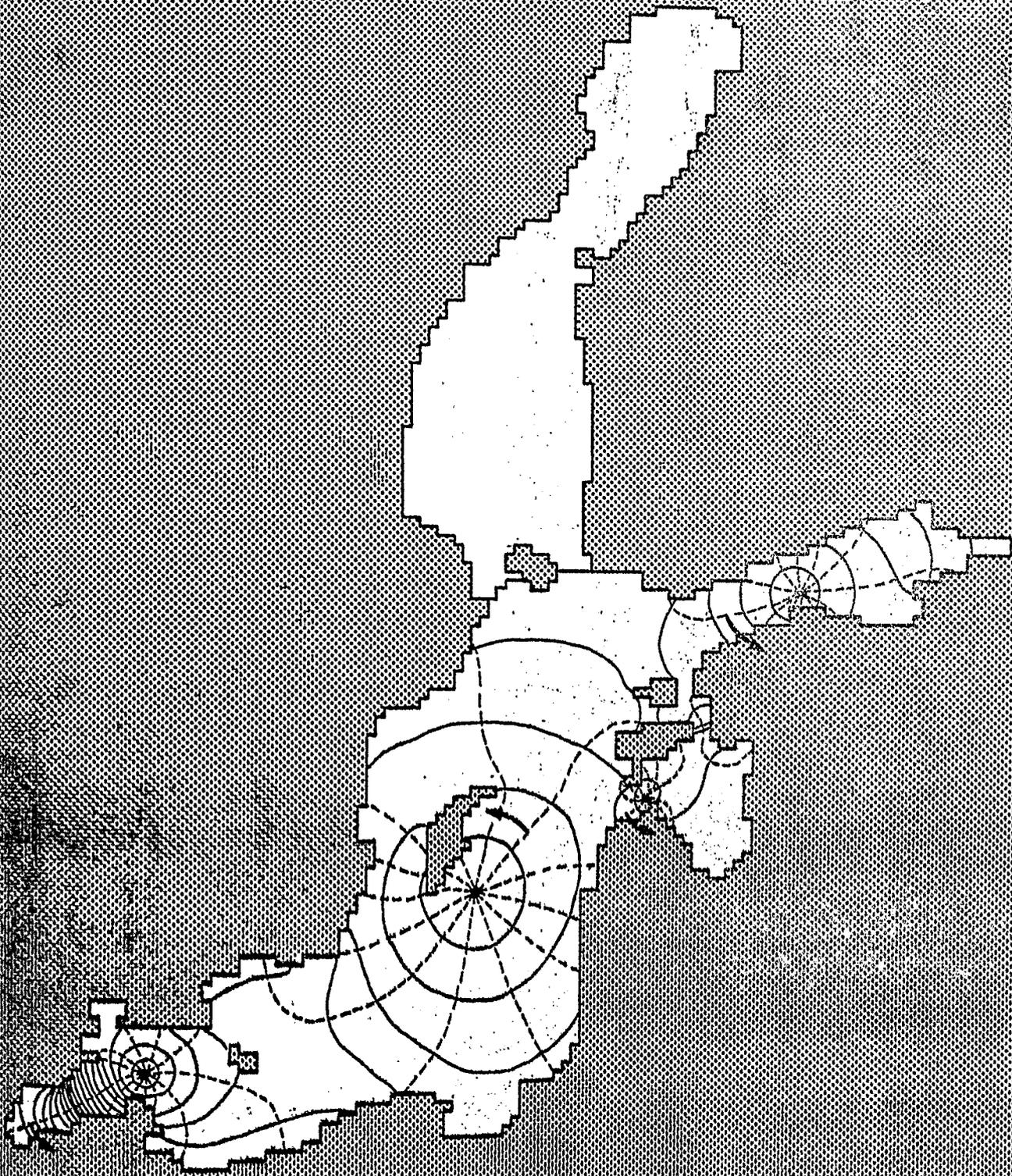


Abb. 18g Vergleichslösung im System Ostsee - Finnischer Meerbusen zur 6. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=13.43 \text{ h}$, $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

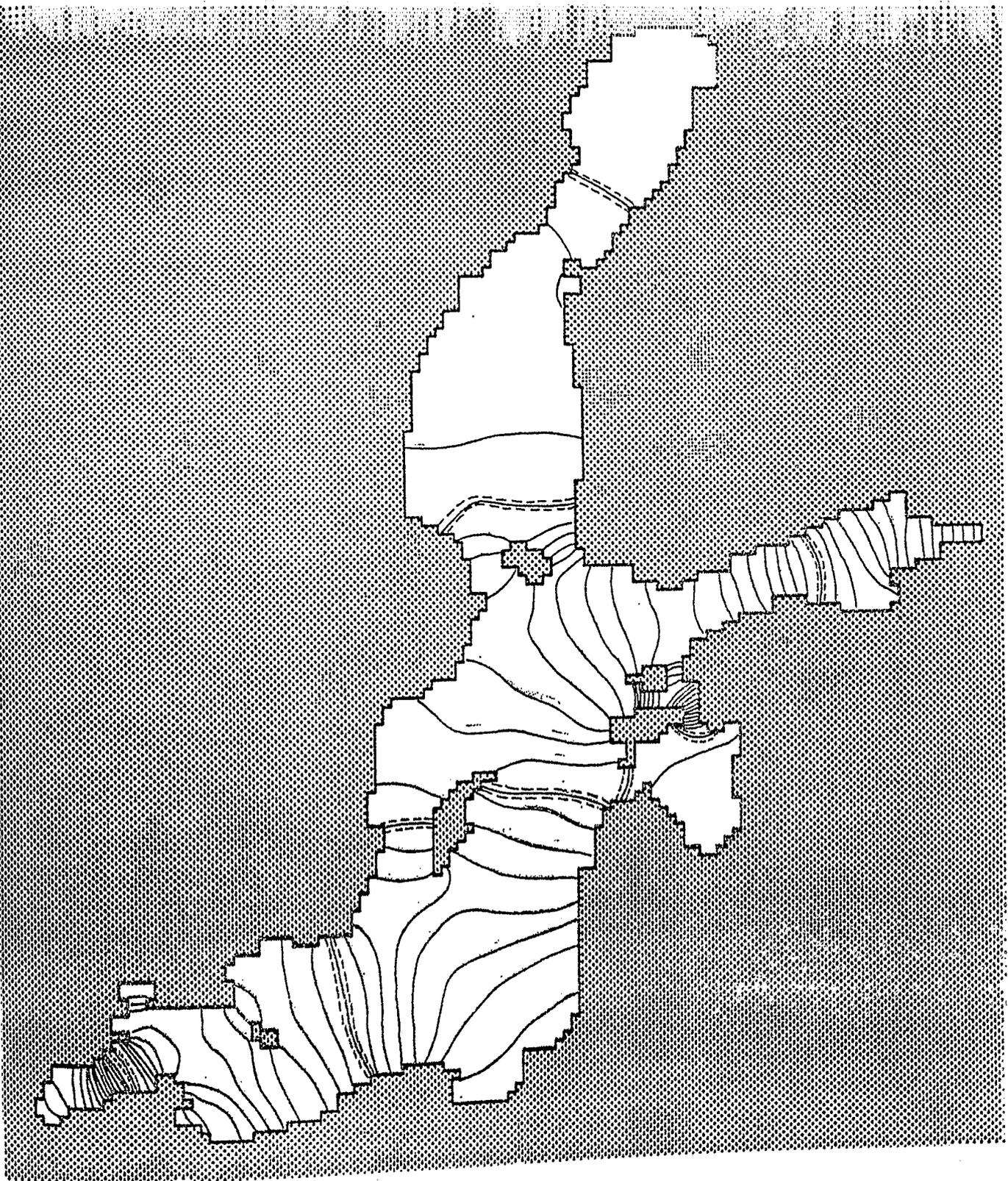


Abb. 19a 7. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 10.45$ h,
 $f = 0$

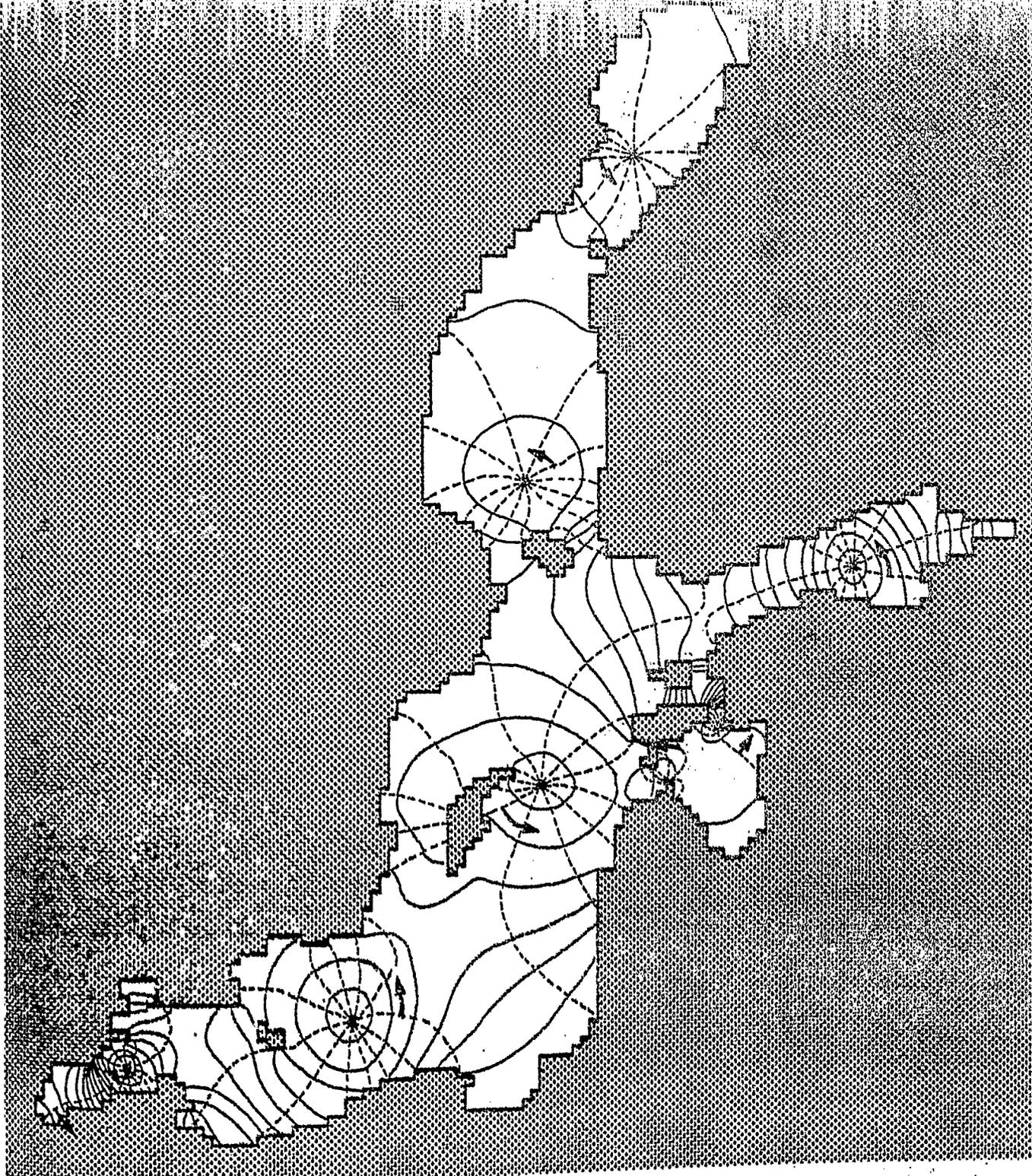


Abb. 19b 7. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=10.45$ h ,
 $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

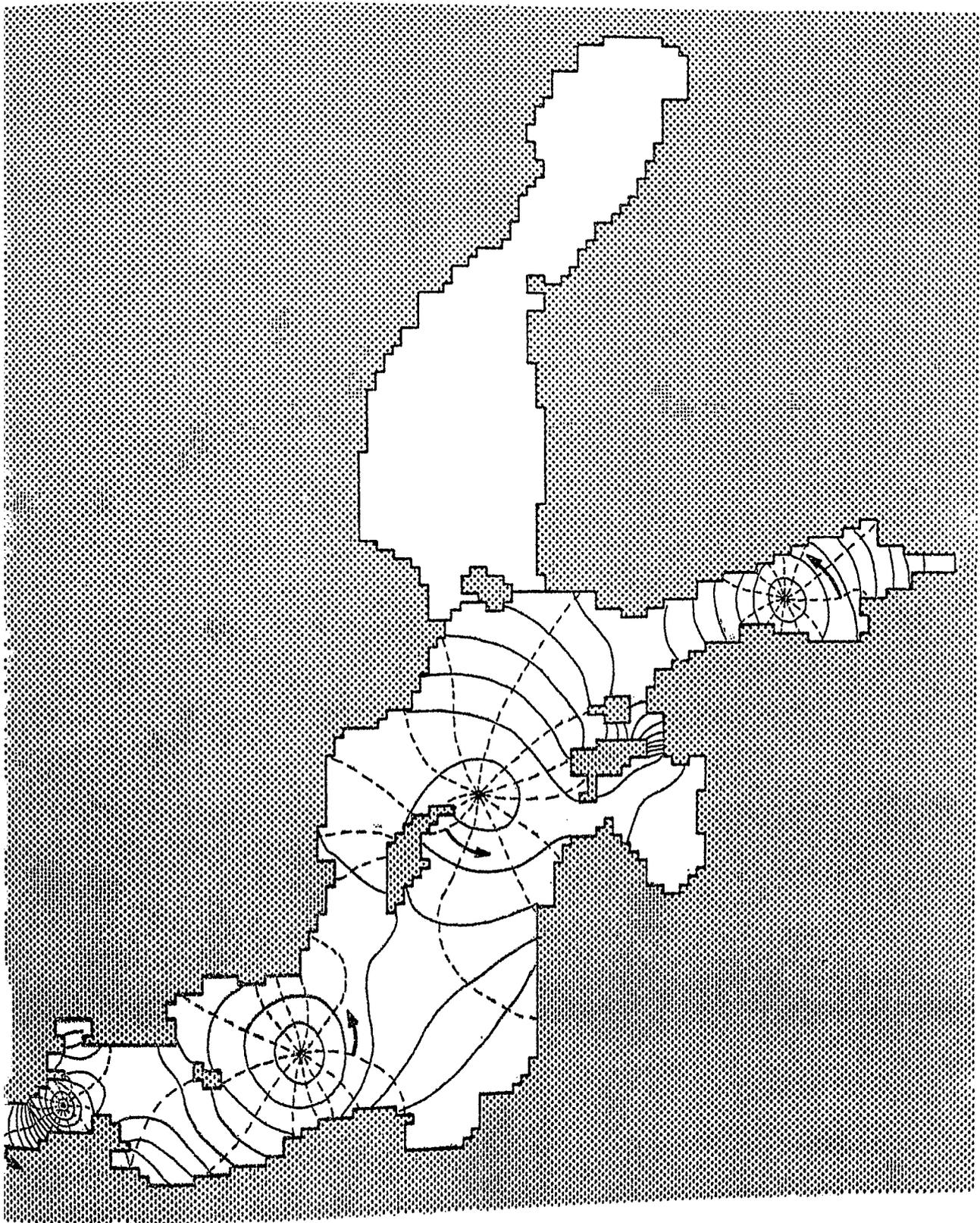


Abb. 19c Vergleichslösung im System Ostsee - Finnischer
Meerbusen zur 7. Schwingungsordnung der Ostsee,
 $\tau=10.72 \text{ h}$, $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

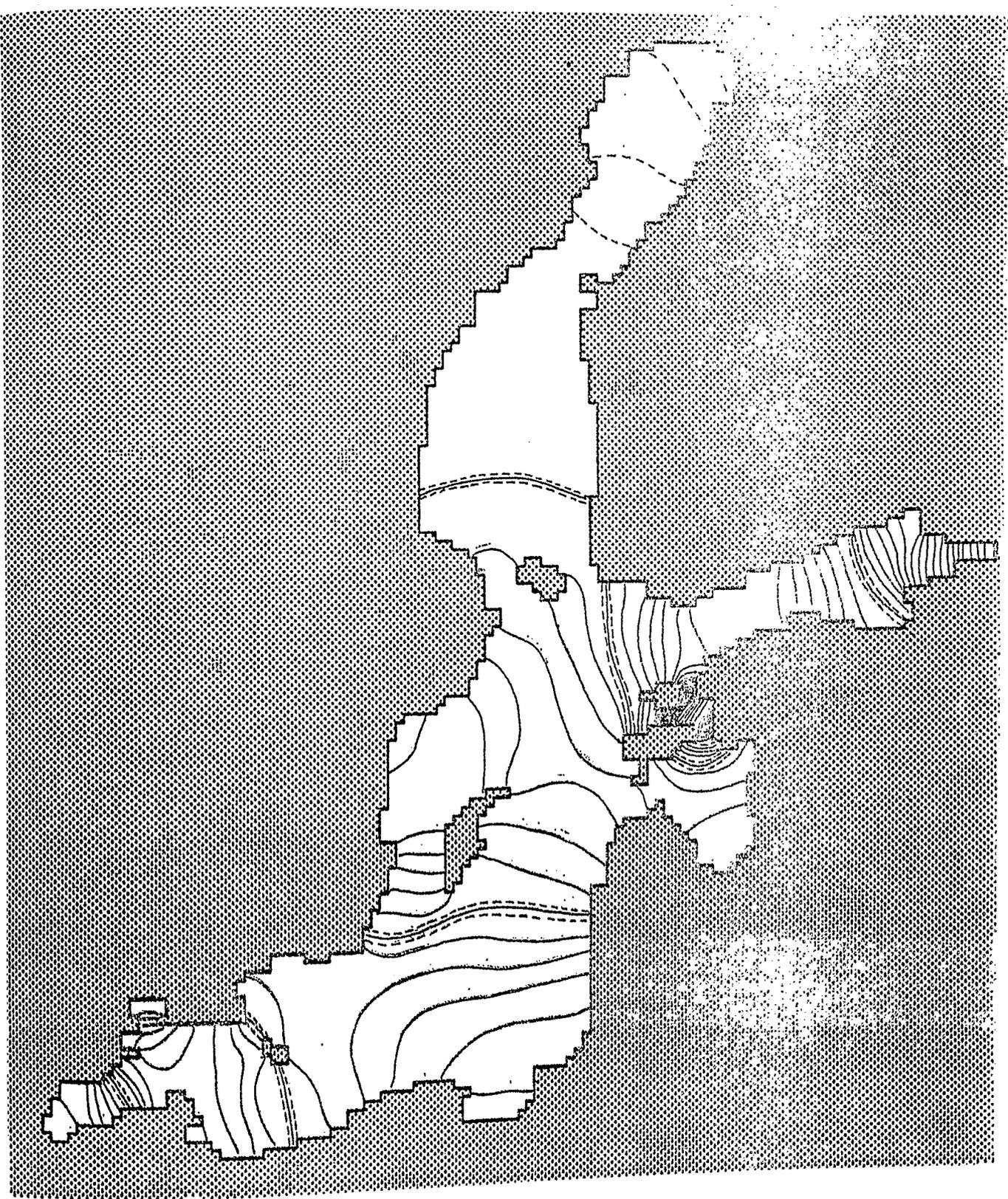


Abb. 20a 8. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 8.68$ h ,
 $f = 0$

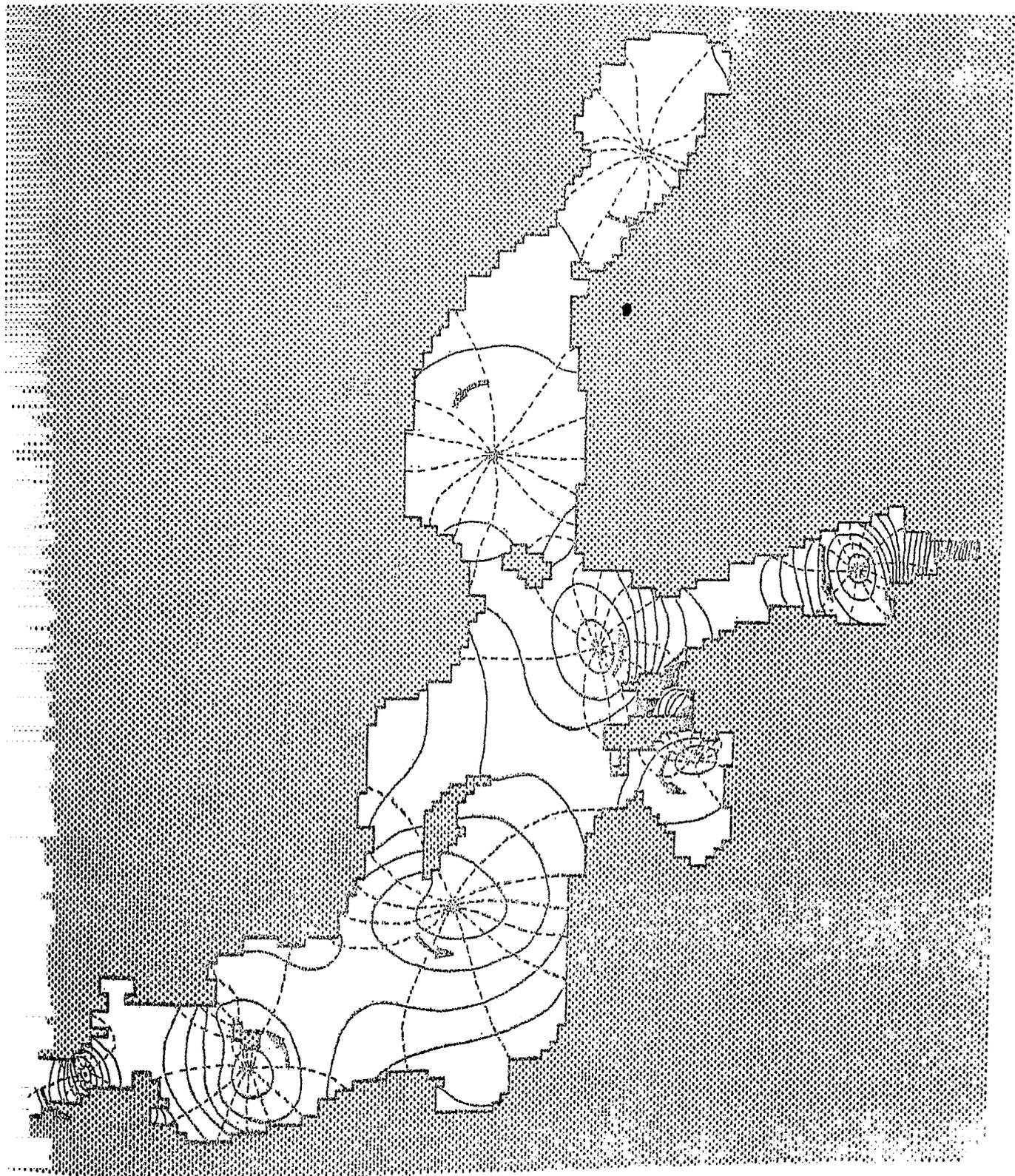


Abb. 20b 8. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=3.75$ h,
 $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

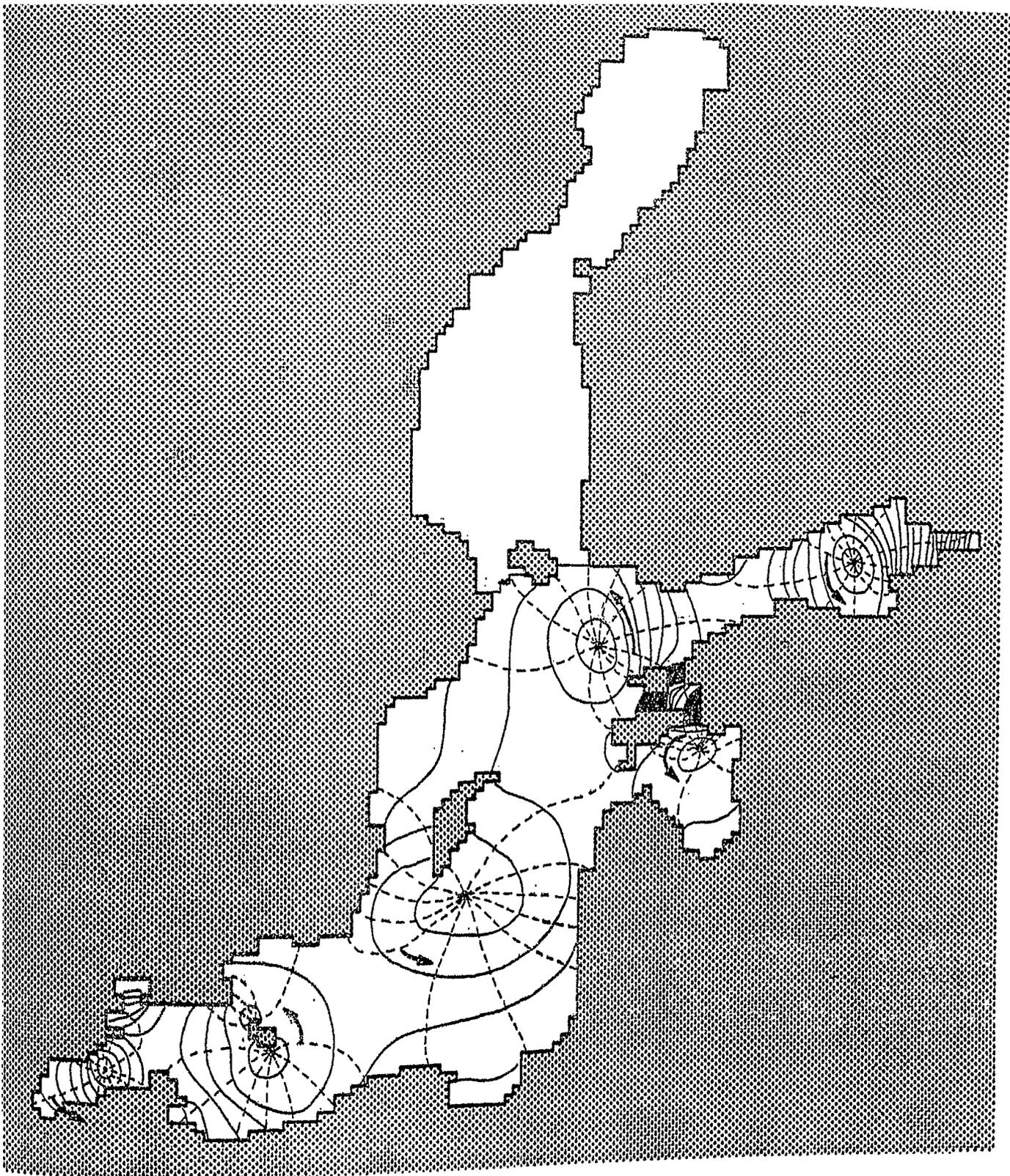


Abb. 20c Vergleichslösung im System Ostsee - Finnischer Meerbusen zur 8. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=8.83$ h , $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

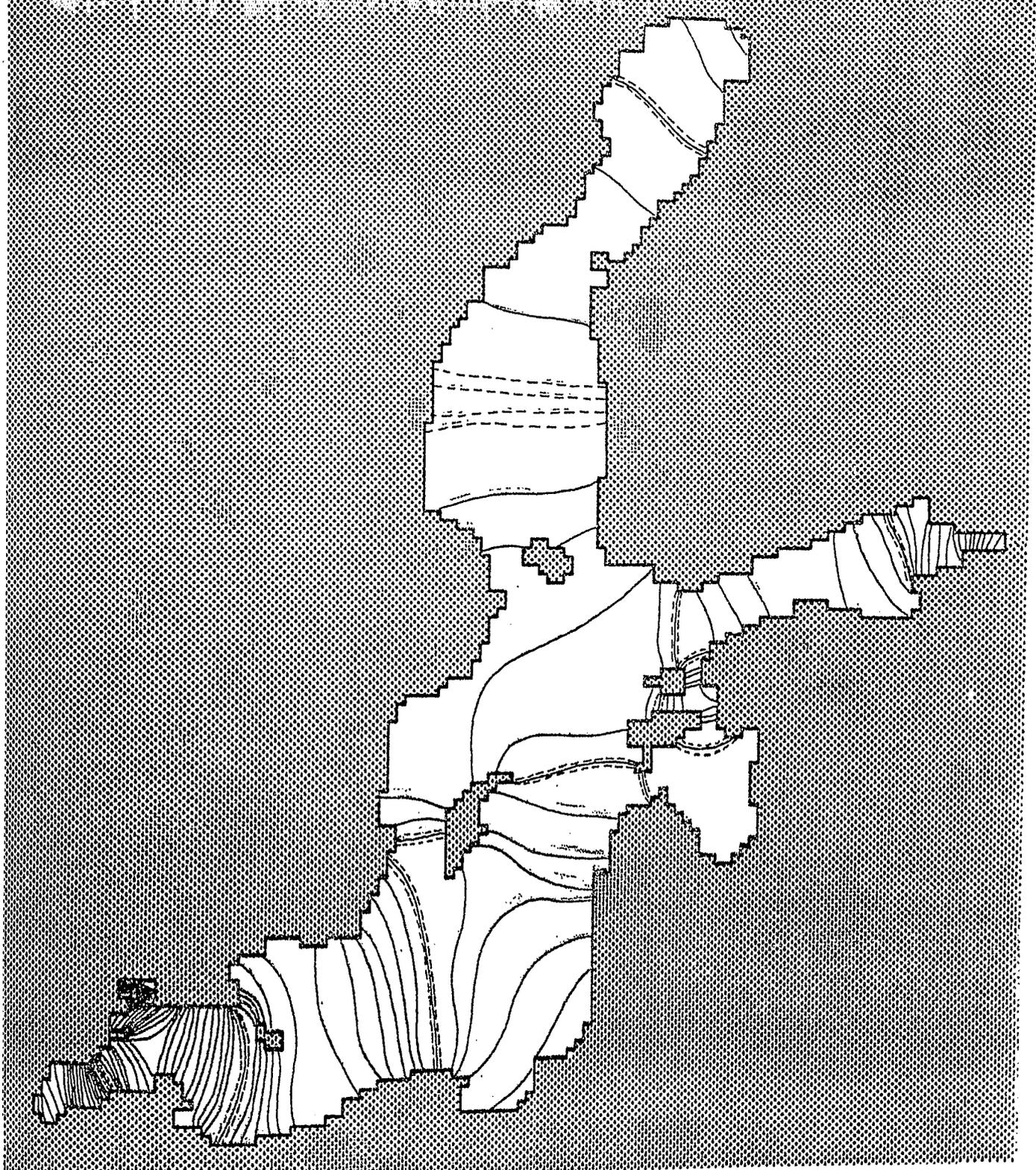


Abb. 21a 9. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=7.74$ h ,
 $f=0$

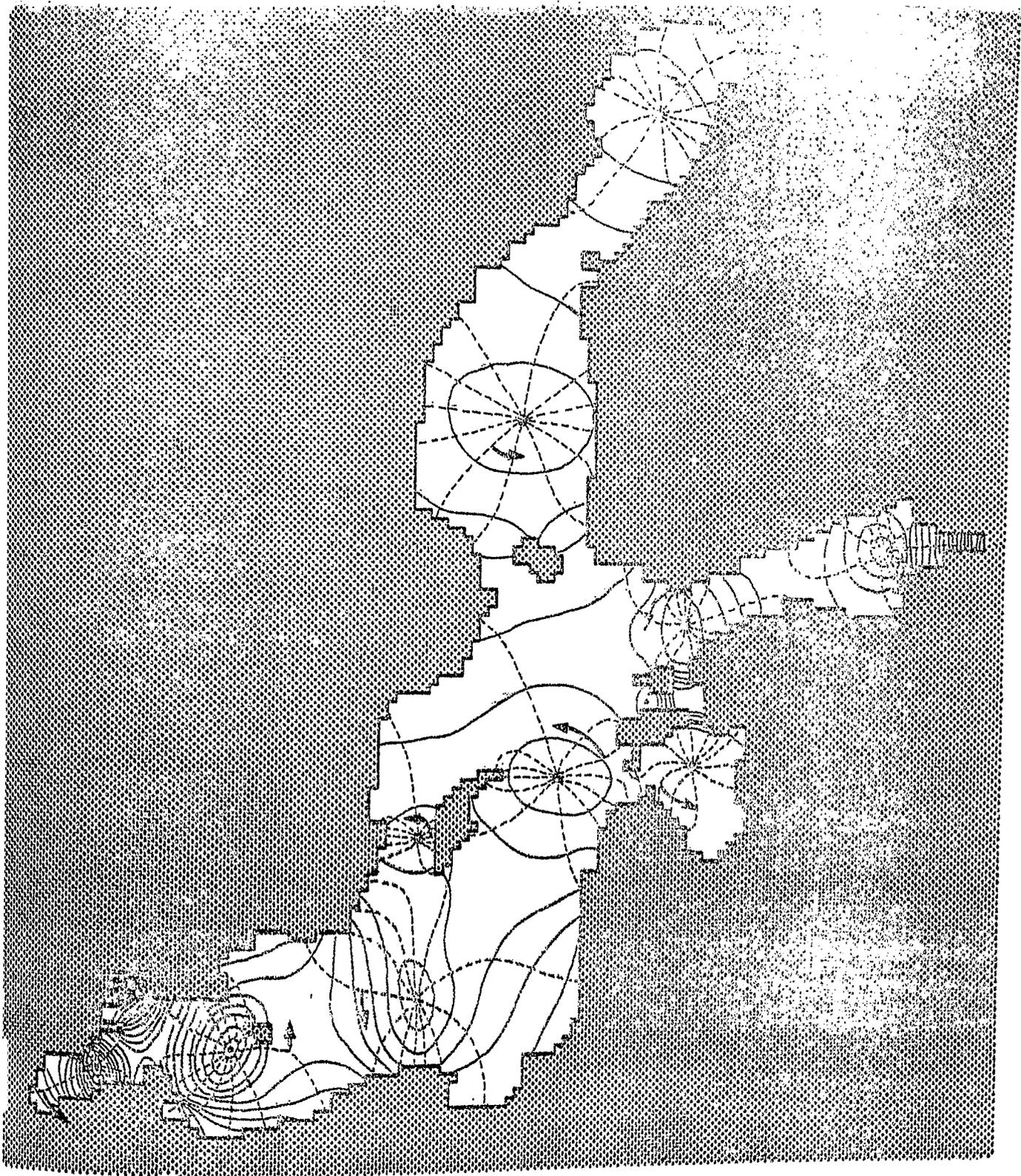


Abb. 21b 9. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=7.82$ h ,
 $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

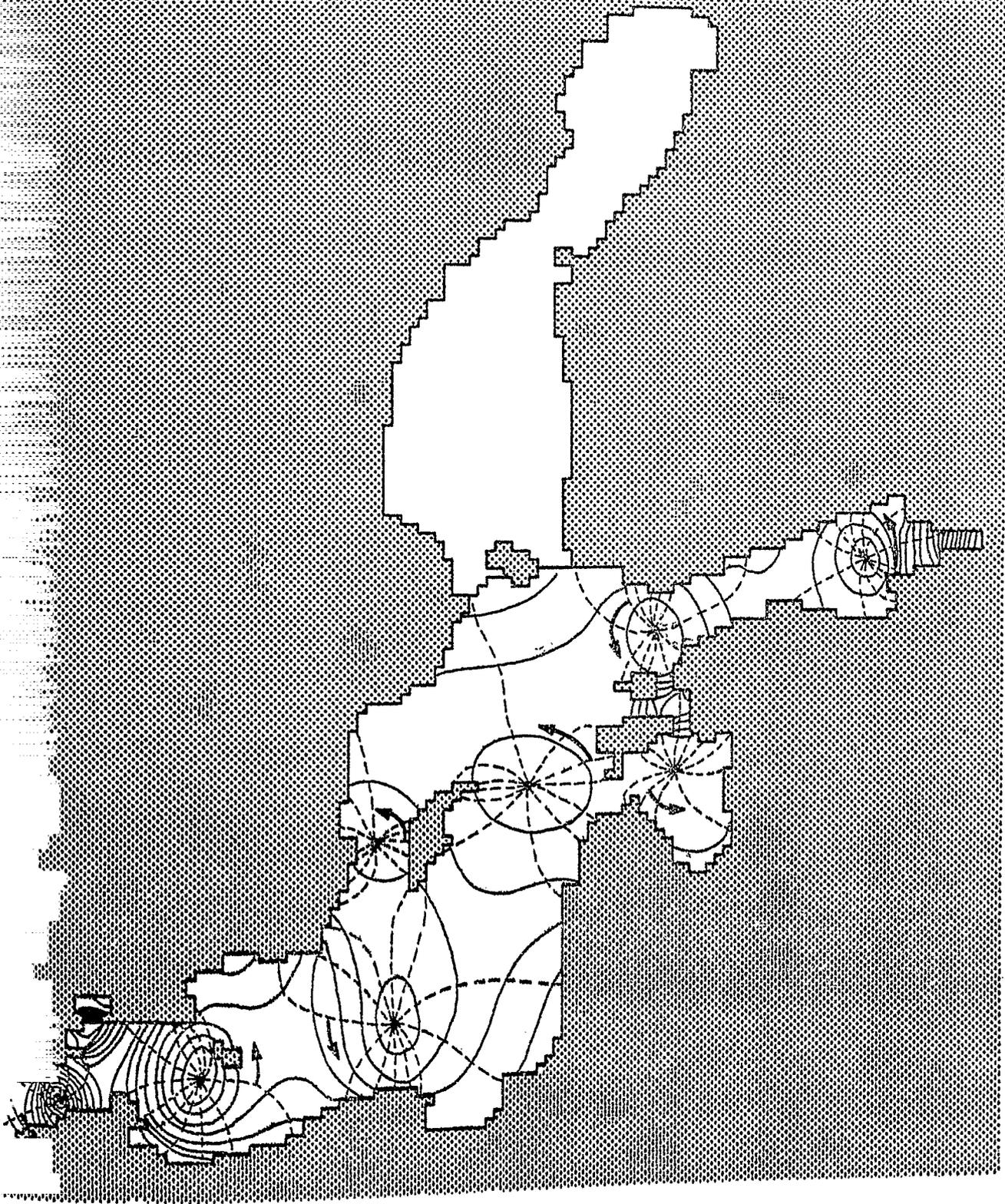


Abb. 21c Vergleichslösung im System Ostsee - Finnischer Meerbusen zur 9. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=7.88$ h, $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

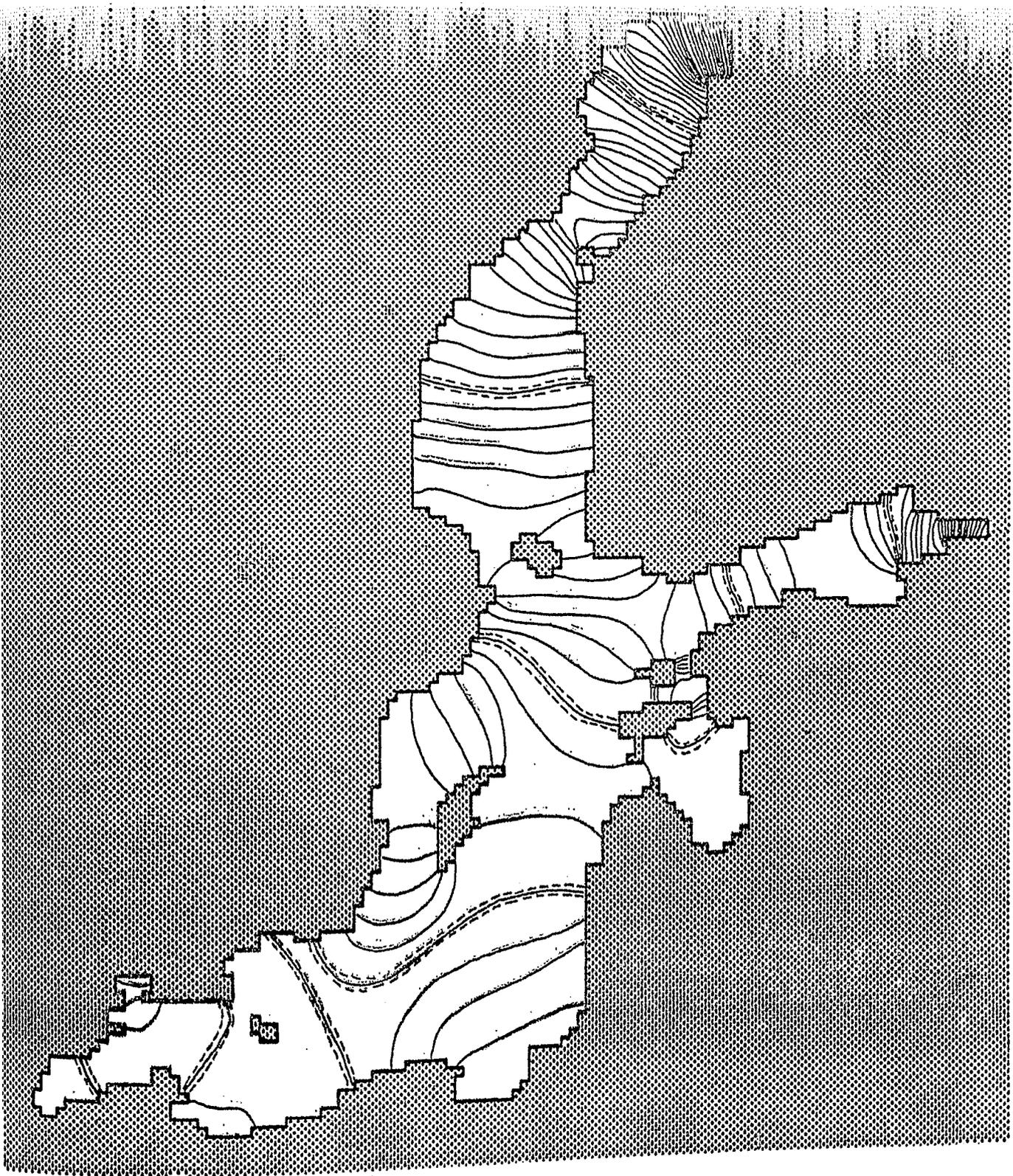


Abb. 22a 10. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau = 7.22$ h ,
f=0

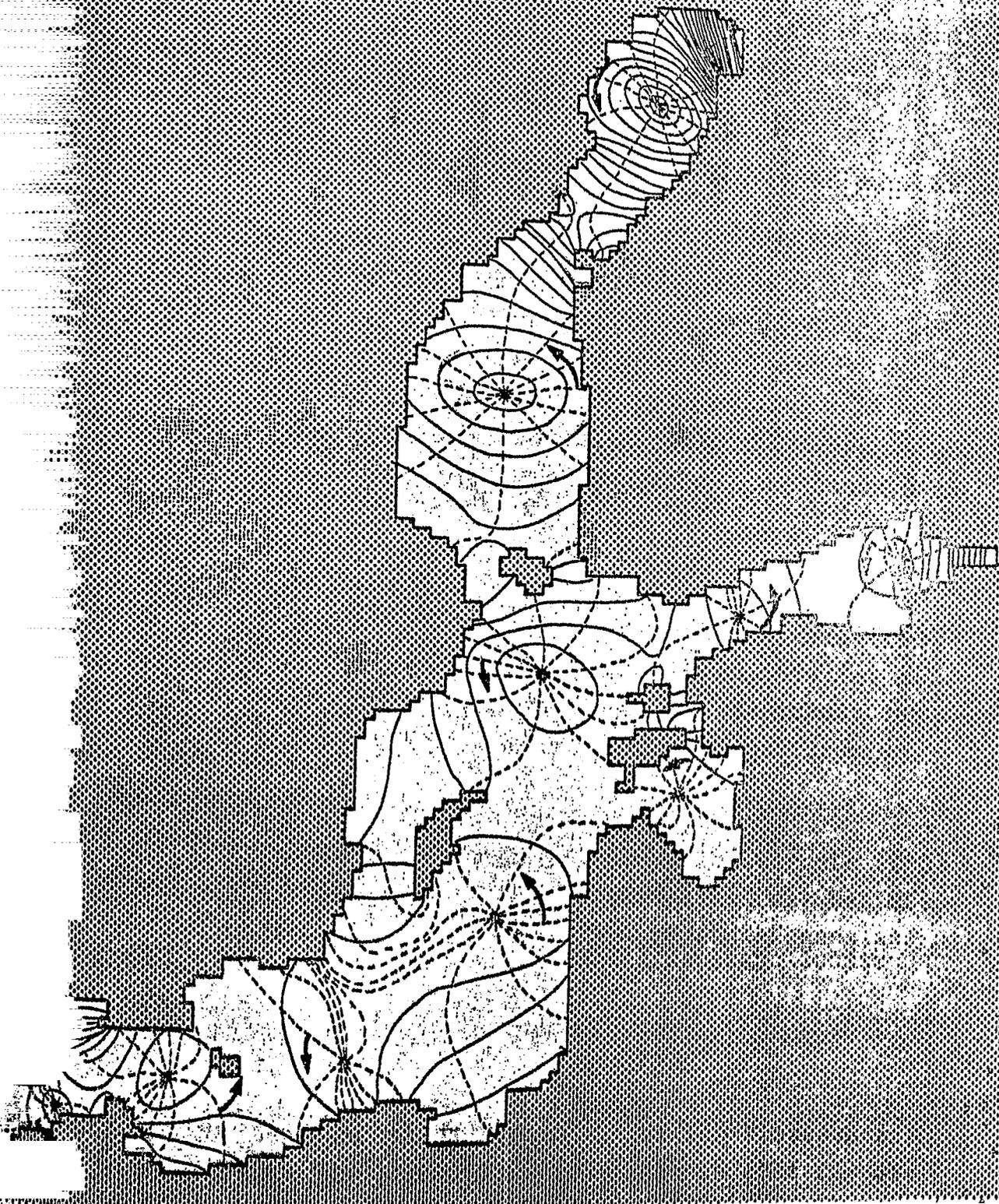
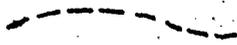


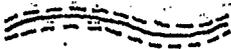
Abb. 22b 10. Schwingungsordnung der Ostsee, $\tau=7.31$ h,
 $f=1.26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$



Flutstundenlinien
Linienabstand 30° in allen Abbildungen



Hubhöhenlinien
Linienabstand 2.5 cm in allen
Abbildungen



Knotenlinie ($f=0$)
Phasensprung 180° , Amplitude 0 cm



linksdrehende Amphidromie ($f \neq 0$)
Die 0° -Flutstundenlinie ist mit
einem Pfeil gekennzeichnet, der
den Drehsinn der Amphidromie
angibt.



rechtsdrehende Amphidromie ($f \neq 0$)
Die 0° -Flutstundenlinie ist mit
einem Pfeil gekennzeichnet, der
den Drehsinn der Amphidromie
angibt.

Abb. 23

Legende zu den Darstellungen der Flutstunden-
und Hubhöhenlinien. Diese Legende gilt für die
Abbildungen 5, 6, 9 und 13 - 22.