

Berichte
aus dem
Institut für Meereskunde
an der
Christian-Albrechts-Universität Kiel

1981

Nr. 82

ZUR KINEMATIK
EINES STOCHASTISCHEN FELDES INTERNER WELLEN
IN EINER SCHERSTRÖMUNG

von
Hartmut Peters

DOI 10.3289/IFM_BER_82

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von:
Hartmut Peters
Institut für Meereskunde
Abt. Meeresphysik
Düsternbrooker Weg 20
D2300 Kiel 1

Diese Arbeit wurde 1981 als Dissertation bei der
mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät ein-
gereicht.

ISSN 0341 - 8561

"Eine der wichtigsten Bedingungen der Feldherrnkunst ist es, sich über die Stärke des Gegners Klarheit zu verschaffen. "Ich habe mir also" erzählt der General "einen Eintrittsschein in unsere weltberühmte Hofbibliothek besorgen lassen und bin unter Führung eines Bibliothekars, der sich mir liebenswürdig zur Verfügung stellte, als ich ihm sagte, wer ich bin, in die feindlichen Linien eingedrungen. Wir sind den kolossalen Bücherschatz abgeschritten, und ich kann sagen, es hat mich weiter nicht erschüttert, diese Bücherreihen sind nicht schlimmer als eine Garnisonsparade. Nur habe ich nach einer Weile anfangen müssen, im Kopf zu rechnen, und das hatte ein unerwartetes Ergebnis. Siehst du, ich hatte mir vorher gedacht, wenn ich jeden Tag da ein Buch lese, so müßte das zwar sehr anstrengend sein, aber irgendwann müßte ich damit zu Ende kommen und dürfte dann eine gewisse Position im Geistesleben beanspruchen, selbst wenn ich ein oder das andere auslasse. Aber was glaubst du, antwortete mir der Bibliothekar, wie unser Spaziergang kein Ende nimmt und ich ihn frage, wieviel Bände denn eigentlich diese verrückte Bibliothek enthält? Dreieinhalb Millionen Bände, antwortete er!! Wir sind da, wie er das sagte, ungefähr beim siebenhunderttausendsten Buch gewesen, aber ich habe von dem Augenblick an ununterbrochen gerechnet; - ich will es dir ersparen, ich habe es im Ministerium noch einmal mit Bleistift und Papier nachgerechnet: Zehntausend Jahre würde ich auf diese Weise gebraucht haben, um mich mit meinem Vorsatz durchzusetzen!

In diesem Augenblick sind mir die Beine auf der Stelle stecken geblieben, und die Welt ist mir wie ein einziger Schwindel vorgekommen. Ich versichere dir noch jetzt, wo ich mich beruhigt habe: da stimmt etwas ganz grundlegend nicht!"

Robert Musil: "Der Mann ohne Eigenschaften", Kapitel 100

<u>Inhalt</u>	Seite
0. Zusammenfassung / Abstract	2
1. Einleitung	5
2. Ebene, durch eine Scherströmung modifizierte interne Wellen; theoretische Formulierung	11
3. Dispersionskurven und Moden für "GATE 1974, Phase III"	20
4. Spektrale Darstellung des stochastischen Wellenfeldes; theoretische Formulierung	43
5. Übersicht über die durchgeführten Modellrechnungen	50
6. Ergebnisse der Testrechnungen ("Alternativmodell", "Fall 1", "Fall 2")	54
7. Charakteristika der aus den Messungen während "GATE" gewonnenen Spektren	63
8. Ergebnisse der Modellrechnungen zu "GATE"	71
9. Diskussion	90
Anhang I: Technische Anmerkungen und Fehlerdiskussion zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen	97
Anhang II: Technische Anmerkungen und Fehlerdiskussion zur Berechnung der Modellspektren	102
Anhang III: Formelsammlung zu Fall 1 ($\bar{u} \neq 0$); technische Anmerkungen und Fehlerdiskussion zum "Alternativmodell"	108
Literaturverzeichnis	110
Liste der verwendeten Symbole	114
Seitenverzeichnis der Tabellen und Abbildungen	116
Nachwort	117

<u>Contents</u>	page
0. Abstract	2/3
1. Introduction	5
2. Plane internal waves modified by a shear current; theoretical formulation	11
3. Dispersion curves and modes for "GATE 1974, phase III"	20
4. Spectral representation of the stochastic wave field; theoretical formulation	43
5. Survey of the model calculations presented	50
6. Results of the test calculations ("alternative model", "case 1", "case 2")	54
7. Characteristic features of the spectra computed from the GATE data	63
8. Results of the model calculations for the GATE case	71
9. Discussion	90
Appendix I: Technical remarks and discussion of errors concerning the calculation of eigenvalues and eigenfunctions	97
Appendix II: Technical remarks and discussion of errors concerning the calculation of model spectra	102
Appendix III: Formulae of spectral components for "case 1" ($u \neq 0$); technical remarks and discussion of errors concerning the "alternative model"	108
References	110
List of symbols	114
Location of tables and figures	116
Acknowledgement	117

O. Zusammenfassung

Für die im Atlantik im Bereich des Äquatorialen Gegenstroms während GATE beobachtete mittlere Schichtung und Scherströmung werden vertikale Eigenschwingungen (Moden) und Dispersionskurven hochfrequenter (0.3 bis 15 cph) interner Wellen berechnet. Ein spektrales Modell der Kinematik freier, linearer interner Wellen wird durch die stochastische Überlagerung so gewonnener Moden erzeugt. Modellrechnungen werden zu Vergleichs- und Testzwecken für einfache Grundzustände ($N^2 = \text{const.}; \bar{u} = \text{const.}$) durchgeführt.

Die den Verhältnissen während GATE entsprechenden Rechnungen ergeben folgende Resultate: In den Energiespektren wird eine Schulter bei Frequenzen zwischen 1.5 und 4 cph beobachtet, die einen nicht unbeträchtlichen Teil der Gesamtenergie des Wellenfeldes repräsentiert. Diese Schulter kann im wesentlichen nicht durch kinematische Effekte erklärt werden, sie muß dynamische Ursachen haben. Im Frequenzbereich 1.5 bis 4 cph wird das Wellenfeld praktisch ausschließlich von der ersten Mode beherrscht. Nach den Beobachtungen sind die Wellen überwiegend gegen die mittlere Strömung gerichtet. Zur Erklärung dessen müssen sowohl dynamische als auch kinematische Effekte herangezogen werden. Das beobachtete Maximum der Kohärenz zwischen Strömung in der Deckschicht und Temperatur in der Sprungschicht zwischen 1.5 und 4 cph ist prinzipiell der Kinematik des Systems zuzuschreiben. Die Skalen des Wellenzahlspektrums, die sich aus der Anpassung des Modells an die Daten ergeben, sind derart, daß nur ein Teil der Anisotropie des Systems von Moden und Dispersionskurven wirksam wird. Die Vertikalstruktur der beobachteten Strömungsfluktuationen kann mit dem Modell nicht vollständig beschrieben werden. Das Modell wird kritisch diskutiert.

Abstract

Modes and dispersion curves of high-frequency internal waves (0.3 to 15 cph) are calculated for the mean stratification and the mean shear current as observed in the tropical Atlantic within the Equatorial Counter Current during GATE. A model of the kinematics of free, linear internal waves is constructed by means of stochastic superposition of shear modes. In order to test the model and to obtain basic knowledge about Doppler effects calculations are carried out for simple mean conditions ($N^2 = \text{const.}$, $\bar{u} = \text{const.}$).

The model calculations for the GATE case yield the following results: A shoulder observed in the energy spectra at frequencies of 1.5 to 4 cph, representing a considerable part of the total energy of the wave field, cannot be explained by kinematic effects. It must be of dynamical origin. In the above frequency band the wave field is composed of the first mode alone. The observations indicate a directionality of the wave field against the mean current. In order to explain this feature both kinematic and dynamic aspects have to be considered. The observed maximum of coherence between the current of the mixed layer and the temperature in the tropical thermocline has basically kinematic reasons. By means of adjusting the model parameters to the observations a wave-number spectrum is determined. Its scales are such that only part of the anisotropy of the system of modes and dispersion curves becomes effective. The model cannot describe the vertical structure of the observed current fluctuations completely. The investigation is critically reviewed.

1. Einleitung

Interne Wellen im Ozean sind in den vergangenen fünfzehn Jahren intensiv untersucht worden. Neben reinem Forschungsinteresse ist dafür auch die Vermutung maßgeblich gewesen, daß diese Wellen für die Impulsbilanz der Meere eine wichtige Rolle spielen. Der Aufschwung der Untersuchungen begann mit dem Einsatz verankerter Strömungsmesser. Die Problematik dieser Meßtechnik in der Nähe der bewegten Meeresoberfläche bewirkte eine Konzentration der Arbeiten auf den tiefen Ozean. In deren geschichtlichem Ablauf nehmen die Arbeiten von GARRETT & MUNK (1972, 1975) eine Schlüsselstellung ein, da sie den Großteil der bis dahin durchgeführten Messungen und Analysen zusammenfaßten und eine Reihe von weiteren Experimenten stimulierten. Das umfassendste Unternehmen dieser Art war das Internal Wave Experiment des Jahres 1973 (IWEX). Orientiert an GARRETT & MUNK führten MÜLLER et al. (1978) die inverse Modellierung des dabei gewonnenen Datensatzes durch. Die Kinematik der internen Wellen der Tiefsee kann als gut bekannt gelten. Das von GARRETT & MUNK synthetisierte Spektrum ermöglichte theoretische Untersuchungen der Dynamik interner Wellen. OLBERS (1976) und McCOMAS & BRETHERTON (1977) studierten die schwache, nichtlineare Wechselwirkung innerhalb des Wellenfeldes, MÜLLER (1976) betrachtete die Wechselwirkungen zwischen Wellen und einem langsam veränderlichen mittleren Strom. Beobachtungen zum letzteren Thema wurden in einer Reihe von Arbeiten analysiert, die auch deswegen erwähnt werden müssen, weil sie mit der vorliegenden Untersuchung thematisch verwandt sind (FRANKIGNOUL, 1972, 1974; FRANKIGNOUL & JOYCE, 1979; RUDDICK & JOYCE, 1979). Die Untersuchung der Dynamik der internen Wellen der Tiefsee wird noch kontrovers diskutiert (HOLLOWAY, 1980).

Bis etwa zur Mitte der 70er Jahre war über die oberflächennahen internen Wellen im offenen Ozean wenig bekannt. Ausführliche Untersuchungen waren nur in flachen Gewässern durchgeführt worden (z.B. in der Ostsee: KIELMANN et al., 1973). Bezüglich der Tiefsee war nicht zu erwarten, daß die spektralen Charakteristika der internen Wellen der jahreszeitlichen bzw. tropischen Sprungschicht denen der Hauptsprungschicht gleichen würden. Dafür können folgende Gründe angeführt werden: - Nähe anregender Kräfte (Windschub), - Wechselwirkung mit Oberflächenwellen, - kleine Vertikalskala der Schichtung, - starke mittlere Scherströmungen.

Bei der Planung von Projekten zur Erforschung der Wechselwirkung von Ozean und Atmosphäre ging man von der Annahme aus, daß interne Wellen bei Transport- und Vermischungsvorgängen in der jahreszeitlichen bzw. tropischen Sprungschicht eine wichtige Rolle spielen. Die meisten dieser Projekte fanden im Rahmen von GARP (Global Atmospheric Research Programme) statt. Während GATE (GARP Atlantic Tropical Experiment) wurde ein Experiment zur Untersuchung der internen Wellen der tropischen Sprungschicht durchgeführt. Auf der Position $8^{\circ}50'N$, $22^{\circ}53'W$ wurde vom 29.8.74 bis 17.9.74 eine H-förmige Verankerung ("F1") mit einer 500 m langen Kette von Strommessern in 60 m Tiefe annähernd parallel zur mittleren Strömung ausgelegt (Abb. 1.1). Die Wassertiefe betrug knapp 5000 m. Die Meßdaten von dieser Verankerung bilden die Grundlage der vorliegenden Arbeit. Sie wurden von KÄSE et al. (1978) zusammengestellt. Die Qualität der Daten ist gut, da die Verankerung sehr stabil war (SIEDLER & GERLACH, 1976). Messungen benachbart stationierter Schiffe werden am Rande hinzugezogen (PETERS, 1978b). Die Strömungsmeßdaten von GATE sind für die Untersuchung des Einflusses einer Scherströmung auf ein internes Wellen-

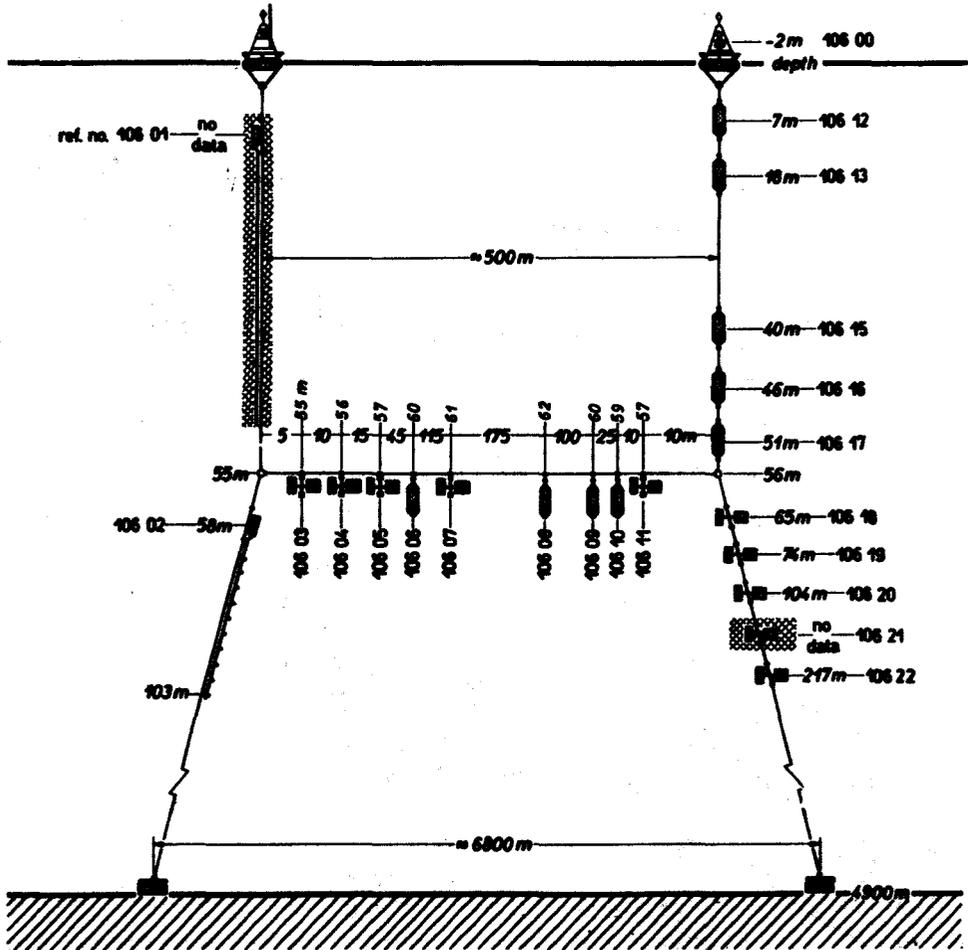


Abb 1.1 Konfiguration der Verankerung F1 (GATE, Sept. 1974, 8° 49.9'N, 22° 52.6'W). Außer Tiefen und horizontalen Abständen sind die Referenznummern der Geräte angegeben. Gerätetypen: 10606 etc. = VACM, 10607 etc. = Aanderaa.

feld besonders geeignet. Maßgebend dafür ist die Stärke und Stetigkeit des Äquatorialen Gegenstroms (Abb. 1.2), in dem die Verankerung F1 lag.

Die genannten Daten sind bereits in einer Reihe von Arbeiten analysiert worden. Wichtig ist in diesem Zusammenhang vor allem die Beschreibung der Kinematik der internen Wellen durch KÄSE & SIEDLER (1980), nach der es im spektralen Bereich drei energiereiche Bänder gibt: - bei der Trägheitsperiode, - bei der Periode halbtägiger Gezeiten, - bei hohen Frequenzen zwischen

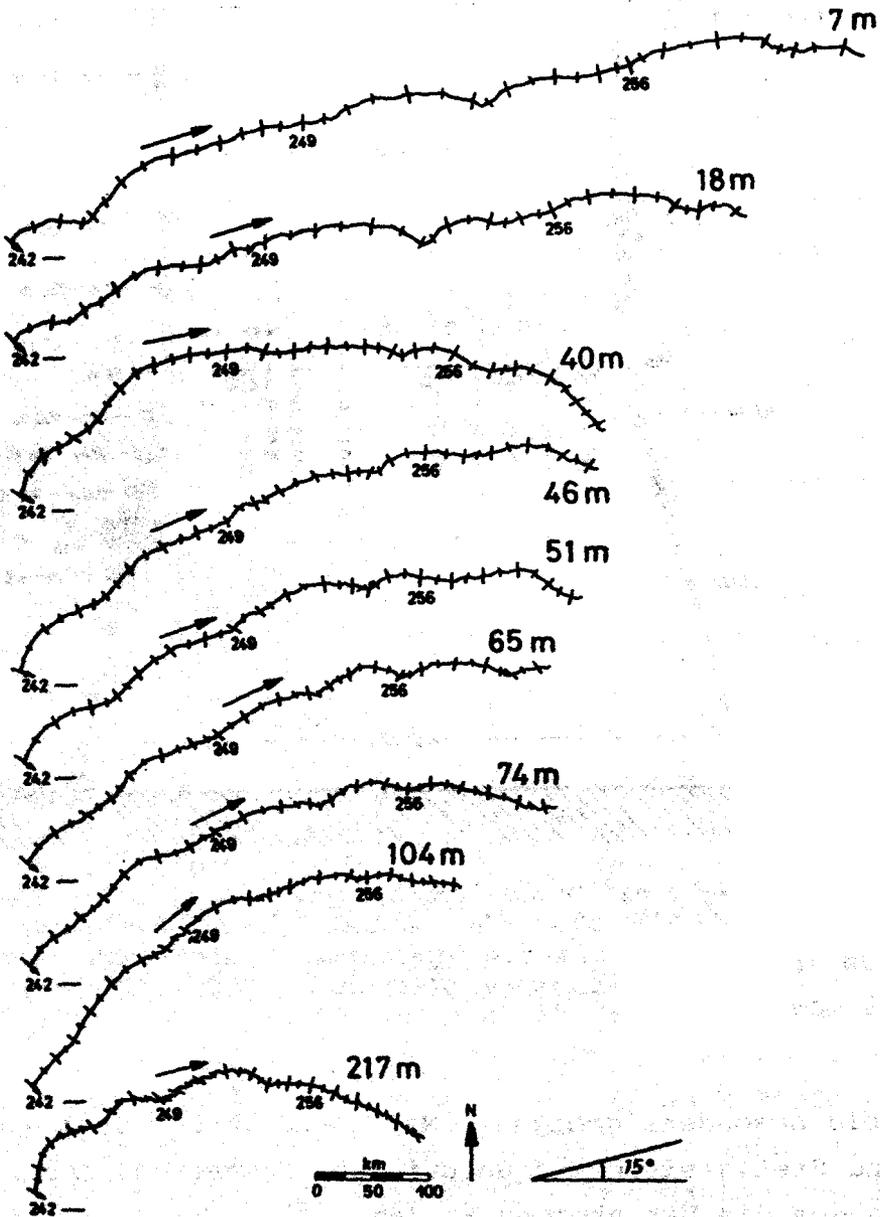


Abb. 1.2 Fortschreitende Vektordiagramme einiger Meßreihen der Verankerung F1. Dargestellt sind Mittelwerte über 2 Stunden. Die Tiefe der Sensoren und die Nummer des Julianischen Tages (00.00 GMT) sind angegeben. Die Abstände der Markierungen betragen 12 Stunden.

2 und 4 cph. Dieses Band wurde von KÄSE & CLARKE (1978) untersucht, basierend auf einem Modell der Anregung interner Wellen in einem ruhenden Medium mit realistischer Schichtung.

Andere Experimente zur Erfassung der oberflächennahen internen Wellen erbrachten ähnliche Ergebnisse wie bei GATE, z.B. die Dominanz der ersten Mode bei hochfrequenten Wellen und die Existenz einer spektralen Schulter in diesem Bereich (BREKHOVSKIKH et al., 1975; PINKEL, 1975). Die Zusammensetzung des Feldes der hochfrequenten internen Wellen aus wenigen niedrigen Moden ist für die vorliegende Untersuchung eine fundamentale Voraussetzung. Ein hochmodales Feld kann auf dem eingeschlagenen Weg nicht bearbeitet werden.

Die Untersuchungsmethode entspricht in groben Zügen dem Vorgehen von GARRETT & MUNK (1972). Ein spektrales Modell eines Feldes hochfrequenter interner Wellen wird durch die stochastische Überlagerung von vertikalen Eigenschwingungen (Moden) gewonnen, die unter Berücksichtigung von Schichtung und Strömung berechnet werden. Der Rückgriff auf Moden ist naheliegend, da wegen der kleinen Vertikalskalen dieser mittleren Felder die WKBJ-Näherung versagt. Die ausschließliche Berücksichtigung des hochfrequenten Bereiches (0.3 bis 15 cph) stellt eine Beschränkung auf das Wesentliche dar, da hier die Wirkung des mittleren Stroms besonders groß ist. Die Modellrechnungen ergeben bei Vorgabe des Wellenzahlspektrums (genauer: der Energieverteilung längs der Dispersionskurven) mit Hilfe der berechneten Sätze von Eigenwerten und -funktionen Auto- und Querspektren, die mit den Beobachtungen verglichen werden können.

Das Wellenzahlspektrum wird in möglichst einfacher Weise so gewählt, daß das Modell zumindest in wesentlichen Punkten den Beobachtungen entspricht. Diese Anpassung ist auch ohne die Lösung des inversen Problems möglich. Gesucht werden Aussagen zu den folgenden kinematischen Charakteristika des Wellenfeldes: - modale Zusammensetzung, - spektrale Bandbreite, - Anisotropie/Isotropie, - Einfluß von Dopplertermen, - Wirkung der Stromscherung. Die Rechnungen werden hauptsächlich zu diagnostischen Zwecken durchgeführt. Vergleichsrechnungen erlauben es, die Wirkungsweise verschiedener Parameter zu untersuchen. So werden die Fälle "GATE-Schichtung, ruhendes Medium" und "gleichmäßige Schichtung, konstanter mittlerer Strom" behandelt. Die Ergebnisse geben Hinweise auf dynamische Prozesse.

Im folgenden Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der Berechnung von Moden und Dispersionskurven und im Kapitel 3 die Ergebnisse für die Verhältnisse bei GATE dargestellt. Die Kenntnis dieser Resultate ermöglicht es, einige Probleme der Formulierung des Spektralmodells in Kapitel 4 besser zu verstehen. Kapitel 5 gibt eine Übersicht über die vorgestellten Modellrechnungen. In den Kapiteln 6 und 7 werden die Resultate der Testrechnungen und die aus den Messungen gewonnenen Spektren vorgestellt. Damit sind alle Grundlagen für die Darstellung der Modellrechnungen zu GATE in Kapitel 8 gelegt. Die Ergebnisse werden im letzten Kapitel kritisch erörtert. Im Interesse einer straffen Darstellung erfolgt die Diskussion der rechentechnischen Probleme und Fehler im Anhang.

2. Ebene, durch eine mittlere Scherströmung modifizierte, interne Wellen: theoretische Formulierung

Ausgangspunkt der folgenden theoretischen Entwicklungen sind die hydrodynamischen Grundgleichungen für eine ideale Flüssigkeit in einem rotierenden Bezugssystem. Die Boussinesq-Approximation wird eingeführt. Für die drei Komponenten u , v und w des Geschwindigkeitsvektors, für die Dichte ρ und für den Druck p wird ein Störungsansatz in Bezug auf einen geostrophischen Grundzustand gemacht:

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(z) + u'(x, y, z, t) ;$$

$$v(x, y, z, t) = \bar{v}(z) + v'(x, y, z, t) ; w(x, y, z, t) = w'(x, y, z, t) ;$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \rho_e(x, y, z) + \rho'(x, y, z, t) ;$$

$$p(x, y, z, t) = p_e(x, y, z) + p'(x, y, z, t) .$$

Die Koordinaten entsprechen einem Rechtssystem, in dem die z -Koordinate nach oben zeigt. Die Definition

$$(2.1) \quad \frac{D_0}{Dt} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

dient einer vereinfachten Schreibweise. Die verwendeten Symbole sind in einer Liste auf S. 114 zusammengefaßt. Die linearisierten Bewegungsgleichungen erster Ordnung lauten:

$$(2.2) \quad \frac{D_0}{Dt} u' + w' \frac{d\bar{u}}{dz} - f v' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} ,$$

$$(2.3) \quad \frac{D_0}{Dt} v' + w' \frac{d\bar{v}}{dz} + f u' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} ,$$

$$(2.4) \quad \frac{D_0}{Dt} w' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g .$$

Aus der Inkompressibilitätsbedingung folgt:

$$(2.5) \quad \frac{D_0}{Dt} \varrho' + w' \frac{\partial \varrho_e}{\partial z} + u' \frac{\partial \varrho_e}{\partial x} + v' \frac{\partial \varrho_e}{\partial y} = 0$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$(2.6) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

Die Terme $u' \partial \varrho_e / \partial x$ und $v' \partial \varrho_e / \partial y$ in Gleichung (2.5) resultieren aus der geostrophischen Balance des Grundzustandes. Es kann für die während GATE herrschenden Verhältnisse und für typische Parameter interner Wellen gezeigt werden, daß diese Terme gegen $D_0/Dt \varrho'$ und $w' \partial \varrho_e / \partial z$ klein sind. Ein Richtwert für die relative Größe ist 1 %. Die erstgenannten Terme werden daher weggelassen; es wird nunmehr von $\varrho_e = \varrho_e(z)$ ausgegangen.

Bei Berücksichtigung einer horizontalen Veränderlichkeit der mittleren Felder treten Probleme anderer Art auf, die hier nicht behandelt werden. Die Lösungen sind insbesondere i.A. nicht separierbar bezüglich der drei Koordinatenrichtungen. Verschiedene Aspekte der Wechselwirkung interner Wellen mit einer horizontal veränderlichen Grundströmung wurden von HEALEY & LeBLOND (1969), RHINES (1970) und MOOERS (1975) diskutiert.

Es werden Lösungen von (2.2) bis (2.6) in Form von ebenen, horizontal fortschreitenden Wellen gesucht. Der Wellenansatz lautet

$$\phi'(x, y, z, t) = \hat{\phi}(z) e^{-i(kx + ly - \omega t)}$$

wobei ω die Kreisfrequenz und $\underline{\alpha} = (k, l)$ der horizontale Wellenzahlvektor sind. Zur Vereinfachung wird die Väisäläfrequenz N durch $N^2(z) = -\frac{g}{\varrho_0} \frac{d\varrho_e}{dz}$ definiert. Nach der

Einführung des Wellenansatzes in (2.2) bis (2.6) wird der Faktor $\exp(-i[kx + ly - \omega t])$ eliminiert. Dadurch entsteht folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit z als einziger unabhängiger Variablen:

$$(2.7) \quad -i\omega \hat{u} + ik\bar{u}\hat{u} + iL\bar{v}\hat{v} + \frac{d\bar{u}}{dz} \hat{w} - f\hat{v} = -\frac{ik}{g_0} \hat{p},$$

$$(2.8) \quad -i\omega \hat{v} + ik\bar{u}\hat{v} + iL\bar{v}\hat{v} + \frac{d\bar{v}}{dz} \hat{w} + f\hat{u} = -\frac{iL}{g_0} \hat{p},$$

$$(2.9) \quad -i\omega \hat{w} + ik\bar{u}\hat{w} + iL\bar{v}\hat{w} = -\frac{1}{g_0} \frac{d\hat{p}}{dz} - \frac{\hat{g}}{g_0} g,$$

$$(2.10) \quad -i\omega \hat{g} + ik\bar{u}\hat{g} + iL\bar{v}\hat{g} - \hat{w} \frac{g_0}{g} N^2 = 0,$$

$$(2.11) \quad ik\hat{u} + iL\hat{v} + \frac{d\hat{w}}{dz} = 0.$$

Daß N^2 und \bar{u} von z abhängig sind, wird normalerweise nicht explizit notiert. Eine Gleichung für \hat{w} alleine wird wie folgt abgeleitet:

$$\text{Definitionen: } \omega_r = \omega - k\bar{u} - L\bar{v}; \quad \omega_z = k\bar{u}' + L\bar{v}';$$

$$\omega_{zz} = k\bar{u}'' + L\bar{v}''; \quad \psi = L\bar{u}' - k\bar{v}'; \quad \psi_z = L\bar{u}'' - k\bar{v}''.$$

$$\hat{g} = i \frac{g_0}{g} \frac{N^2}{\omega_r} \hat{w} \quad \text{aus (2.10),}$$

$$\hat{p} = -g\hat{g} + i g_0 \omega_r \hat{w} \quad \text{aus (2.9).}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$(2.12) \quad \hat{p}' = -i g_0 \frac{N^2 - \omega_r^2}{\omega_r} \hat{w}.$$

(2.7) wird mit k , (2.8) mit l multipliziert, beide Gleichungen werden addiert (horizontale Divergenz) und nach z differenziert. Zusammen mit (2.11) folgt:

$$(2.13) \quad i \hat{w}'' \omega_r - i \omega_{z2} \hat{w} + i f (l \hat{u}' - k \hat{v}') - \frac{\alpha^2}{\rho} \hat{p}' = 0.$$

Analog wird die Vertikalkomponente der Rotation gebildet; ihre Ableitung nach z lautet:

$$(2.14) \quad l \hat{u}' - k \hat{v}' = -\frac{1}{\omega_r^2} \left[\hat{w} (i \Psi_z \omega_r + i \Psi \omega_z) + \hat{w}' (i \Psi \omega_r + f \omega_z) + f \hat{w}'' \omega_r \right]$$

(2.14) und (2.12) werden in (2.13) eingesetzt.

$$(2.15) \quad \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} - \frac{f^2 (k \bar{u}' + l \bar{v}') + i f (l \bar{u}' - k \bar{v}') (\omega - k \bar{u} - l \bar{v})}{[(\omega - k \bar{u} - l \bar{v})^2 - f^2] (\omega - k \bar{u} - l \bar{v})} \frac{d \hat{w}}{dz} + \left\{ \frac{[N^2 - (\omega - k \bar{u} - l \bar{v})^2] \alpha^2 + (\omega - k \bar{u} - l \bar{v}) (k \bar{u}'' + l \bar{v}'')}{(\omega - k \bar{u} - l \bar{v})^2 - f^2} - i f \frac{(l \bar{u}'' - k \bar{v}'') (\omega - k \bar{u} - l \bar{v}) + (l \bar{u}' - k \bar{v}') (k \bar{u}' + l \bar{v}')}{[(\omega - k \bar{u} - l \bar{v})^2 - f^2] (\omega - k \bar{u} - l \bar{v})} \right\} \hat{w} = 0.$$

Dies ist die Gleichung für die Vertikalstruktur interner Wellen in einem rotierenden Bezugssystem. Eine entsprechende Formel, die sich ergibt, wenn die Boussinesq-Approximation nicht eingeführt wird, hat bereits KRAUSS (1966, S. 124) angegeben. Das sich durch Hinzufügen der Randbedingungen ergebende Eigenwertproblem hat i.a. keine reellen Eigenwerte, da die Gleichung komplex ist (siehe aber HEALEY & LeBLOND, 1969). Bei Eigenwerten mit imaginärem Anteil enthalten die Lösungen von (2.15) einen zeitlich anwachsenden

den bzw. abklingenden Faktor. Dies entspricht einem Energiefluß von der mittleren Strömung zum Wellenfeld bzw. umgekehrt, der alleine von der Rotation des Bezugssystems verursacht wird. Für hochfrequente interne Wellen ($\omega \gg f$) sind die Terme in (2.15), die f enthalten, klein. Auf der Basis der Lösungen für den Fall $f = 0$ kann gezeigt werden, daß sie mindestens zwei Größenordnungen kleiner als die übrigen Terme sind. In der Nähe kritischer Schichten mit $\omega = k\bar{u}(z_{c1}) + (\bar{v}(z_{c1}))$ bzw. $(\omega - k\bar{u}(z_{c2}) - (\bar{v}(z_{c2})))^2 = f^2$ gilt das allerdings nicht. Später wird deren Rolle allgemein erörtert. Hier muß nur festgestellt werden, daß für Wellen der tropischen Sprungschicht durchweg $z_{c1} \approx z_{c2}$ gilt. Das Problem der Existenz zweier verschiedener kritischer Tiefen im Falle $f \neq 0$ wird also keine Rolle spielen.

Aus der Vernachlässigbarkeit der Terme mit f in (2.15) folgt nicht ohne weiteres, daß die zugehörigen Eigenwerte verschwindende imaginäre Anteile haben. Für den nichtrotierenden Fall ist gezeigt worden, daß für $Ri(z) = N^2(z)/|\bar{u}'(z)|^2 > 0.25$ und für $\omega \neq \alpha \cdot \bar{u}$ in $0 \leq z \leq -H$ die Grundströmung stabil ist und somit alle Eigenwerte reell sind (MILES, 1961; HOWARD, 1961)[†]. Die Bedingung $Ri > 0.25$ ist für die Verhältnisse von GATE gegeben (Abb. 3.1). Im Weiteren wird davon ausgegangen, daß bei der Behandlung hochfrequenter interner Wellen die Erdrotation vernachlässigt werden kann. Die Gleichung für die Vertikalabhängigkeit von w lautet somit:

$$(2.16) \quad \hat{w}'' + \left\{ \frac{N^2(z) - [\omega - k\bar{u}(z) - (\bar{v}(z))]^2}{[\omega - k\bar{u} - (\bar{v})]^2} \alpha^2 + \frac{k\bar{u}''(z) + (\bar{v}''(z))}{\omega - k\bar{u} - (\bar{v})} \right\} \hat{w} = 0.$$

[†] Das für parallele Scherströmungen bewiesene Miles-Howard-Theorem läßt sich leicht für nichtparallele Strömungen verallgemeinern (s. LeBLOND & MYSAK, 1978, S. 398).

Durch Einsetzen von (2.16) in (2.7) bis (2.12) mit $f = 0$ ergibt sich die Gesamtlösung:

$$(2.17) \quad \hat{u}(z) = i \left\{ -\frac{l}{\alpha^2} \frac{l\bar{u}' - k\bar{v}'}{\omega - k\bar{u} - l\bar{v}} \hat{w} + \frac{k}{\alpha^2} \hat{w}' \right\} ;$$

$$(2.18) \quad \hat{v}(z) = i \left\{ +\frac{k}{\alpha^2} \frac{l\bar{u}' - k\bar{v}'}{\omega - k\bar{u} - l\bar{v}} \hat{w} + \frac{l}{\alpha^2} \hat{w}' \right\} ;$$

$$(2.19) \quad \hat{p}(z) = \rho_0 i \left\{ \frac{k\bar{u}' + l\bar{v}'}{\alpha^2} \hat{w} + \frac{\omega - k\bar{u} - l\bar{v}}{\alpha^2} \hat{w}' \right\} ;$$

$$(2.20) \quad \hat{g}(z) = -i \frac{\rho_0 N^2}{g(\omega - k\bar{u} - l\bar{v})} \hat{w}$$

Die Wirkung von \bar{u} im Term $[N^2 - (\omega - \alpha \cdot \bar{u})^2] / (\omega - \alpha \cdot \bar{u})^2$ geht weit über die einer Dopplerverschiebung hinaus. Da N und $(\omega - \alpha \cdot \bar{u})$ von gleicher Größenordnung sein können, kann die Vertikalabhängigkeit von \bar{u} die Lösung dominieren. Der Term proportional zu \bar{u}'' ist hingegen unbedeutend, solange das Profil des mittleren Stroms als "glatt" angenommen wird. In (2.17) und (2.18) steht ein Term proportional zu \hat{w} , der im Wellenfeld die Kohärenzen zwischen w und u bzw. v beeinflussen kann.

Die nächste Aufgabe ist die Herleitung und Diskussion der Randbedingungen, was hier nur für $f = 0$ durchgeführt wird. Es wird von einem ebenen Meeresboden ausgegangen:

$$(2.22) \quad w = 0 \quad \text{für } z = -H.$$

Die kinematische und die dynamische Grenzflächenbedingung an der Meeresoberfläche $z = \zeta$ lauten (LEBLOND & MYSAK, 1970, S. 57):

$$(2.23) \quad w(x, y, z, t) = \frac{d\zeta}{dt} ,$$

$$(2.24) \quad p_0(\zeta) + p(x, y, z, t) = p_a ,$$

in denen p_0 der hydrostatische Anteil, p der Störungsdruck und p_a der Luftdruck ist. Da die Wechselwirkung

der freien Oberfläche mit der Atmosphäre hier irrelevant ist, wird $p_o - p_a = 0$ gesetzt. Die beiden Bedingungen (2.23) und (2.24) werden in der üblichen Weise mittels Entwicklung um $z = 0$ und Weglassen der Glieder quadratischer und höherer Ordnung linearisiert; anschließend wird ζ eliminiert:

$$(2.25) \quad w(x, y, 0, t) = \frac{1}{\rho \cdot g} \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{z=0} + \bar{u}(0) \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{z=0} + \bar{v}(0) \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{z=0}$$

Nach Einführung des Wellenansatzes und von (2.19) erhält man die gewünschte Randbedingung, die bis zur ersten Ordnung korrekt ist:

$$(2.26) \quad \hat{w}(0) = \hat{w}'(0) \frac{[\omega - k\bar{u}(0) - l\bar{v}(0)]^2}{g\alpha^2 - [k\bar{u}'(0) + l\bar{v}'(0)][\omega - k\bar{u}(0) - l\bar{v}(0)]}$$

Die Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen aus dieser Randbedingung stellt prinzipiell keine Schwierigkeit dar. Für die vorliegende Arbeit aber ist es ausreichend, von einer starren Oberfläche,

$$(2.27) \quad \hat{w}(z=0) = 0,$$

auszugehen, da die sich aus dieser Vereinfachung ergebenden Fehler der Eigenwerte bei weniger als $1^\circ/\infty$ liegen. Die Randbedingung (2.23) lautet nach Linearisierung und Einführung des Wellenansatzes:

$$(2.24) \quad \zeta(z) = \frac{i \hat{w}(z)}{\omega - k\bar{u} - l\bar{v}}$$

für $z = 0$. Hierdurch wird nicht nur die Vertikalposition der Oberfläche beschrieben, sondern auch diejenige einer beliebigen Isopykne mit Ruhelage z . Diese Beziehung wird zum Vergleich mit gemessenen Temperaturspektren benötigt. Für die Temperatur wird wie oben eine Störungsansatz gemacht:

$$T = \bar{T}(z) + T'(x, y, z, t),$$

wobei \bar{T} als "glatt" vorausgesetzt wird. Analog zu ζ ergibt sich:

$$(2.28) \quad \hat{T}(z) = -i \frac{\frac{d\bar{T}}{dz} \hat{w}}{\omega - k\bar{u} - l\bar{v}}$$

\hat{T} und \hat{S} unterscheiden sich also nur um einen konstanten Faktor, dem Gradienten des mittleren Temperaturprofils.

Die Funktion

$$(2.29) \quad Q(z) = \frac{N^2 - (\omega - k\bar{u} - l\bar{v})}{(\omega - k\bar{u} - l\bar{v})^2} z^2 + \frac{k\bar{u}'' + l\bar{v}''}{\omega - k\bar{u} - l\bar{v}}$$

bestimmt das Lösungsverhalten von (2.16), das vom exponentiellen Typ für $Q < 0$ und vom sinusoidalen Typ für $Q > 0$ ist. Die Definition (2.29) ist hier zur Vereinfachung späterer Erörterungen eingeführt worden.

Die Gleichung (2.16), die i.a. nur für ebenen Strom \bar{u} untersucht wurde, ist als Taylor-Goldstein-Gleichung bekannt. Zusammen mit den Randbedingungen (2.22) und (2.27) ergibt sich ein Eigenwertproblem, das schon mehrfach angesprochen wurde. Im Rahmen des Problems treten zwei Mechanismen der Wechselwirkung von Störungen und Grundströmung auf. Die Scherungsinstabilität wurde bereits beim Übergang von Gleichung (2.15) zu (2.16) erörtert. Der zweite Mechanismus ist die Absorption von Wellenenergie in kritischen Schichten. An den Orten z_c mit $\omega = k\bar{u}(z_c) + l\bar{v}(z_c)$ treten in (2.16) Singularitäten auf. Es ist auch in einem solchen Fall durchaus möglich, von Eigenwerten und Eigenfunktionen zu sprechen. Es gibt auch neutrale Moden. Die Eigenschaft der Vollständigkeit gewinnt das Problem nur durch die Berücksichtigung auch der singulären Fälle (BELL, 1974). Einen Überblick über die gesamte Lösungsmannigfaltigkeit des erörterten Eigenwertproblems geben die Arbeiten von BANKS et al. (1976) und HOWARD & MASLOWE (1972). Die Singularitäten sind eine Folge der Transformation in den Wellenzahl-Frequenz-Raum. Geht man davon aus, daß in der Natur alle Prozesse von endlicher spektraler Bandbreite sind, so kommt ihnen keine physikalische Realität zu. In dem zum Eigenwertproblem gehörigen Anfangswertproblem treten sie dementsprechend nicht auf (z.B. CASE, 1960).

Mit vertikal fortschreitenden internen Wellen in der Nähe kritischer Tiefen befassen sich die Untersuchungen von BRETHERTON (1966) und BOOKER & BRETHERTON (1967). JONES (1967) und GRIMSHAW (1974) behandeln das Problem für rotierende Bezugssysteme. Das wesentliche Ergebnis ist, daß vertikal fortschreitende Wellen in kritischen Tiefen absorbiert werden, sofern Ri groß ist. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, das interne Wellenfeld durch Überlagerung nichtsingulärer, neutraler Moden zu erzeugen. Dieser Ansatz kann nur dann erfolgversprechend sein, wenn die Absorption in kritischen Tiefen keine große Rolle spielt. In der Diskussion der Ergebnisse wird darauf eingegangen.

Zum Schluß dieses Kapitels muß noch die Normierung der Eigenfunktionen behandelt werden. Dazu wird eine Gleichung für die mechanische Energie benötigt. Man erhält sie aus (2.2) bis (2.4) durch Multiplikation mit \underline{u}' und Mittelung über eine Periode bzw. Wellenlänge:

$$(2.30) \quad \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{\rho_0}{2} \overline{\underline{u}' \cdot \underline{u}'} + \frac{\rho_0}{2} N^2 \overline{y^2} \right) = \\ = -\nabla \cdot (\overline{p' \underline{u}'}) - \rho_0 \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \overline{u' w'} - \frac{d\bar{v}}{dz} \overline{v' w'} \right).$$

Schreibt man symbolisch $D_0/Dt (T+V) = P+F$, so bedeutet T die kinetische und V die potentielle Energie. P ist ein durch die Strömungsgeschwindigkeit \underline{u}' verursachter Energiefluß, während F die Wechselwirkung zwischen dem mittleren und dem fluktuierenden Feld beschreibt. Für ebene, vertikal stehende, freie Wellen ist $P \equiv 0$ und $F \equiv 0$. Im Rahmen der WKB-Näherung können sich Wellengruppen in einer Scherströmung ausbreiten, ohne mit dieser an anderen Orten als in kritischen Tiefen in Wechselwirkung zu treten (RUDDICK & JOYCE, 1979). Im Problem stationärer Leewellen tauschen vertikal fortschreitende Komponenten

Impuls mit der Grundströmung aus. Bei stehenden Wellen addieren sich die Austauschterme gerade zu Null (ELIASSEN & PALM, 1960).

Aus (2.30) ergibt sich zunächst die Energie pro Einheitsvolumen, und zwar unter Berücksichtigung von (2.6), (2.16) bis (2.18) und (2.21):

$$(2.31) \quad E_v = \frac{\rho_0}{4} \left\{ \left[\frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{l\bar{u}' - k\bar{v}'}{\omega - k\bar{u} - l\bar{v}} \right)^2 + \frac{N^2}{(\omega - k\bar{u} - l\bar{v})^2} + 1 \right] \hat{W}^2 + \frac{\hat{W}'^2}{\alpha^2} \right\}$$

Striche bedeuten jetzt wieder d/dz . Daraus folgt die Energie pro Einheits-Oberfläche durch partielle Integration:

$$(2.32) \quad E_{\text{ges}} = \frac{\rho_0}{4} \int_{-H}^0 dz \left\{ \frac{2N^2}{(\omega - k\bar{u} - l\bar{v})^2} + \left(\frac{l\bar{u}' - k\bar{v}'}{\alpha(\omega - k\bar{u} - l\bar{v})} \right)^2 + \frac{k\bar{u}'' + l\bar{v}''}{\alpha^2(\omega - k\bar{u} - l\bar{v})} \right\} \hat{W}^2$$

Diese Beziehung gilt für eine starre Oberfläche. Sie wird zur Normierung in der Art benutzt, daß die Gesamtenergie einer Mode den Wert 1 annimmt. Die Eigenfunktionen verschiedener Moden verhalten sich im allgemeinen nicht orthogonal zueinander. Trotzdem treten in der Formulierung des Spektralmodells keine Schwierigkeiten auf, da die statistische Orthogonalität verschiedener Moden angenommen wird.

3. Dispersionskurven und Moden für "GATE 1974, Phase III"

Die Berechnungen von Moden und Dispersionskurven für den GATE-Fall beruhen auf Profilen der mittleren Schichtung und Strömung, N^2 und \bar{u} , die aus den Messungen (KÄSE et al., 1978) durch Glättung gewonnen sind. Es wird von einer ebenen Grundströmung ausgegangen (Richtung: rechtweisend 75°), was von den Messungen (Abb. 1.2) insbesondere im

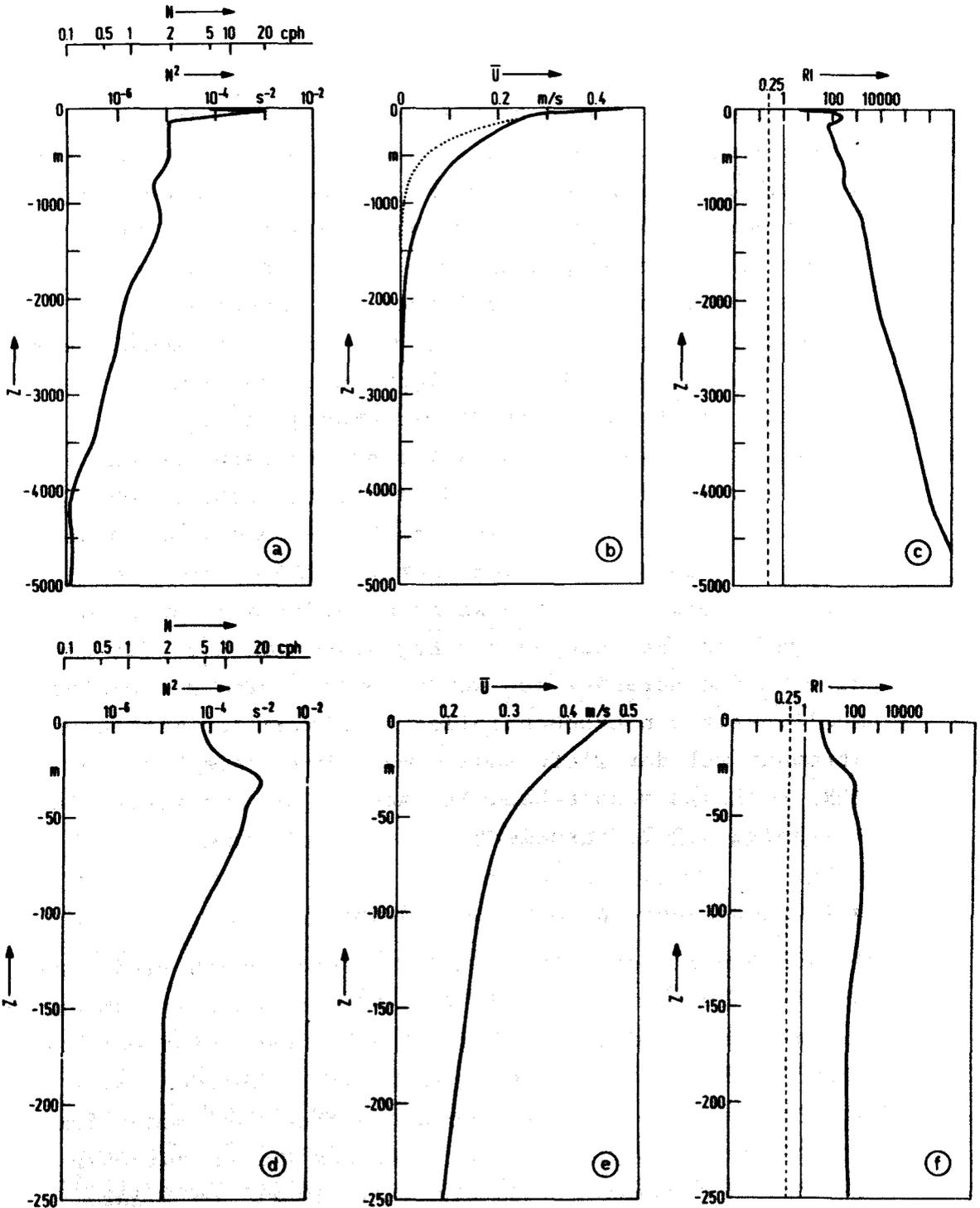


Abb. 3.1 a bis f

Den Modellrechnungen zugrundegelegte mittlere Profile $N^2(z)$ und $\bar{u}(z) = (\bar{u}, 0)$ und das zugehörige Profil der Richardsonzahl Ri . In Teil b ist punktiert ein alternatives Geschwindigkeitsprofil angegeben, das im Abschnitt 3.2.7 behandelt wird. Teile d-f: Ausschnitt der obersten 200 m Tiefe (Deckschicht und tropische Sprungschicht). Die Hauptsprungschicht liegt bei 1200 m Tiefe.

später behandelten Tiefenbereich von 0 bis 60 m nur wenig abweicht. Die Modellrechnungen werden durch diese Vereinfachung sehr erleichtert, während eine wesentliche Beeinflussung der Rechenergebnisse nicht zu erwarten ist. Die hauptsächliche Begründung dafür ist die Tatsache, daß die Modellspektren Ergebnis einer Integration über die Richtung φ in der Horizontalebene sind (Gleichung 4.14). Im allgemeinen ändert sich das Integral bei Drehung der Stromrichtung um kleinere Winkel nur wenig. In Abb. 3.1 sind die verwendeten Profile von $N^2(z)$ und $\bar{u}(z)$ dargestellt, zusätzlich auch die zugehörige Richardsonzahl. Strömungsmessungen liegen bei GATE nur in den obersten 200 m Tiefe vor. Mangels geeigneter Daten konnten leider auch keine geostrophischen Rechnungen zur Ergänzung von $\bar{u}(z)$ für größere Tiefen herangezogen werden. Daher wird als einfache Möglichkeit ein exponentielles Abklingen der mittleren Strömung mit der Tiefe angenommen. Zwei verschiedene Abklingskalen sind behandelt (Abb. 3.1b) und werden in Abschnitt 3.2.7 diskutiert.

3.1 Rechnungen ohne mittleren Strom

Da von einer ebenen Grundströmung ausgegangen wird, erhält man für $\bar{u} = 0$ und für $\varphi = 90^\circ$ (Wellen quer zum Strom) die gleichen Moden. Abbildungen von diesen sind entsprechend im nächsten Abschnitt zu finden. Abbildung 3.2 stellt die Dispersionskurven der ersten fünf Moden für den gesamten Frequenzbereich interner Wellen zwischen f (Coriolisparameter) und dem Maximalwert von N dar. Für $\omega < 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ist die Erdrotation berücksichtigt:

$$(3.1) \quad \hat{u}'' + \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} \kappa^2 \hat{u} = 0 ;$$

$f = 2.23 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ entsprechend einer geographischen Breite von $8^\circ 50'$. Der relative Fehler des Eigenwertes κ infolge der Vernachlässigung der Erdrotation erreicht bei $\omega = 0.29 \text{ cph}$ den Wert von $1^\circ/\infty$.

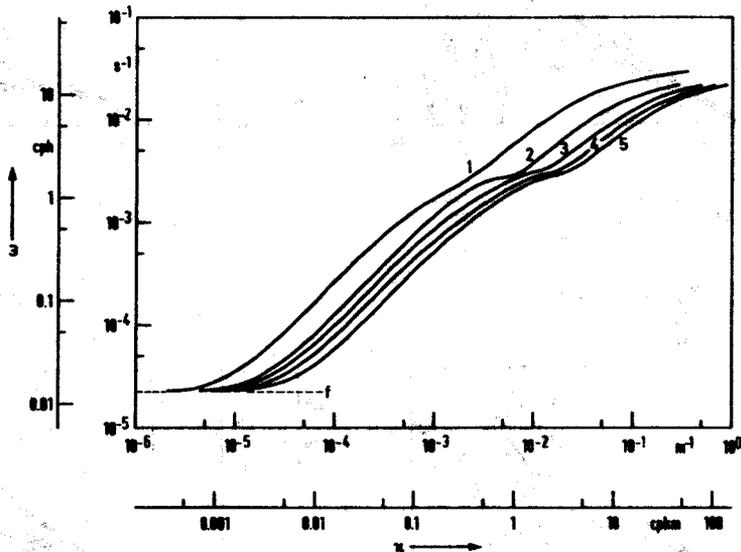


Abb. 3.2 Dispersionsdiagramm der ersten 5 Moden für N_{GATE} und $\bar{u} = (0,0)$ (Fall 3). Für $\omega < 10^{-3} s^{-1}$ ist die Erdrotation berücksichtigt. Der Coriolisparameter entspricht $8^{\circ}50'$ Breite.

Entscheidend für den Verlauf der Dispersionskurven ist die Schicht mit $N \approx 2$ cph zwischen 200 und 600 m Tiefe (Abb. 3.1a). Die Tiefe, in der $\omega^2 = N^2$ (allgemeiner: $Q(z) = 0$) ist, wird hier als "Reflexionstiefe" (auch "Reflexionspunkt") bezeichnet (turning point). Vertikal fortschreitende Wellen werden dort totalreflektiert. Die Reflexionstiefe wandert mit zunehmender Wellenzahl oder Frequenz in der Nähe von $\omega = 2$ cph äußerst schnell von über 500 auf unter 200 m Tiefe. Entsprechend schnell wächst α in Abhängigkeit von ω in diesem Bereich. Die zugehörige Veränderung der Form der Moden ist z.B. aus dem Vergleich von Abb. 3.7 mit 3.10 zu ersehen. Die Bedeutung der korrespondierenden Änderung ihrer Energie ist in KÄSE & CLARKE (1978) behandelt und wird in Kapitel 9 wieder aufgegriffen.

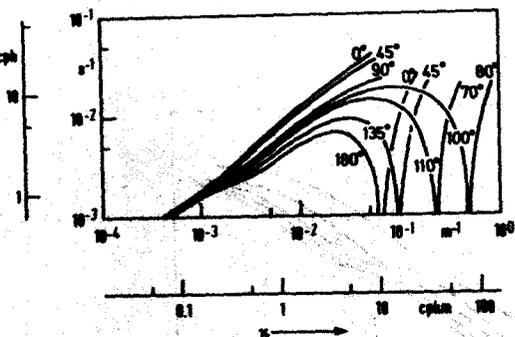


Abb. 3.3a Mode 1

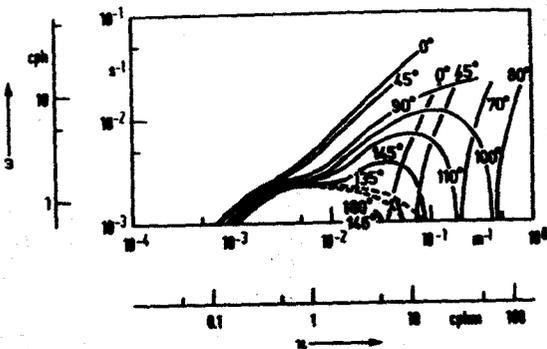


Abb. 3.3b Mode 2

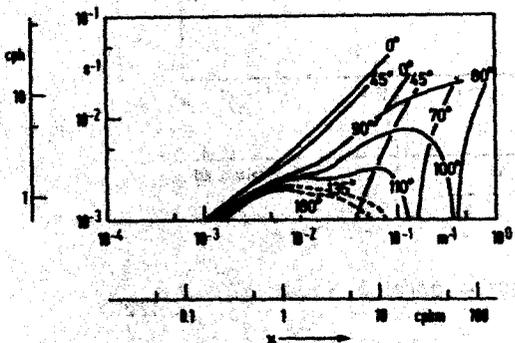


Abb. 3.3c Mode 3

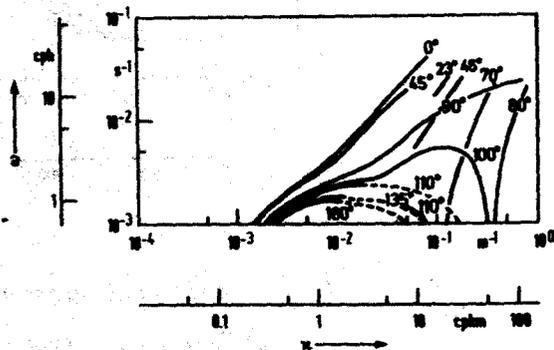


Abb. 3.3d Mode 4

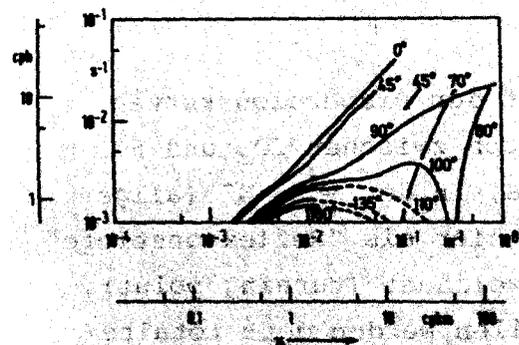


Abb. 3.3e Mode 5

Abb. 3.3 a bis e Dispersionsdiagramme der Moden 1 bis 5 für N_{GATE} und \bar{u}_{GATE} gemäß Abb. 3.1 (Fall 4). Die angegebenen Winkel beziehen sich auf die Richtung des mittleren Stromes (i.e. $0^\circ = \text{stromabwärts}$, $180^\circ = \text{stromaufwärts}$). Die Kurven für $+\varphi$ und $-\varphi$ sind identisch, da der mittlere Strom eben ist. Die in den rechten Bildteilen befindlichen Kurven großer positiver Steigung gehören zu den langsamen, stromabwärts gerichteten Wellen. Bei den gestrichelten Kurventeilen hat die zugehörige Mode im wesentlichen nur in der Hauptsprungschicht Energie. Die am unteren Rand von 3.3b und 3.3d befindlichen kurzen Kurven negativer Steigung gehören zu Wellen der tropischen Sprungschicht. Es ist daher durchaus sinnvoll, daß in 3.3d zwei Kurven zu $\varphi = 110^\circ$ zu finden sind.

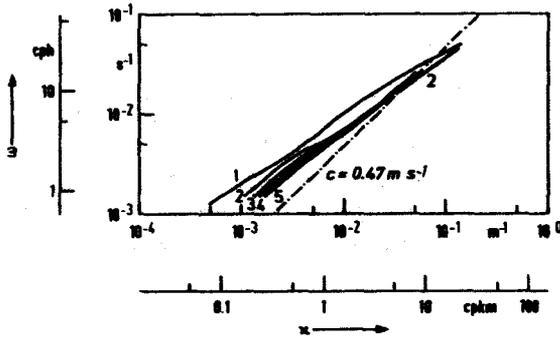


Abb. 3.4

Dispersionskurven der Moden 1 bis 5 in einem mit 50 cm s^{-1} gegen den mittleren Strom bewegten Inertialsystem für Wellen, die von sich aus gegen den Strom gerichtet sind ($\varphi = 0^\circ$ im o.a. System). Mode 1: Die Dispersionskurven der stromaufwärts und langsamen, stromabwärts gerichteten Wellen bilden im neuen System eine zusammenhängende Kurve. Mode 2: In einem Bereich von Wellenzahlen und Frequenzen treten zwei

Kurven auf, die zu Wellen der Hauptsprungschicht bzw. der tropischen Sprungschicht (rechte Kurve) gehören.

3.2 Rechnungen unter Berücksichtigung des mittleren Stromes

Die Dispersionskurven der behandelten ersten fünf Moden sind in Abb. 3.3 dargestellt. Im Vergleich zu 3.2 tritt die Abhängigkeit von der Richtung der Wellen relativ zum mittleren Strom ($\varphi = 0^\circ$) hinzu. Der Einfluß von Dopplertermen und Stromscherung nimmt generell mit zunehmender Wellenzahl zu. Die Phasengeschwindigkeit $c = \omega/k$ nimmt nämlich mit k ab, und die Moden erstrecken sich bei großem k in der Vertikalen nur über die tropische Sprungschicht, wo \bar{u} und $|\bar{u}'|$ groß sind. Durch Advektion kann die eigentliche, d.h. auf das eine Wellengruppe umgebende Flüssigkeitsvolumen bezogene, Richtung von Wellen hinreichend kleiner Phasengeschwindigkeit umgekehrt werden. Daher wird zwischen "schnellen" und "langsamen" Wellen unterschieden. Die ersteren sind in den Dispersionsdiagrammen oberhalb der Geraden $c = \bar{u}_{\text{max}}$ (in Abb. 3.4 eingetragen), die letzteren unterhalb derselben zu finden.

3.2.1 Schnelle Wellen in Stromrichtung ($|\varphi| < 90^\circ$)

Bei Wellen, die von sich aus eine stromabwärtige Richtungskomponente haben, werden durch Advektion Frequenz und Phasengeschwindigkeit im ortsfesten Bezugssystem erhöht. Die

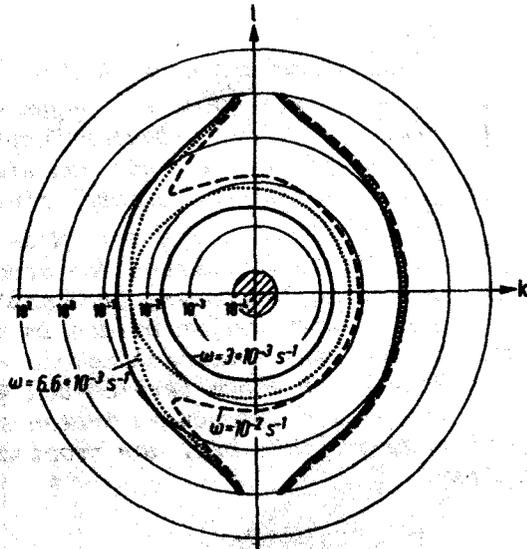


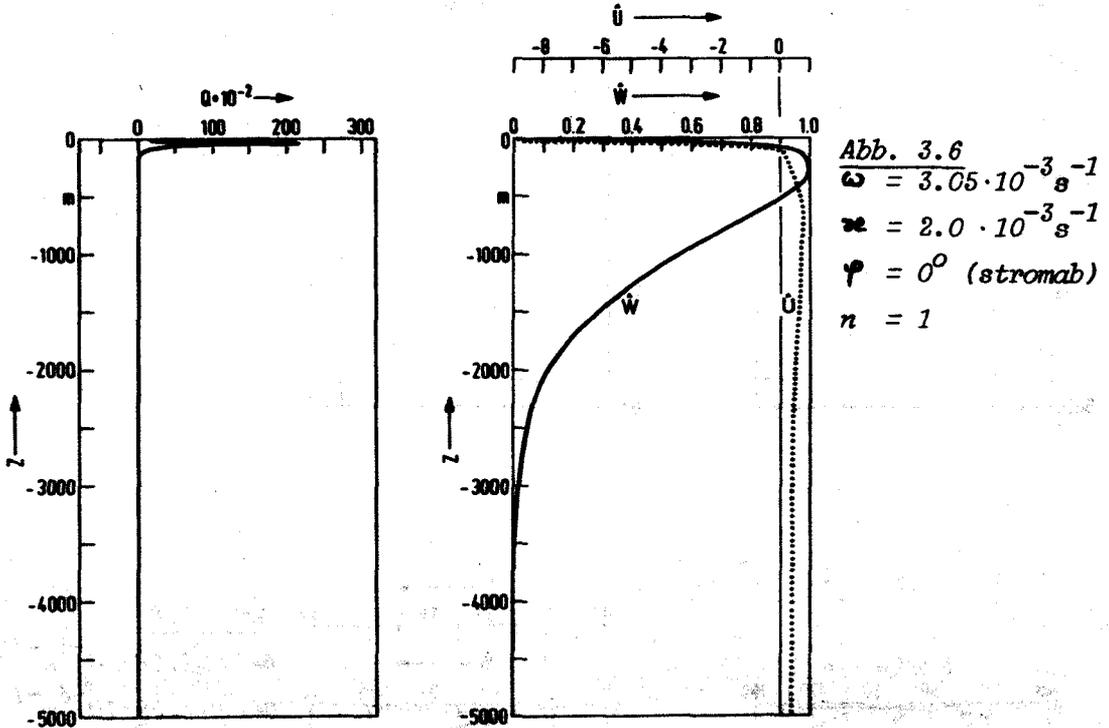
Abb. 3.5
Mögliche Orte von Wellenzahlvektoren für Mode 1 und drei verschiedene Frequenzen; logarithmische Polarkoordinaten. Die linke Bildhälfte entspricht stromauf-, die rechte Bildhälfte stromabwärts gerichteten Wellen.

durch die Stromscherung verursachte Verformung der Moden kann als "Verschiebung nach oben" beschrieben werden. Die Vertikalskala verringert sich; Nulldurchgänge von \hat{u} bei Mode 1 und \hat{w} und \hat{u} bei höheren Moden verlagern sich zu kleineren Tiefen hin (Abb. 3.6 verglichen mit 3.7, 3.9 mit 3.10, 3.14 mit 3.15). Kritische Tiefen treten im behandelten Fall nicht auf.

3.2.2 Stromaufwärts gerichtete Wellen ($|\varphi| > 90^\circ$)

Durch die Wirkung der Advektion werden in diesem Fall Frequenz und Phasengeschwindigkeit im ortsfesten System erniedrigt. Gegenüber dem vorigen Abschnitt sind die Verhältnisse aber komplizierter. Den Abbildungen 3.3 a bis e kann man entnehmen, daß die Grundströmung bei zunehmender Wellenzahl zuerst eine Umkehr der Gruppengeschwindigkeit $c_{gr} = (\partial\omega/\partial k)_\varphi$, dann auch eine Umkehr der Phasengeschwindigkeit bewirkt. Der letztere Umkehrpunkt liegt bei $\omega = 0$ und ist in Abb. 3.3 nicht enthalten. Logisch zusammengehörig sind die Kurven mit $\varphi' = |\varphi - 180^\circ|$ auf den beiden Seiten des Umkehrpunktes. In einem geeignet gewählten Inertialsystem tritt nur eine zusammenhängende Kurve

Abb. 3.6 bis 3.21, 3.23 Eigenfunktionen \hat{w} , \hat{u} und \hat{v} für N_{GATE} und \bar{u}_{GATE} (Fall 4). $Q(z)$ ist in (4.29) definiert; es hat die Einheit m^{-2} . Frequenz ω , Wellenzahl κ , horizontaler Winkel φ der Wellen und Modeindex n sind bei den einzelnen Abbildungen angegeben. Diese Angaben können in Abb. 3.3a bis e mit den Dispersionskurven verglichen werden. $\varphi = 90^\circ$ entspricht $\bar{u} = (0,0)$. Die punktierten horizontalen Linien in einigen Abbildungen geben die Tiefe des Anfangs- bzw. Endpunktes der Integration an (Anhang, I.3).



auf (Abb. 3.4, Mode 1). Einiger Besonderheiten wegen werden die advektiv in Stromrichtung gezwungenen Wellen im nächsten Abschnitt behandelt. Der Verlauf der Dispersionskurven gibt eine kinematisch bedingte Anisotropie vor. Insbesondere werden bei hohen Frequenzen Richtungsgebiete um $\varphi = 180^\circ$ herum ausgeblendet. Abb. 3.5 stellt mögliche Orte von Wellenzahlvektoren für die erste Mode dar.

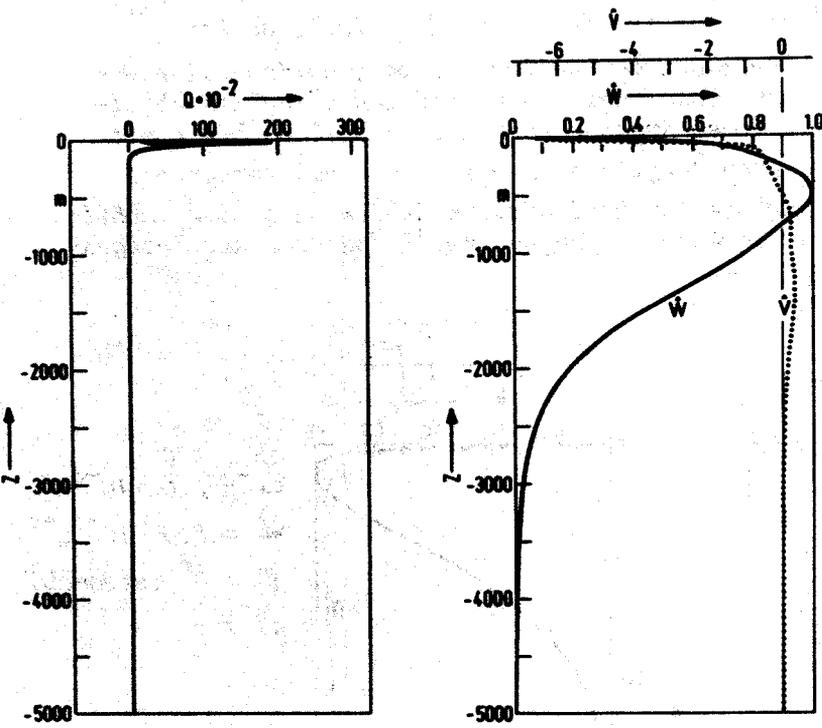


Abb. 3.7

$$\omega = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha = 2.07 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\varphi = 90^\circ$$

$$n = 1$$

s. auch Abb. 3.6

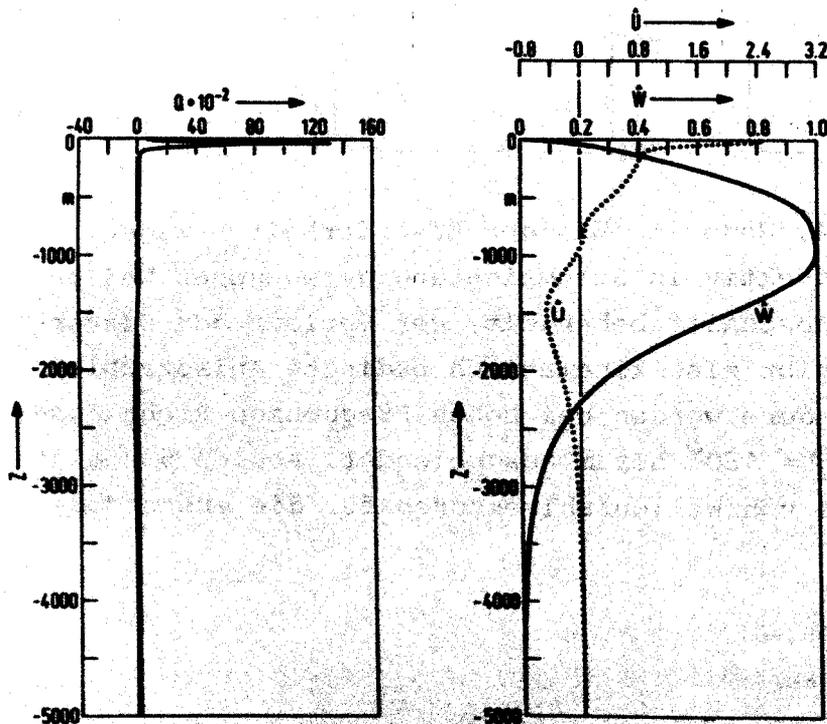


Abb. 3.8

$$\omega = 2.08 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha = 1.99 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\varphi = 180^\circ$$

$$n = 1$$

s. auch Abb. 3.6

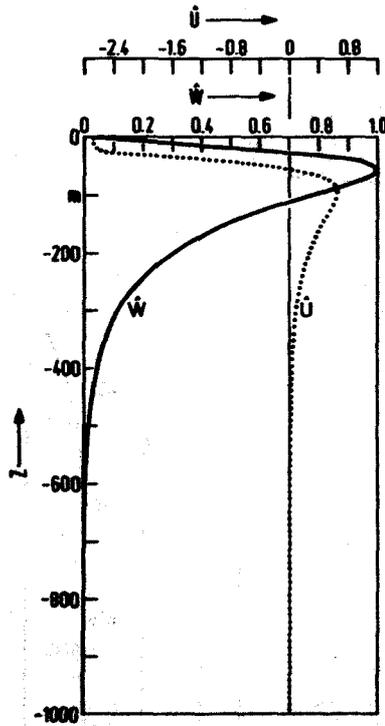
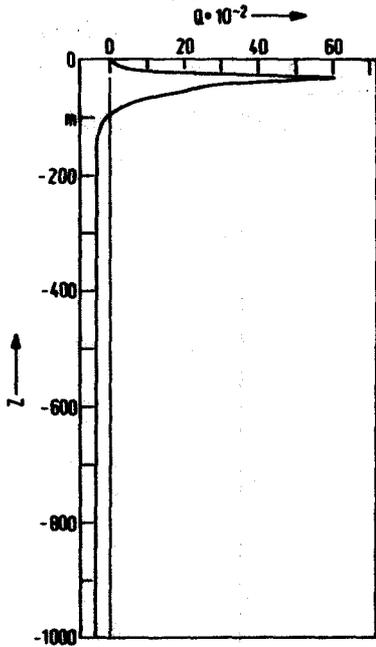


Abb. 3.9

$\omega = 1.21 \cdot 10^{-2} s^{-1}$

$\kappa = 1.01 \cdot 10^{-2} m^{-1}$

$\gamma = 0^\circ$

$n = 1$

s. auch Abb. 3.6

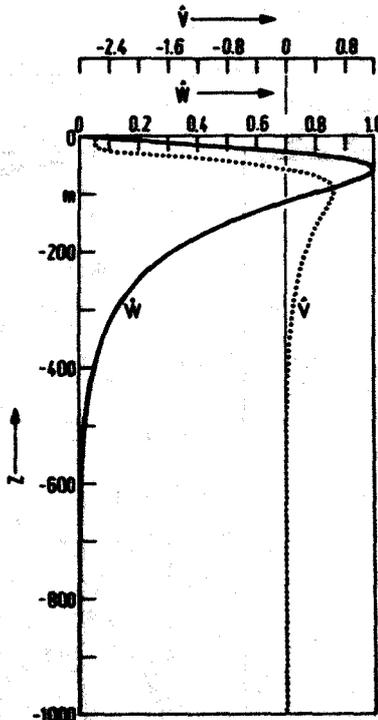
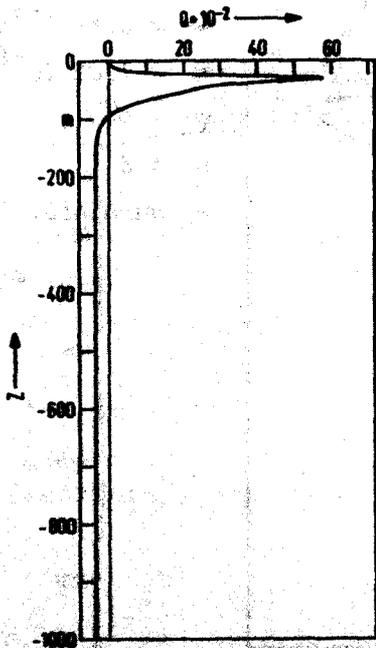


Abb. 3.10

$\omega = 8.59 \cdot 10^{-3} s^{-1}$

$\kappa = 1.01 \cdot 10^{-2} m^{-1}$

$\gamma = 90^\circ$

$n = 1$

s. auch Abb. 3.6

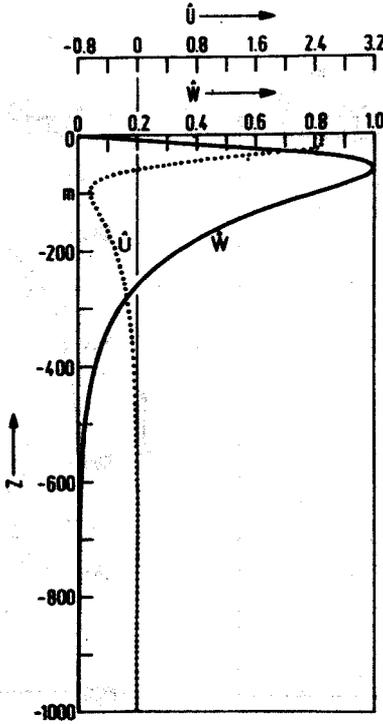
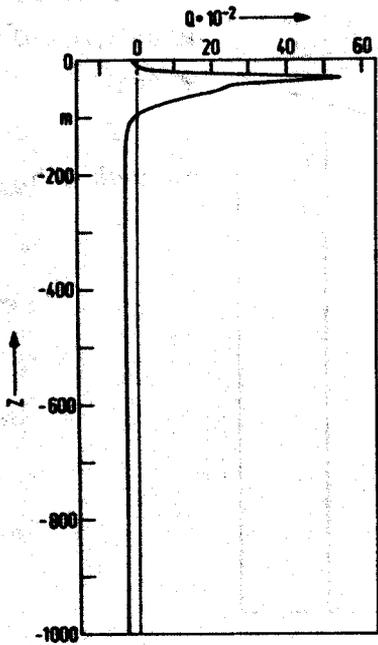


Abb. 3.11

$\omega = 5.10 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

$\alpha = 1.00 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$

$\varphi = 180^\circ$

$n = 1$

s. auch Abb. 3.6

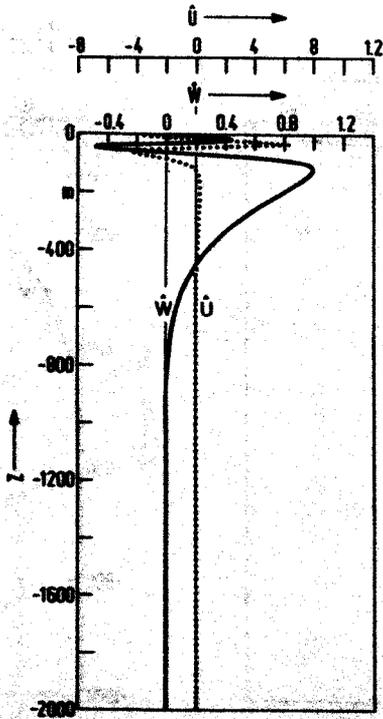
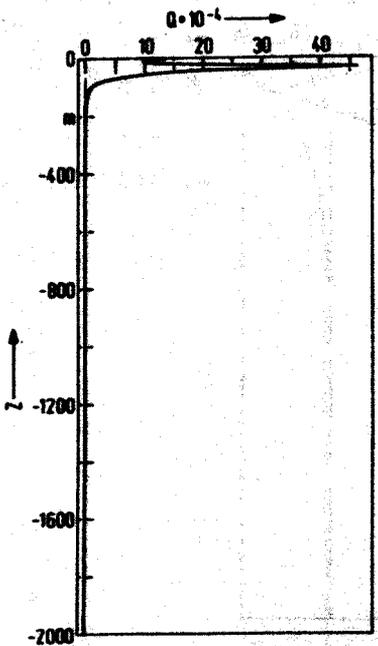


Abb. 3.12

$\omega = 5.6 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

$\alpha = 1.02 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$

$\varphi = 0^\circ$

$n = 3$

s. auch Abb. 3.6

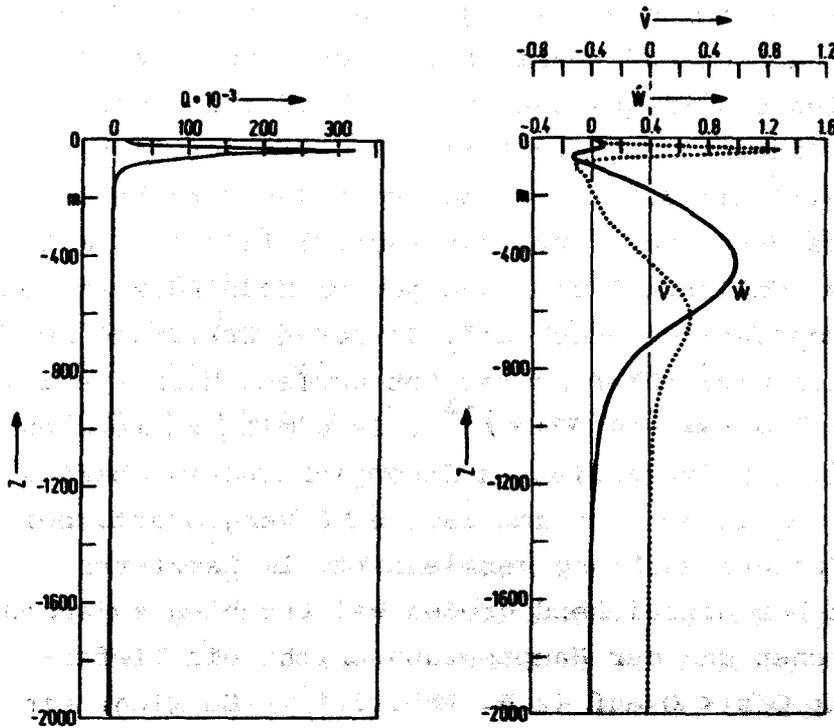


Abb. 3.13

$\omega = 3.1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

$\alpha = 1.05 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$

$\varphi = 90^\circ$

$n = 3$

s. auch Abb. 3.6

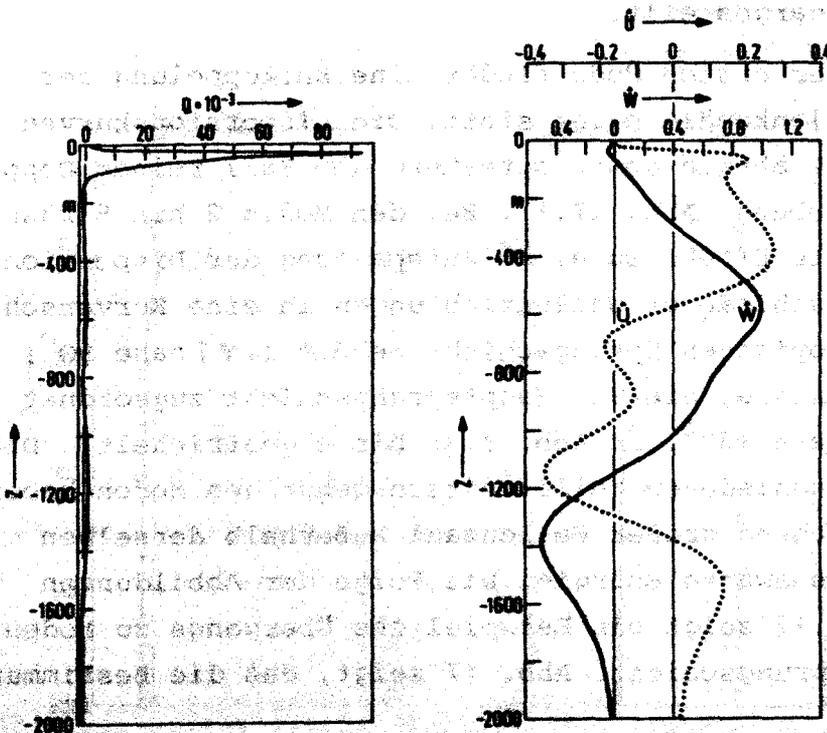


Abb. 3.14

$\omega = 1.84 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

$\alpha = 9.99 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

$\varphi = 180^\circ$

$n = 3$

s. auch Abb. 3.6

Die Verformung der Moden unter dem Einfluß der Stromscherung kann analog zum vorigen Abschnitt als "Verschiebung nach unten" bezeichnet werden. Für kleine Wellenzahlen und Frequenzen ist die Verformung von gleicher Größenordnung wie dort (Abb. 3.8 verglichen mit 3.7, 3.11 mit 3.10). Für höhere Moden wird bald eine starke Verformung erreicht (Abb. 3.14/3.13). Mit zunehmender Wellenzahl und zunehmendem Modeindex treten grundlegende Veränderungen auf. Zu deren Erklärung muß die Funktion $Q(z)$ näher betrachtet werden, hier speziell der Faktor $(\omega - \alpha \bar{u}(z) \cos \varphi)^{-2}$. Da \bar{u} mit $|z|$ monoton abnimmt, wird Q für Wellen in Stromrichtung in Oberflächennähe, verglichen mit dem Fall $\bar{u} \equiv 0$ vergrößert, bei stromaufwärtiger Richtung verkleinert. Im letzteren Fall tritt bei hinreichend großen Wellenzahlen zwischen der tropischen und der Hauptsprungschicht ein Tiefenbereich mit $Q(z) < 0$ auf (z.B. Abb. 3.14). Es liegt ein System mit zwei "Wellenleitern" vor, deren Kopplung mit zunehmender horizontaler, somit auch vertikaler Wellenzahl, schwächer wird. Genaueres dazu wird im nächsten Abschnitt dargestellt.

Im Falle der ersten Mode findet eine Entkoppelung der beiden Wellenkanäle nicht statt. Die Dispersionskurven (Abb. 3.3a) ähneln dementsprechend dem Fall reiner Dopperverschiebung (Abb. II.1). Bei den Moden 2 bis 5 führt der genannte Effekt zu einer Aufspaltung der Dispersionskurven verschiedener Wellenrichtungen in eine Kurvenschar, die zur tropischen Sprungschicht gehört ($|\varphi|$ nahe 90°) und eine andere, die der Hauptsprungschicht zugeordnet ist ($|\varphi|$ nahe 180° , in Abb. 3.3b bis e gestrichelt). Die zu den verschiedenen Wellenleitern gehörigen Moden haben bei hinreichend großer Wellenzahl außerhalb derselben keine nennenswerte Energie. Die Folge der Abbildungen 3.15 bis 3.17 zeigt ein Beispiel des Übergangs zu Moden der Hauptsprungschicht. Abb. 17 zeigt, daß die Bestimmung

des Modeindex schwierig sein kann. Trotz des Nulldurchgangs von \hat{w} bei ca. 70 m Tiefe (3.17b) liegt de facto eine erste Mode vor, da die Amplituden oberhalb von 500 m Tiefe verschwindend klein sind. Unterschiedliche Veränderungen im Modeindex bei zunehmender Wellenzahl treten auf (z.B. $5 \rightarrow 4$, Abb. 3.18; $5 \rightarrow 2$, Abb. 3.19). Der Verlauf der gestrichelten Teile der Dispersionskurven in Abb. 3.3b bis e ist möglicherweise nicht sehr genau. Glücklicherweise spielt diese Ungenauigkeit für die Modellrechnungen keine Rolle, da nur eine Darstellung oberflächennaher Vorgänge angestrebt wird.

Der Entkoppelung der beiden Wellenleiter wegen treten bei hohen Wellenzahlen und kleinen Frequenzen zusätzliche Dispersionskurven auf, die der tropischen Sprungschicht zugeordnet sind. Diese schneiden z.T. die gestrichelten Kurven, so daß es in einigen Fällen zum gleichen Quadrupel ($\omega, \alpha, \gamma, n$) zwei verschiedene Moden gibt, die allerdings zu physikalisch voneinander getrennten Systemen gehören.

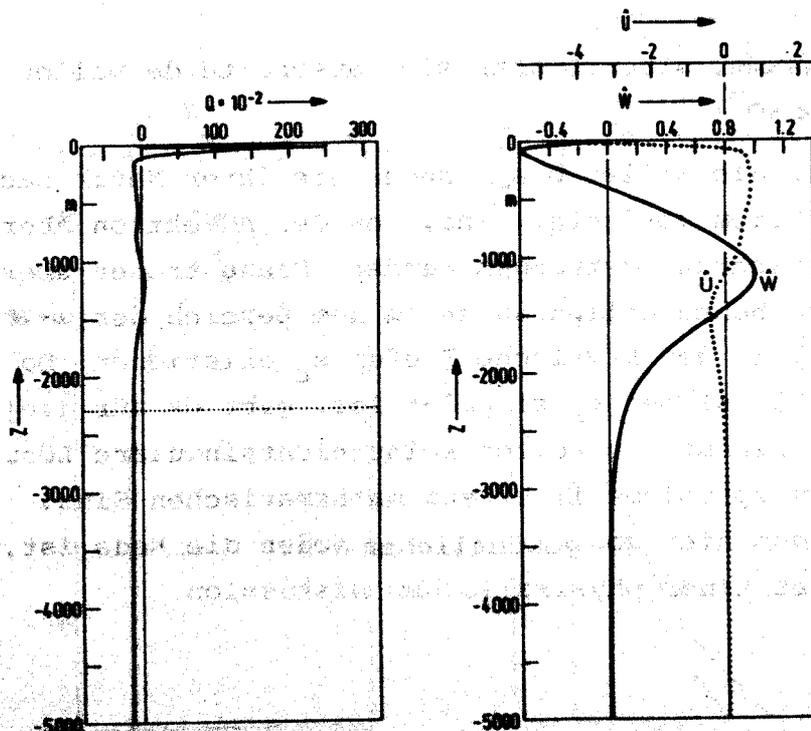


Abb. 3.15
 $\omega = 2.00 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
 $\alpha = 2.93 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$
 $\gamma = 180^\circ$
 $n = 2$
 s. auch Abb. 3.6

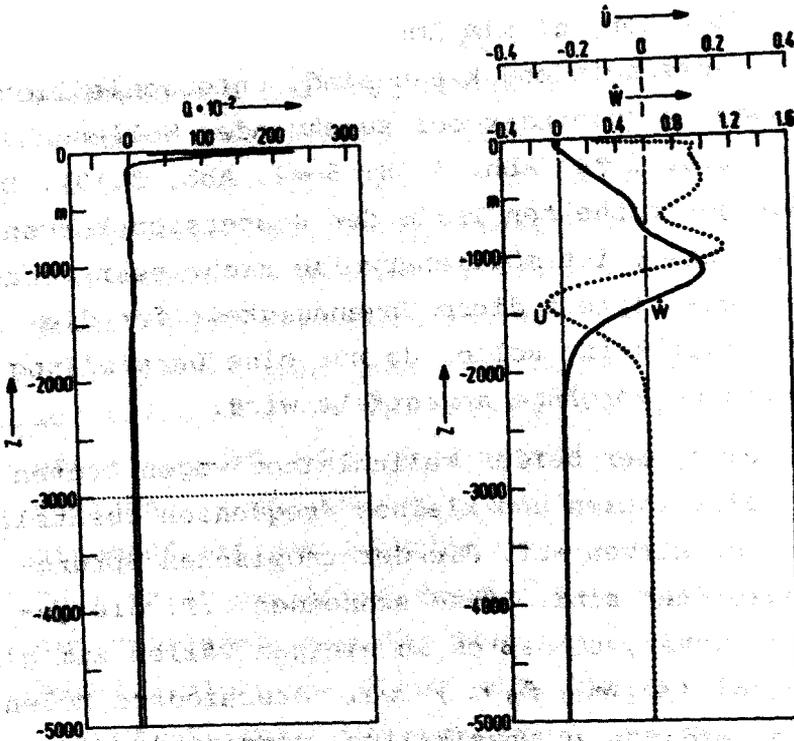


Abb. 3.16

$$\omega = 2.20 \cdot 10^{-3} s^{-1}$$

$$\alpha = 7.34 \cdot 10^{-3} m^{-1}$$

$$\varphi = 180^\circ$$

$$n = 2$$

s. auch Abb. 3.6

3.2.3 Langsame, stromabwärts sich ausbreitende Wellen ($|\varphi| < 90^\circ$)

Hier werden die Wellen besprochen, die ihrer Natur nach gegen den Strom gerichtet sind, von der Advektion aber in dessen Richtung gezwungen werden. Diese treten überwiegend bei hohen Wellenzahlen in dem Bereich der ω - α -Ebene auf, in dem kritische Tiefen z_c existieren. Da Gleichung (2.16) bei z_c singulär ist, gibt es für die behandelte Klasse von Wellen keine nichtsinguläre Lösung des Eigenwertproblems im streng mathematischen Sinn. Wenn trotzdem hier von gewöhnlichen Moden die Rede ist, so bedarf es einer physikalischen Diskussion.

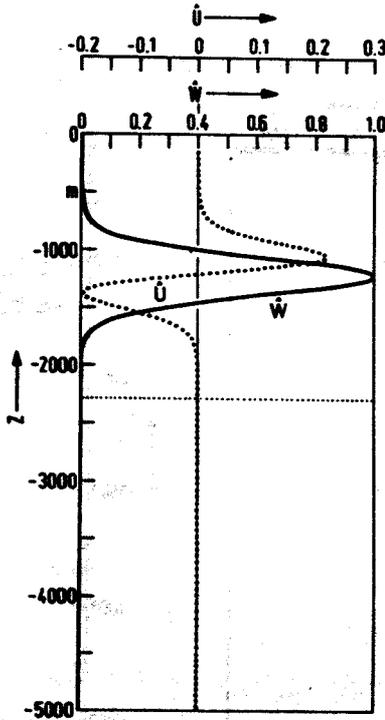
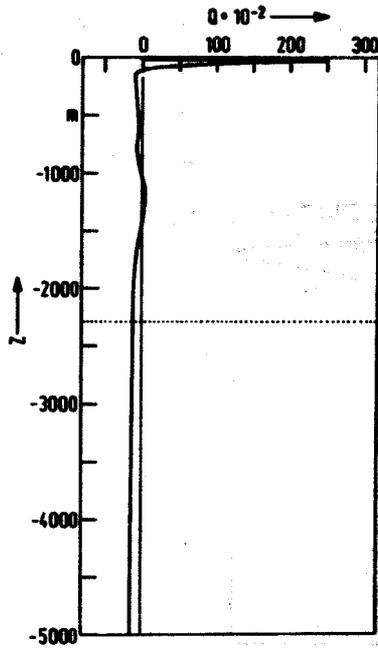


Abb. 3.17a

$\omega = 2.00 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

$\alpha = 1.70 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$

$\gamma = 180^\circ$

$n = 2 (!)$

s. auch Abb. 3.6

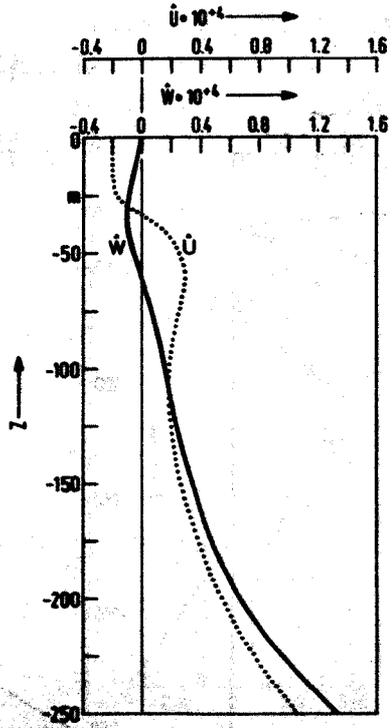
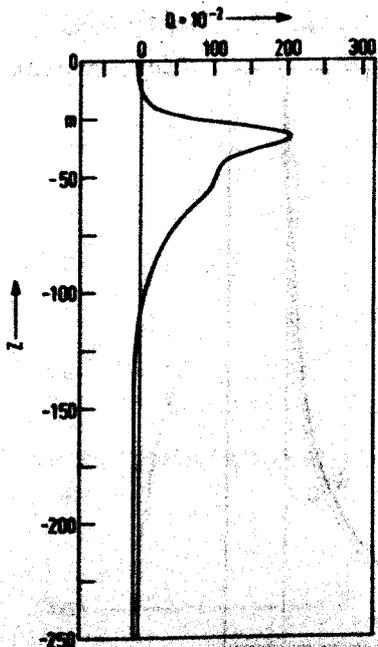


Abb. 3.17b

wie oben;

Tiefenausschnitt

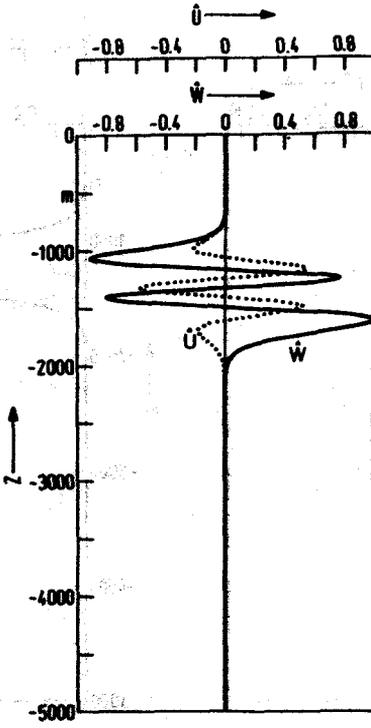
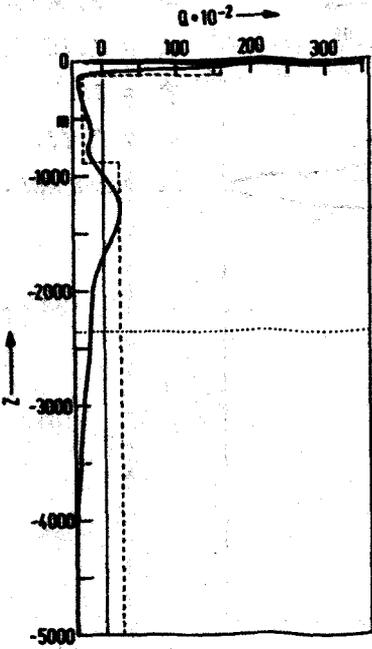


Abb. 3.18a

$\omega = 1.30 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

$\alpha = 2.73 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$

$\varphi = 180^\circ$

$n = 5 (!)$

s. auch Abb. 3.6

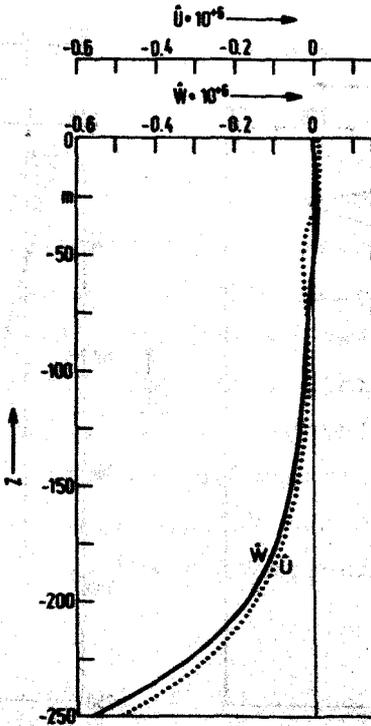
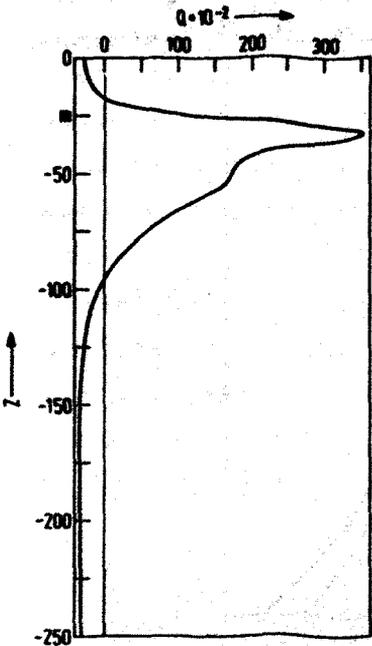


Abb. 3.18b

wie oben;

Tiefenausschnitt

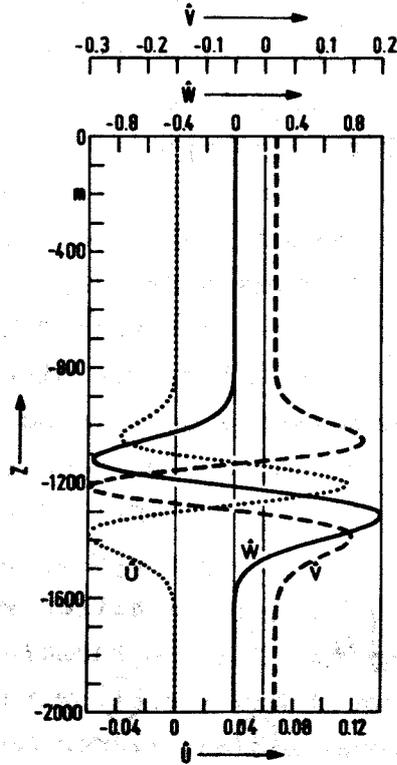
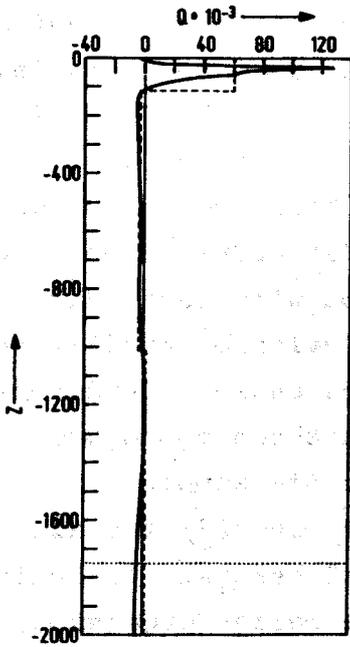


Abb. 19a

$\omega = 2.00 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

$\alpha = 4.93 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$

$\psi = 110^\circ$

$n = 5 (!)$

s. auch Abb. 3.6

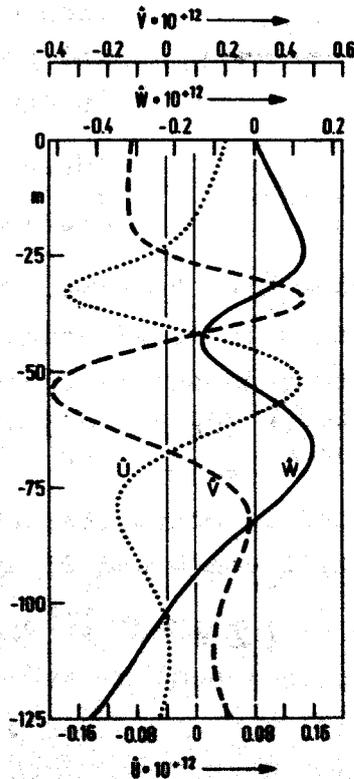
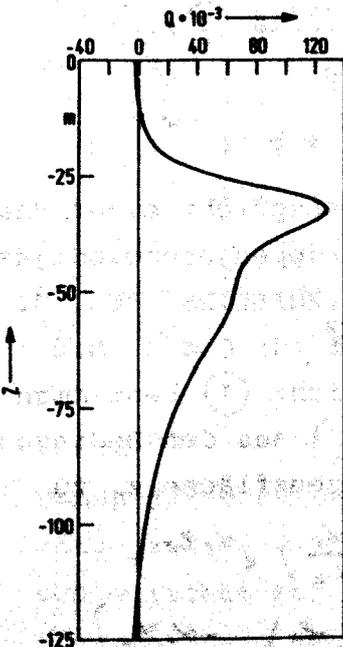


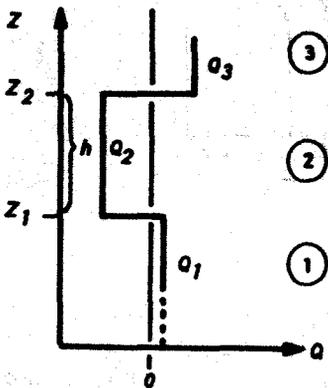
Abb. 3.19b

wie oben;

Tiefenausschnitt

3.2.4 Tunneleffekt, Näherungsrechnung

Der Grad der Reflexion vertikal fortschreitender Wellen in der Reflexionstiefe z_{tp} hängt vom weiteren Verlauf der Funktion $Q(z)$ für $|z| > |z_{tp}|$ ab. Gilt $Q < 0$ so weit, daß die Amplitude der Wellen fast auf Null abgeklungen ist, so ist die Reflexion praktisch vollständig; Moden können entstehen. In diesem Fall spielt es keine Rolle, ob weiter entfernt eine kritische Tiefe oder aber ein weiterer Wellenleiter auftritt. Die Diskussion wird jetzt durch eine näherungsweise Berechnung von Reflexionskoeffizienten vertieft. Schematisch betrachtet gibt es im erörterten



Fall drei Schichten mit $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$, $Q_3 > 0$. Die Kopplung der Wellen von ① und ③ ist als "Tunneleffekt" bekannt. In Schicht ① wird eine Welle vorgegeben, deren Energie abwärts wandert. Durch Anpassen der Lösungen der Wellengleichung an den Grenzflächen ergibt sich die Lösung in ③ und somit der Reflexionskoeffizient an der Grenzfläche ③/②.

Skizze 1
Dreischichtenmodell/
Tunneleffekt

Lösungsansatz:

$$\hat{W}(z) = a e^{\alpha z} + b e^{-\alpha z}$$

\hat{W} , a , b und α sind komplex. $e^{+\alpha z}$ entspricht einer Phasenausbreitung in $+z$ -Richtung. Die Gruppengeschwindigkeit hat das entgegengesetzte Vorzeichen (PHILLIPS 1969, S. 175).

Es gilt $\alpha = i\sqrt{Q}$ für $Q > 0$ und $\alpha = -\sqrt{|Q|}$ für $Q < 0$. Mit

$\hat{W}(z) = a_1 e^{\alpha_1 z} + b_1 e^{-\alpha_1 z}$ in Schicht ① bestimmen

sich die Koeffizienten für Schicht ② aus den Bedingungen der Stetigkeit von \hat{W} und \hat{W}' an der Grenzfläche z_1 zu

$$(3.2) \quad a_2 = (2 e^{\alpha_2 z_1})^{-1} \left\{ a_1 \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) e^{\alpha_1 z_1} + b_1 \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) e^{-\alpha_1 z_1} \right\},$$

$$b_2 = (2 e^{-\alpha_2 z_1})^{-1} \left\{ a_1 \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) e^{\alpha_1 z_1} + \right. \\ \left. + b_1 \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) e^{-\alpha_1 z_1} \right\}$$

Es wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1 = 0$ gesetzt; $z_2 = 1$ entspricht einer Skalierung. Wegen des geforderten Energieflusses gilt $b_1 = 0$. Der gesuchte Reflexionskoeffizient ist $R = |b_2 / a_2|$.

Tabelle 3.1 gibt einige so behandelte Fälle wieder. Sie enthält keinen Wert des Reflexionskoeffizienten, da dieser in keinem Fall um mehr als 10^{-4} von 1 abweicht. Die zugehörigen Moden sind in den angegebenen Abbildungen dargestellt. Dort sind auch die für die Näherungsrechnung verwendeten Q_1 eingetragen. Die ersten beiden Fälle behandeln die Kopplung von Haupt- und tropischer Sprungschicht, wobei der Energiefluß von der ersten zur zweiten Schicht angenommen ist. Die letzten beiden Fälle behandeln Situationen mit kritischen Schichten.

Tabelle 3.1 Parameter der Näherungsrechnungen zur Bestimmung von Reflexionskoeffizienten (siehe Skizze 1)

Abb.	h	Q_1	α_1	Q_2	α_2	Q_3	α_3
3.18	750	2000	$6.7i$	-3000	-87.5	16000	$360i$
3.19	900	1000	$16.2i$	-3000	-28.1	60000	$125.6i$
3.20	210	1050	$21.5i$	- 60	-21.2	100 bis 5600	$20i$ bis $180i$
3.21	200	600	$19.6i$	- 700	- 5.2	600 bis 15000	$6.7i$ bis $50i$

3.2.5 Wo gibt es Dispersionskurven

Gemäß der vorstehenden Diskussion können die Wellenvorgänge zweier verschiedener Wellenleiter in ganz unterschiedlichem Maß miteinander gekoppelt sein. Analog dazu

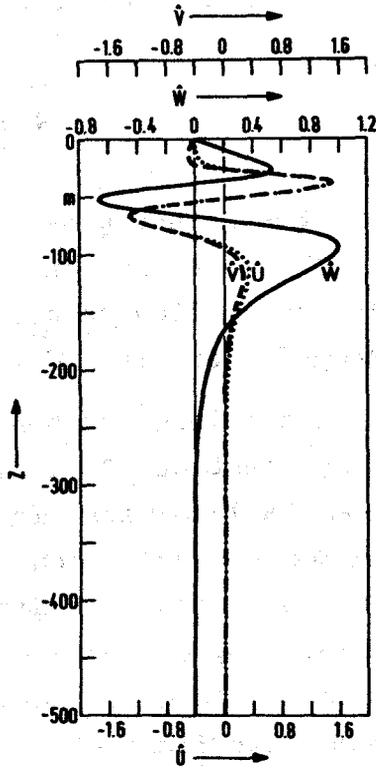
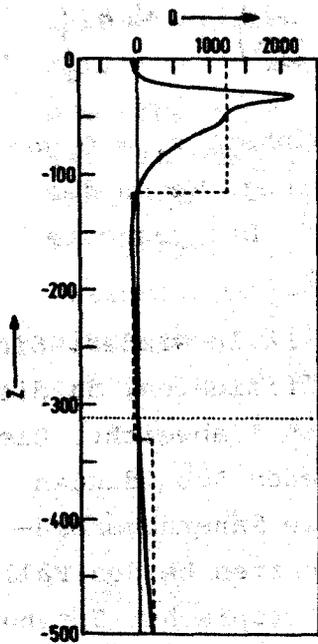


Abb. 3.20

$\omega = 1.00 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

$\alpha = 3.70 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$

$\varphi = 45^\circ$

$n = 3$

zu Tabelle 3.1;

s. auch Abb. 3.6

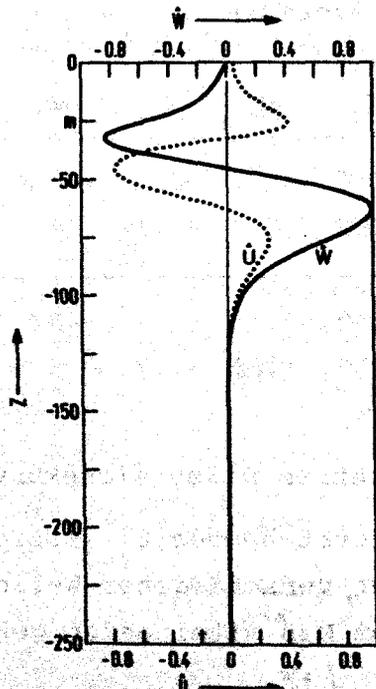
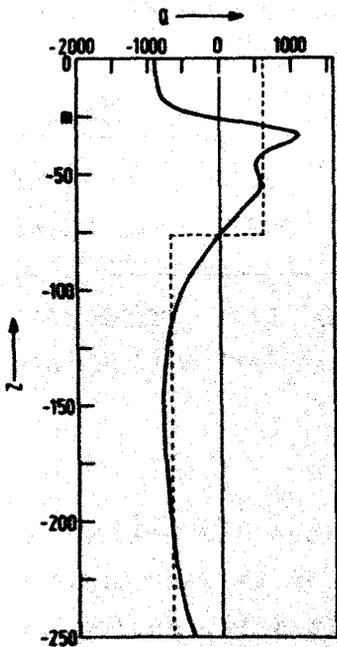


Abb. 3.21

$\omega = 2.00 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

$\alpha = 0.123 \text{ m}^{-1}$

$\varphi = 0^\circ$

$n = 2$

zu Tabelle 3.1;

s. auch Abb. 3.6

kann sich eine kritische Schicht in Abhängigkeit vom Verhältnis von $|z_{tp} - z_c|$ zur vertikalen Wellenlänge mehr oder weniger stark auswirken. Aus diesen Tatbeständen resultiert nun bezüglich der Darstellung der Dispersionskurven eine gewisse Willkür. Es muß nämlich gegebenenfalls entschieden werden, wo eine bestimmte Dispersionskurve aufhört, weil die Bedingungen zum Zustandekommen von Moden nicht mehr hinlänglich erfüllt sind. Die erste Mode ist davon nicht betroffen, insbesondere ist auch der Satz von Dispersionskurven langsamer, stromab gerichteter Wellen vollständig. In Abb. 3.22 sind zur weiteren Illustration die Tiefen des Reflexionspunktes und der kritischen Schicht entlang der Dispersionskurve für $\varphi = 0^\circ$ dargestellt.

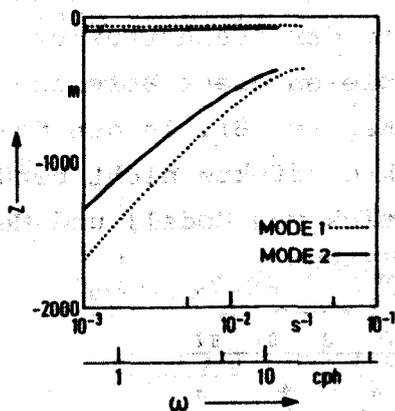


Abb. 3.22

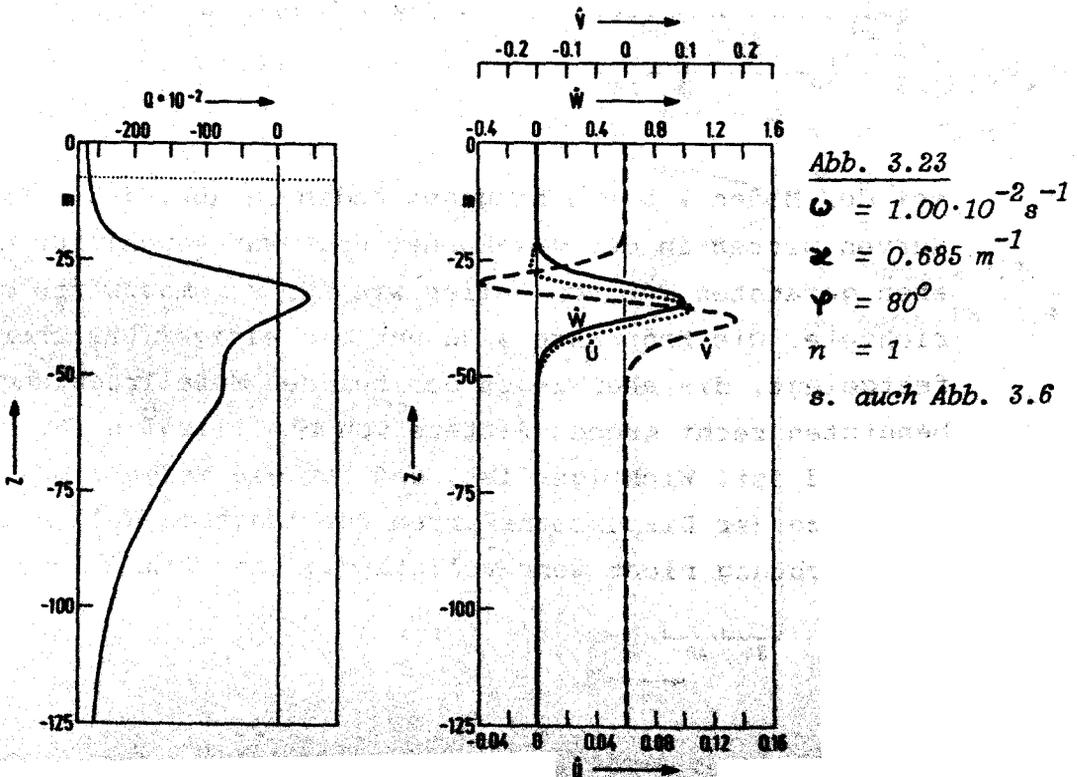
Tiefe des Reflexionspunktes (turning point) (obere Kurven) und kritische Tiefe für die Moden 1 und 2; langsame Wellen in Stromrichtung ($\varphi = 0^\circ$).

Bei den Moden 2 bis 5 hingegen enden in Abb. 3.3 b bis e Kurven mitten in der ω - z -Ebene, und zwar sowohl für den eben genannten Typ von Wellen wie für stromaufwärts gerichtete. Die Endpunkte sind nur mit einiger Unsicherheit festgelegt, die aber wegen des bei den Modellrechnungen benutzten recht groben Rasters von $\Delta\varphi = 11.25^\circ$ nicht beunruhigend ist. Wichtiger ist, daß für die Moden 3 bis 5 die Sätze der Dispersionskurven für langsame Wellen in Stromrichtung nicht mehr vollständig sind (Abb. 3.3 c bis e).

Die für kleine Winkel und kleine Frequenzen fehlenden Teile weisen auf die Wirksamkeit der Absorption von Wellenenergie in kritischen Schichten hin. Vorläufig sei angemerkt, daß dieser Effekt in energetisch unbedeutenden Regionen der ω - α -Ebene auftritt. Eine ausführliche Diskussion wird in Kapitel 9 geführt.

3.2.6 Feinstruktur

Zu hohen Wellenzahlen hin wird die Vertikalskala der Moden klein und erreicht schließlich Werte in der Größenordnung der typischen Erstreckung von Treppenstrukturen in der Schichtung von ca. 5 m (PETERS, 1978b, Abb. 6, 7). Abb. 3.23 zeigt eine Mode zu großem α . Auf diesen Skalen ist das Wellenfeld mit Sicherheit stark von der Wechselwirkung mit der "Feinstruktur" beeinflusst. Glücklicherweise spielen diese Bereiche aber energetisch keine Rolle (Kapitel 8). In den Modellrechnungen werden Feinstruktureffekte nicht berücksichtigt, wohl aber beim Vergleich von Modell und Messungen.



3.2.7 Das Profil der mittleren Geschwindigkeit für Tiefen größer als 200 m

Wie am Anfang des Kapitels erwähnt, ist über die mittlere Geschwindigkeit unterhalb von 200 m Tiefe nichts bekannt. In Abbildung 3.24 sind einige Dispersionskurven für zwei verschiedene Profile von \bar{u} dargestellt. Wesentliche Unterschiede weisen nur die Teile der Kurven auf, die zu auf die Hauptsprungschicht beschränkten Moden gehören. Eine Beeinflussung der Ergebnisse der Modellrechnungen ist durch den unterschiedlichen Verlauf der Gruppengeschwindigkeit (Steigung der Kurven) im Prinzip zu erwarten. Dieser Effekt ist aber wegen der in Kapitel 8 herausgefundenen Dominanz der ersten Mode (Ergebnis Nr. 3) klein, da diese auf die Vorgabe der verschiedenen Profile \bar{u}_i kaum reagiert.

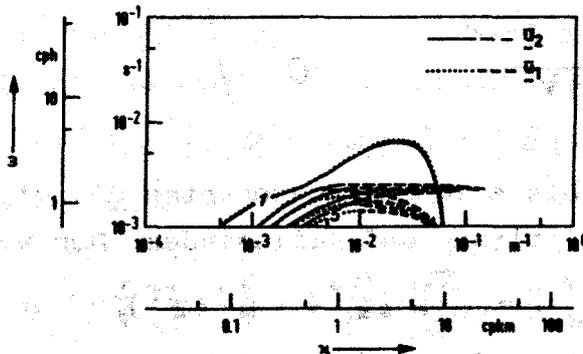


Abb. 3.24

Dispersionskurven der Moden 1 - 5 bei $\varphi = 180^\circ$ (gegen den mittleren Strom) für N_{GATE} und die beiden in Abb. 3.1b eingetragenen Profile \bar{u}_1, \bar{u}_2 , entspricht der dort punktierten Kurve.

4. Die spektrale Darstellung des stochastischen Wellenfeldes: theoretische Formulierung

4.1 Definitionen

Die Komponenten des Wellenfeldes u', v', w', ζ werden unter Weglassung der Striche allgemein als u_n geschrieben: $(u_n) = (u', v', w', \zeta)$. $\mathbf{k} = (k, l)$ ist der Wellen-

zählvektor, $z = |z|$ sein Betrag. $\underline{z}^p = (x^p, y^p)$ ist der Ortsvektor in der Horizontalebene, z^p die Vertikalkoordinate des Punktes mit Index p. Allgemein werden hochgestellte Indizes für die Bezeichnung von Orten, niedergestellte zur Kennzeichnung von Komponenten benutzt. In der komplexen Matrix \underline{F} ,

$$(4.1) \quad \underline{F} = \underline{F}(\omega, \underline{z}, z^p) = (\underline{F}_{\alpha\nu}^p(\omega, \underline{z})) =$$

$$= \begin{pmatrix} -i \frac{l}{z^2} \frac{l\bar{u}' - k\bar{v}'}{\omega - k\bar{u} - l\bar{v}} & i \frac{k}{z^2} \\ +i \frac{k}{z^2} \frac{l\bar{u}' - k\bar{v}'}{\omega - k\bar{u} - l\bar{v}} & i \frac{l}{z^2} \\ & 1 & 0 \\ & \frac{i}{\omega - k\bar{u} - l\bar{v}} & 0 \end{pmatrix},$$

gehören die Zeilen 1 bis 4 zu den Komponenten u', v', w' bzw. ζ . α und ν sind Spalten- und Zeilenindex. Der Vektor

$$(4.2) \quad \underline{w}(z^p) = (w_\alpha^p) = (\hat{w}(z^p), \hat{w}'(z^p))$$

enthält die Eigenfunktion \hat{w} und ihre Ableitung. Für das innere Produkt von \underline{F} und \underline{w} wird vereinfacht

$$(\underline{F}_{\alpha\nu}^p w_\alpha^p) = \sum_{\alpha=1,2} \underline{F}_{\alpha\nu}^p w_\alpha^p$$

geschrieben. Es entspricht den im Fall $\bar{u} \equiv 0$ auftretenden Amplitudenfaktoren.

Die Kovarianzfunktion wird in der üblichen Weise als Ensemblemittel eingeführt:

$$(4.3) \quad R_{\nu\mu}^{pq}(\tau, t) = \langle u_\nu^p(t) u_\mu^q(t+\tau) \rangle$$

Das Kreuzspektrum

$$(4.4) \quad \Pi_{mn}^{pq}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau R_{mn}^{pq}(\tau, t) e^{-i\omega\tau}$$



ist einseitig definiert. Ein Stern bezeichnet den konjugiert komplexen Wert einer Größe.

4.2 Darstellung des Wellenfeldes

Die Komponente u_μ am Ort (\underline{x}^q, z^q) wird durch

$$(4.5) \quad u_\mu^q(t) = \int d\omega \iint d\underline{x} a(\omega, \underline{x}) (\overline{T}_{\mu\nu}^q W_\nu^q) e^{-i(\underline{x} \cdot \underline{x}^q - \omega t)}$$

mit einer komplexen Amplitude a dargestellt. Mit

$$u_\nu^{p*}(t) = \int d\omega \iint d\underline{x}' a^*(\omega', \underline{x}') (\overline{T}_{\nu\mu}^{p*} W_\mu^p) e^{+i(\underline{x}' \cdot \underline{x}^p - \omega' t)}$$

lautet die Kovarianzfunktion

$$(4.6) \quad R_{\nu\mu}^{pq}(\tau, t) = \int d\omega' \int d\omega \iint d\underline{x}' \iint d\underline{x} \left\{ \langle a^*(\omega', \underline{x}') \cdot a(\omega, \underline{x}) \rangle (\overline{T}_{\nu\mu}^{p*} W_\mu^p) (\overline{T}_{\mu\nu}^q W_\nu^q) e^{-i(\underline{x} \cdot \underline{x}^q - \underline{x}' \cdot \underline{x}^p)} e^{-i(\omega - \omega')t} e^{i\omega\tau} \right\}$$

Wegen der Einführung des konjugiert komplexen Wertes von u_ν^p ist $R_{\nu\mu}^{pp}$ reell (s.u.). Wird das Wellenfeld als statistisch stationär und horizontal homogen angesehen, so gilt:

$$(4.7) \quad \langle a^*(\omega', \underline{x}') a(\omega, \underline{x}) \rangle = 2 E(\omega, \underline{x}) \delta(\omega' - \omega) \delta(\underline{x}' - \underline{x})$$

mit dem Spektrum der Energiedichte $E(\omega, \underline{x})$ (KINSMAN, 1965, S. 336 ff). Aus der Kovarianzfunktion

$$(4.8) \quad R_{\nu\mu}^{pq}(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} d\omega \iint d\underline{x} E(\omega, \underline{x}) (\overline{T}_{\nu\mu}^{p*} W_\mu^p) (\overline{T}_{\mu\nu}^q W_\nu^q) e^{-i\underline{x} \cdot \underline{r}^q} e^{i\omega\tau}, \quad \underline{r}^{pq} = \underline{x}^q - \underline{x}^p,$$

erhält man durch Umkehrung der Fouriertransformation bezüglich ω das Querspektrum

$$(4.9) \quad R_{\nu\mu}^{pq}(\omega) = \iint d\underline{x} E(\omega, \underline{x}) (\overline{T}_{\nu\mu}^{p*} W_\mu^p) (\overline{T}_{\mu\nu}^q W_\nu^q) e^{-i\underline{x} \cdot \underline{r}^{pq}}$$

Zur Frage der Normierung bildet man $\frac{E_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ \sum_{\nu=1}^3 \langle u_\nu^2 \rangle + N^2 \langle \zeta^2 \rangle \right\}$, setzt $\langle u_\nu^2 \rangle = R_{\nu\nu}^{pp}(0)$ und erhält

$$E_0 = \int d\omega \iint d\underline{x} E(\omega, \underline{x}) E_{ges}$$

mit E_{ges} nach Gleichung 2.32.

Die Moden werden laut Kapitel 2 derart normiert, daß $E_{\text{ges}} = 1$ ist. E_0 stellt also die Gesamtenergie pro Einheits-Meeresoberfläche dar. Die vorstehende Ableitung stützt sich außer auf KINSMAN (1965) auch auf WILLEBRAND et al. (1977).

4.3 Einführung der Dispersionsrelation

Zunächst werden in der Wellenzahlebene Polarkoordinaten eingeführt.

$$(4.10) \quad \Pi_{\nu, \mu}^{pq}(\omega) = \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \alpha E(\omega, \alpha, \varphi) \begin{pmatrix} T_{\nu, \mu}^{pq} \\ N_{\alpha}^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{\nu, \mu}^q \\ N_{\alpha}^q \end{pmatrix} e^{-i[(\alpha \cos \varphi, \alpha \sin \varphi) \cdot \underline{r}^{pq}]}.$$

Die grundlegende Annahme des Spektralmodells lautet:

Es gibt nur auf den Dispersionskurven der freien, linearen internen Wellen Energie im ω - α -Raum.

Zur Dispersionsrelation $\omega = \Omega(\alpha, \varphi, n, \epsilon)$ wird die Umkehrung

$$(4.11) \quad \alpha = \mathcal{K}(\omega, \varphi, n, \epsilon)$$

benötigt. Hier ist der Modeindex mit n bezeichnet. Der Index ϵ bezeichnet die drei verschiedenen Äste der Dispersionsrelation, die eingeführt werden müssen, um die Umkehrung (4.11) überhaupt formulieren zu können. Die Dispersionsrelation für Wellen in Anwesenheit einer mittleren Strömung ist ausführlich in Kapitel 3 behandelt.

Mathematisch formuliert lautet die obige Grundannahme:

$$(4.12) \quad E(\omega, \alpha, \varphi) = \sum_n \left\{ \sum_{\epsilon} E_{n\epsilon}(\alpha, \varphi) \delta(\omega - \Omega(\alpha, \varphi, n, \epsilon)) \right\}.$$

Darin ist $E_{n\epsilon}(\alpha, \varphi)$ die Verteilung der Energiedichte entlang der Dispersionskurven. Das Wellenzahlspektrum $E(\alpha, \varphi) = \int d\omega E(\omega, \alpha, \varphi)$ ergibt sich aus (4.12) als:

$$(4.13) \quad E(\alpha, \varphi) = \sum_n \sum_{\epsilon} E_{n\epsilon}(\alpha, \varphi).$$

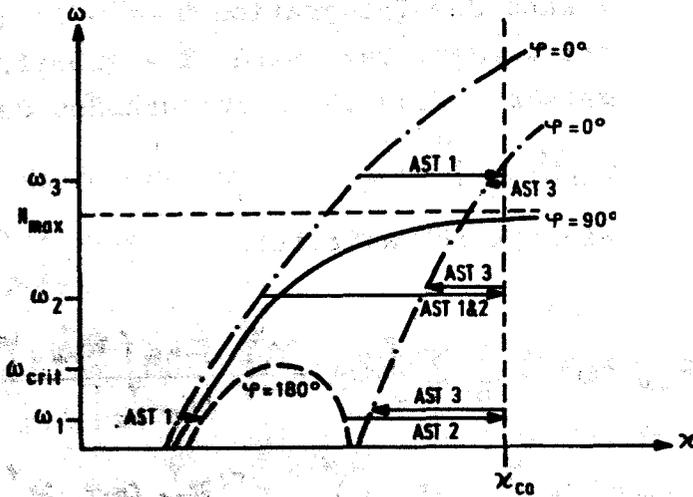
Mittels (4.11) kann die Integration über α in (4.10) jetzt ausgeführt werden. Dazu wird eine Transformation $\alpha \rightarrow \omega$ durchgeführt, wodurch im Integranden der Faktor

$$|c_{g\gamma}|^{-1} = \left| \left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right)_{\gamma} \right|^{-1}$$

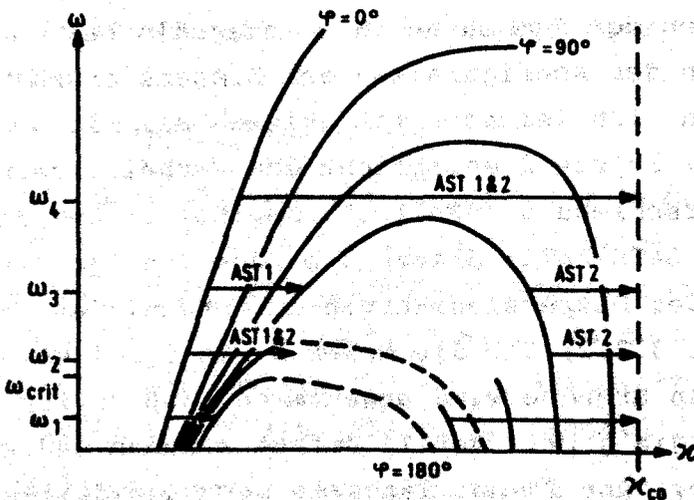
(Gruppengeschwindigkeit) auftritt.

$$(4.14) \quad R_{\nu\mu}^{pq}(\omega) = \sum_n \sum_{\epsilon} \int d\varphi \frac{\alpha_{n\epsilon}^{\nu} E_{n\epsilon}(\alpha_{n\epsilon}^{\nu}, \varphi)}{|c_{g\nu n\epsilon}|} \cdot \left(\begin{matrix} p & q \\ \tau_{\nu\mu} & \omega_{\nu} \end{matrix} \right)_{n\epsilon}^{\nu} \left(\begin{matrix} -q & q \\ \tau_{\nu\mu} & \omega_{\nu} \end{matrix} \right)_{n\epsilon}^{\nu} e^{-i[(\alpha_{n\epsilon}^{\nu} \cos \varphi, \alpha_{n\epsilon}^{\nu} \sin \varphi) \cdot \tau_{\nu}^{pq}]}$$

Die Indizes n , ϵ und ν stehen hier symbolisch für die funktionale Abhängigkeit gemäß der umgekehrten Dispersionsrelation (4.11), also z.B. $\alpha_{n\epsilon}^{\nu} = K(\omega, \varphi, n, \epsilon)$. Die Grenzen der Summen und des Integrals bei (4.14) hängen von der Konfiguration der Dispersionskurven ab und lassen sich leichter mit Skizzen als mit Worten beschreiben. Skizze 2 entspricht den Verhältnissen reiner Dopplerverschiebung ("Fall 2", Kapitel 6) und denen bei Mode 1 im GATE-Fall; Skizze 3 berücksichtigt die Aufspaltung der Dispersionskurven in verschiedene Scharen (Abschnitt 3.2.2) für die Moden 2 bis 5 bei GATE. Aus technischen Gründen wird angenommen, daß es für $\alpha > \alpha_{co}$ keine Energie gibt. "Ast 1" umfaßt stromab und stromauf gerichtete, "Ast 2" nur langsame, stromaufwärtige und "Ast 3" die langsamen, stromab gerichteten Wellen. Letzterer ist in Skizze 3 der Übersichtlichkeit wegen nicht berücksichtigt.



Skizze 2 Integrationswege in der ω - x -Ebene. Die Pfeile geben die Richtung der Integration an.



Skizze 3 Integrationswege in der ω - x -Ebene. Hier gehören die gestrichelten Kurventeile zu Moden, die auf die Hauptsprungschicht beschränkt sind.

4.4 Singularitäten

Abb. 3.3 und die vorstehenden Skizzen zeigen, daß im Verlauf einer Reihe von Dispersionskurven bzw. einiger Integrationswege $c_{gr}(\alpha, \dots)$ einen Nulldurchgang aufweist. In diesen Fällen ist (4.14) für die Modellrechnungen nicht nutzbar. Die Singularität wird durch die Transformation $\varphi \rightarrow \alpha$ beseitigt: $d\varphi = (\partial\varphi/\partial\alpha)_\omega d\alpha$. Das Querspektrum wird jetzt aus

$$(4.15) \quad R_{\nu\mu}^{pq}(\omega) = \sum_{\alpha} \sum_{\varphi} \int d\alpha \left\{ \left| \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \right)_\omega \left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} \right)_\varphi^{-1} \right| \alpha E_{n\alpha}(\alpha, \varphi) \cdot \left(F_{\alpha\nu}^{p*} W_{\alpha}^p \right) \left(F_{\alpha\mu}^q W_{\alpha}^q \right) e^{-i[(\alpha \cos\varphi, \alpha \sin\varphi) \cdot \tilde{r}^{pq}]} \right\}$$

bestimmt.

Aus dem totalen Differential von $\omega = \Omega(\alpha, \varphi)$ folgt

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \right)_\omega = -c_{gr} \left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} \right)_\alpha^{-1}$$

Aus Abb. 3.3 ergibt sich, daß im allgemeinen $(\partial\omega/\partial\varphi)_\alpha \neq 0$ ist. Im Kapitel 6 wird gezeigt, daß in dem Punkt der Dispersionskurve zu $\varphi = 180^\circ$, in dem $c_{gr} = 0$ ist, auch $(\partial\omega/\partial\varphi)_\alpha = 0$ gilt und daß die Spektren hier singular sind. Die unmittelbare Umgebung der zugehörigen Frequenzen (ω_{ast} in Skizzen 2 und 3) ist der Modellrechnung nicht zugänglich. Für $\varphi \rightarrow 0^\circ$ und $\varphi \rightarrow 180^\circ$ folgt $\left| \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \right)_\omega \right| \rightarrow \infty$ (vergleiche Abb. 8.4 und I.4). $A_{\nu\mu}^{ij}$ wird in folgender Weise berechnet:

nach (4.14) für "Ast 3" bei allen Frequenzen;

Skizze 2: nach (4.14) bei ω_1 und ω_2 ;

Skizze 2: nach (4.15) bei ω_2 ;

Skizze 3: nach (4.14) bei ω_1 und ω_2 ;

Skizze 3: nach (4.14) bei ω_2 für "Ast 2";

Skizze 3: nach (4.15) bei ω_1 ;

Skizze 3: nach (4.15) bei ω_2 für "Ast 1&2".

In einem Teilintervall nahe $\varphi = 0^\circ$ wird in jedem Fall (4.14) verwendet.

5. Übersicht über die durchgeführten Modellrechnungen

Zur Überprüfung der verschiedenen für die Modellrechnungen benutzten Programme war es notwendig, eine Reihe von Testrechnungen durchzuführen. Dazu wird von einfachen mittleren Feldern $N^2(z)$ und $\bar{u}(z)$ ausgegangen, die zumindest teilweise eine analytische Behandlung zulassen. Es geben sich vier grundlegende Klassen von Rechnungen:

- a) $N^2(z) = \text{const.}, \bar{u} \equiv (0,0)$ (Fall 1),
- b) $N^2(z) = \text{const.}, \bar{u} \equiv (\text{const.}, 0)$ (Fall 2),
- c) $N_{\text{GATE}}^2, \bar{u} \equiv (0,0)$ (Fall 3),
- d) $N_{\text{GATE}}^2, \bar{u}_{\text{GATE}}$ (Fall 4).

N_{GATE}^2 und \bar{u}_{GATE} entsprechen dabei den Darstellungen von Kapitel 3 (Abb. 3.1).

Ausgehend von einer speziellen Gestalt des Wellenzahlspektrums wird der Fall 1 vollständig analytisch behandelt (Kapitel 6 und Anhang III). Der Fall 1 wie der Fall 2 werden natürlich auf dem in Kapitel 4 skizzierten Weg bearbeitet. Zum Fall 2 wird außerdem ein halbanalytisches "Alternativmodell" aufgestellt, das in Kapitel 6 beschrieben wird. Die Ergebnisse des Falls 2 geben Einsicht in Auswirkungen von Dopplereffekten in Spektren und werden für die Interpretation der Rechnungen zum Fall 4 herangezogen.

Jeweils in den Fällen 1 bis 4 sind die Ergebnisse der Rechnungen vollständig durch die Funktionen $E_{n\alpha}(x, y)$ festgelegt, deren Summe über n und α (Mode- und Astindex) das Wellenzahlspektrum ist (Gleichung (4.13), Kapitel 4). In diesem Kapitel wird dargestellt, in welcher Weise $E_{n\alpha}$ vorgegeben wurde. Die Parameter dieser Darstellung für sämtliche durch Abbildungen belegte Modellrechnungen sind in der Tabelle 5.1 zusammengefaßt. Beim Alternativmodell

und bei einem hier nicht dokumentierten Teil der Testrechnungen ist ein Wellenzahlspektrum gemäß Gleichung (6.4) zugrundegelegt. Eine Abhängigkeit von der Richtung φ wurde in diesen Fällen nicht zugelassen. Für die eigentlichen Modellrechnungen wird Gleichung (6.4) nicht verwendet. Stattdessen wird das Wellenzahlspektrum in einfacher Weise durch Faktorisierung nach der Abhängigkeit von der Richtung und vom Betrag der Wellenzahl mit einem Abfall wie $\alpha^{-\epsilon}$ in verschiedene Wellenzahlbänder aufgebaut:

$$(5.1) \quad E(\alpha, \varphi) = R(\varphi) \sum_n \sum_{\epsilon} E_{n\epsilon}(\alpha)$$

Die Funktion R ist normiert: $\int_0^{2\pi} d\varphi R(\varphi) = 1$.

$$(5.2) \quad E_{n\epsilon}(\alpha) = g_n \begin{cases} \alpha^{-\alpha} & \text{für } \alpha \leq \alpha_1 \\ f_1 \alpha^{-\beta} & \text{für } \alpha_1 < \alpha \leq \alpha_2 \\ f_2 \alpha^{-\gamma} & \text{für } \alpha_2 < \alpha \leq \alpha_{co} \\ 0 & \text{für } \alpha > \alpha_{co} \end{cases}$$

Die g_n sind die normierten Gewichtungsfaktoren der Energie der Moden ($\sum_n g_n = 1$). Eine explizite Abhängigkeit vom Astindex ϵ wird nicht angenommen. Die Faktoren f_1 und f_2 werden so bestimmt, daß sich $E_{n\epsilon}$ an den Stellen α_1 und α_2 stetig verhält. Abgesehen vom Fall der Isotropie ist grundlegend zwischen Richtungsverteilungen, die symmetrisch bezüglich der oberen und unteren k-l-Halbebene sind, und asymmetrischen Verteilungen zu unterscheiden. Folgende Funktionen werden verwendet, wobei grundsätzlich $-\tilde{\eta} \leq \varphi \leq +\tilde{\eta}$ gilt:

a) Isotropie des Wellenzahlspektrums:

$$R(\varphi) = (\alpha \tilde{\eta})^{-1}$$

b) Nur Energie in der linken Halbebene:

$$(5.3) \quad R(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\varphi| < \frac{\pi}{2} \\ \tilde{a}^{-1} & \text{für } |\varphi| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

c) Asymmetrische Verteilung:

$$(5.4) \quad R(\varphi) = c \cos^a \left(\frac{\varphi - \varphi_0}{b} \right)$$

d) Symmetrische Verteilung:

$$(5.5) \quad R(\varphi) = c \cos^a \left(\frac{|\varphi| - \varphi_0}{b} \right)$$

Die Größen c sind Normierungskonstanten. Sie werden durch numerische Integration bestimmt. Die Nomenklatur von (5.2) bis (5.5) wird auch in der Tabelle 5.1 verwendet.

Tabella 5.1 Parameter des vorgegebenen Wellenzahlenspektrums für die durch Abbildungen belegten Modellrechnungen.
Die Nomenklatur ist Kapitel 5, (5.2) bis (5.5) zu entnehmen. Auf die Indexnummer wird bei den Abbildungen verwiesen.

Fall Nr.	g_n	ω	$\frac{\omega_1}{[m^{-1}]}$	$E_{ng}(\omega)$	β	$\frac{\omega_2}{[m^{-1}]}$	$\frac{\omega_3}{[m^{-1}]}$	Bemerkg.	$R(\gamma)$	(5.3) bis (5.5)	Index
1 und 2	n^{-2}	-2					0.1		isotrop	a b	1
2	n^{-2}	-3					0.1		isotrop		2
3 und 4	n^{-2}	-2	0.05	-3.5			0.3/0.5		isotrop		3
3	n^{-2}	-3	0.01	-3.5			0.3		isotrop		4
4	$n^{-1/2}$	-3	0.002	-1.5	0.02	-4	0.5		symmetr.	120°	5
4	e. Abb.	-3	0.002	-1.5	0.02	-4	0.5		linke Halbebene gemäß (5.3)		6
3 und 4	$g_n = 0.2$	-2.75 -2.75	0.0016	-1.4	0.01	-4	0.3/0.5 0.3/0.5	Mode 1 Moden 2-5	symmetr.	120°	7
4	$g_n = 0.2$	-2.75 -2.75	0.00175	-1.25	0.01	-4	0.5 0.5	Mode 1 Moden 2-5	symmetr.	135°	8
4	$g_n = 0.2$	-2.75 -2.75	0.002	-1.6	0.02	-4	0.5 0.5	Mode 1 Moden 2-5	isotrop bzw. symmetr.	120°	9

6. Ergebnisse der Testrechnungen (Alternativmodell, Fall 1, Fall 2)

Testrechnungen werden mit dem Ziel durchgeführt, das eigentliche Spektralmodell zu überprüfen und dafür Interpretationshilfen zu gewinnen. Die Rechnungen gehen von den mittleren Feldern $N = \text{const.}$ ($= 1 \text{ cph}$) und $\bar{u} = (0,0)$, Fall 1, bzw. $N = \text{const.}$ ($= 1 \text{ cph}$) und $\bar{u} = (\bar{u}, 0)$ ($\bar{u} = 0.7 \text{ m s}^{-1}$), Fall 2, aus. Eine Wassertiefe H von 5000 m wurde benutzt. Definitionen: ω Frequenz im mit \bar{u} bewegten Inertialsystem, S Beobachterfrequenz am festen Ort, $h_n = n\bar{u}/H$.

Die Dispersionseigenschaften von internen Wellen für die Fälle 1 und 2 sind bekannt und sollen hier nicht wiederholt werden. Insbesondere können auch die Gruppengeschwindigkeit und der Quotient $(\partial\psi/\partial x)_s / (\partial S/\partial x)_\varphi$ analytisch ausgedrückt werden. Das ist wichtig, da deren numerische Berechnung im Modell nicht trivial ist (Anhang II).

6.1 Spektralmodell, Fall 1 ($\bar{u} = 0$)

Für die weitere Diskussion wird von dem speziellen, isotropen Frequenz-Wellenzahlspektrum

$$(6.1) E(\omega, x, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^m \left\{ g_n h_n^{-2} N^{-2} (N^2 - \omega^2)^2 \omega^{-2-1} \cdot \delta(\omega - N x (h_n^2 + x^2)^{-1/2}) \right\}$$

ausgegangen ($\sum_{n=1}^m g_n = 1$). Das Spektrum der vertikal integrierten Gesamtenergie

$$(6.2) B(\omega) = \int d\varphi \int dx x E(\omega, x, \varphi)$$

ist nach Kapitel 4

$$(6.3) B(\omega) = \begin{cases} \omega^{-2} & \text{für } \omega \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die einzelnen Moden sind daran mit einem Bruchteil g_n beteiligt. Zu (6.1) gehört das Wellenzahlspektrum

$$(6.4) \quad E(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^m g_n h_n^2 N^{1-\alpha} x^{-\alpha-1} (h_n^2 + x^2)^{\frac{\alpha-3}{2}},$$

wobei die einzelnen Summanden die Funktionen E_n darstellen. Für den Fall $\bar{u} = 0$ können nun alle gewünschten Energiespektren und Kohärenzen mittels Ausnutzung der Dispersionseigenschaften der Wellen auf der Basis von Kapitel 4 berechnet werden. Auch diese Ergebnisse sind nicht unbekannt (SCHOTT & WILLEBRAND, 1973). Im Anhang III ist eine Formelsammlung wiedergegeben.

6.2 Das Alternativmodell

Für den Fall $\bar{u} \neq 0$ (aber $\bar{u} = \text{const.}$) wird hier im Unterschied zu Kapitel 4 nicht der Bereich von Wellenzahlen gesucht, der zu einer gegebenen Beobachterfrequenz S Energiebeiträge liefert, sondern der korrespondierende Bereich von Frequenzen ω im mit \bar{u} bewegten Inertialsystem. Dieses Vorgehen wurde bereits von FRANKIGNOUL (1974) gewählt. Es ist natürlich nicht auf den Fall einer Scherströmung übertragbar. Im vorliegenden Fall ist eine halbanalytische Behandlung des Problems mit hoher Auflösung im Frequenzbereich möglich.

Ausgangspunkt der Entwicklungen ist (6.2). Völlig analog zu Abschnitt (4.3) wird die Dispersionsrelation

$$S = \pm \omega \pm x \bar{u} \omega \psi \quad \text{mit} \quad x = h_n \omega (N^2 - \omega^2)^{1/2}$$

eingeführt und von ψ nach ω transformiert. Im Integranden tritt dadurch ein Faktor $(\partial\psi/\partial\omega)_{x\bar{u}}$ auf. Man erhält:

$$(6.5) \quad B(S) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^m \sum_{\omega_n}^{\omega_0} \int d\omega g_n \omega^{-\alpha} \frac{\sqrt{N^2 - \omega^2}}{\sqrt{(\bar{u} h_n \omega)^2 - (S \mp \omega)^2 (N^2 - \omega^2)}}$$

Die Unterscheidung verschiedener Äste (Index 6) bleibt einem auch hier nicht erspart. Die Integrationsgrenzen ω_n und ω_0 ergeben sich aus den Schnittpunkten der Geraden

$\omega = S \pm \alpha \bar{u}$ und $\omega = -S + \alpha \bar{u}$ mit den Dispersionskurven. Sie sind die Nullstellen des Polynoms

$$(6.6) \quad \omega^4 - \omega^3 2S + \omega^2 (S^2 + \bar{u}^2 h_n^2 - N^2) + \omega 2SN^2 - S^2 N^2 = 0.$$

Die oberste Integrationsgrenze ist stets $\omega = N$. Die genannten Geraden und die Dispersionskurven sind in Abb. 6.1 eingetragen, wobei die Modifikation durch die doppeltlogarithmische Darstellung zu beachten ist.

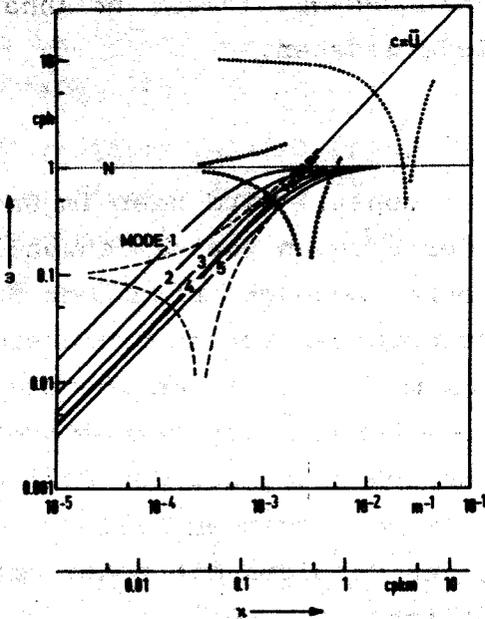


Abb. 6.1

Dispersionsdiagramm der Moden 1 bis 5 der Testrechnungen,

Fall 1 ($N = 1$ cph, $\bar{u} = 0$, $H = 5000$ m), sowie zum "Alternativmodell" gehörige Integrationsgrenzen für $S = 0.1$ cph (gestrichelt), $S = 1$ cph (offene Kreise) und $S = 10$ cph (Punkte).

Bezüglich der Moden $n \geq 4$ muß angemerkt werden, daß es keine stromaufwärts gerichteten Wellen gibt, da die Phasengeschwindigkeit für kleine Frequenzen kleiner als \bar{u} ist.

Die Integration in (6.5) mit Grenzen gemäß (6.6) wird numerisch ausgeführt. Die Details und eine Fehlerdiskussion sind im Anhang III enthalten.

Beispiele von Spektren der vertikal integrierten Gesamtenergie $B(S)$ sind in Abb. 6.2 dargestellt. Zu sehen ist, daß die Energie im Bereich um $S = N$ "verschmiert" wird: Es gibt auch für $S > N$ Energie; der Abfall des Spektrums ist sanft verglichen mit dem Fall $\bar{u} \neq 0$. Bei kleinen Frequenzen wird das

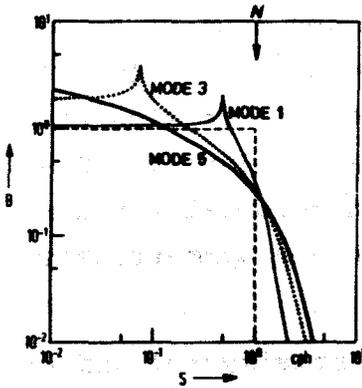


Abb. 6.2

Mittels des "Alternativmodells" berechnete Spektren der vertikal integrierten Gesamtenergie $B(S)$ entsprechend Fall 2 ($N = 1$ cph, $\bar{u} = 0.7$ m s⁻¹, $H = 5000$ m). Das $\bar{u} = 0$ (Fall 1) entsprechende Spektrum ist gestrichelt eingetragen. Das Wellenzahlspektrum der Modellrechnungen ist gemäß Gleichung (6.4) vorgegeben mit $\alpha = 0$, wobei jeweils den Moden 1, 3 und 5 einzeln Energie zugewiesen ist.

Niveau, nicht aber die Steigung der Spektren durch Dopplereffekte verändert. Die Niveaushiftung ist bei "roten" Spektren sehr unauffällig.

Wichtig für die Diskussion sind die Spitzen im Verlauf der Spektren zu den Moden 1 und 3. Die folgende Analyse zeigt, daß an den betreffenden Stellen S_{crit} eigentlich Singularitäten der Spektren vorliegen. Der Frequenzwert ist dadurch festgelegt, daß die Gerade $\omega = S_{crit} + \alpha \bar{u}$ (s.o.) eine Tangente der Dispersionskurve einer Mode darstellt. Im behandelten Beispiel (Abb. 6.1) gibt es solche Tangenten nur für die Moden 1 bis 3, weil nur für diese $c(\omega \rightarrow 0) > \bar{u}$ gilt (s.o.). Der im Vergleich mit Mode 1 andersartige Verlauf des spektralen Beitrags von Mode 5 ist ebenfalls auf diese Tatsache zurückzuführen. Der Integrand in (6.5) kann als $f(\omega) \left[\sum_{i=1}^3 \epsilon_i \omega^i \right]^{-1/2}$ geschrieben werden. Falls S_{crit} existiert, hat das Polynom für $S < S_{crit}$ vier verschiedene reelle Nullstellen, in deren Nähe der Integrand sich wie $g(\omega) [\omega - \omega_i]^{-1/2}$ verhält und somit integrierbar ist. Bei $S = S_{crit}$ hingegen fallen zwei Nullstellen zusammen; es entsteht die erwähnte Singularität.

Der analytischen Darstellung wegen können die Singularitäten hier exakt analysiert werden. Eine weitergehende Betrachtung zeigt aber, daß solche Singularitäten allgemein in dopplerverschobenen Spektren auftreten, insbesondere auch

im GATE-Fall. Dort liegen sie bei den Frequenzen der Scheitelpunkte der Dispersionskurven zu 180° (gleichzeitig ist $c_{gr} = 0$, Kapitel 4). Das ergibt sich nicht nur durch einen Analogieschluß aus der Form der Dispersionskurven (Abb. II.1 gibt ein Beispiel für den vorliegenden Testfall), sondern schon aus Symmetriebetrachtungen für ebene Strömungen.

Durch Übergang auf ein anderes Inertialsystem ändert sich der Energieinhalt eines Systems nicht. Einem solchen Übergang ist aber der vorliegende Fall einer konstanten mittleren Strömung vollständig äquivalent. Daher müssen die erwähnten Singularitäten der Spektren integral bezogen auf eine Integration über die Frequenz sein. Die Rechnungen mit dem Alternativmodell zeigen insbesondere auch, daß in einem engen Frequenzband um die Singularitäten herum in bezug auf die Gesamtenergie relativ wenig Energie enthalten ist. In hier nicht dokumentierten Fällen mit "roten" Spektren (z.B. $B \propto S^{-2}$) gehen die Spitzen nahezu unter. Da man aus Messungen nur Schätzwerte von Spektren mit endlicher Auflösung gewinnen kann, sind Anzeichen der diskutierten Singularität nicht zu erwarten.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch kurz dargestellt werden, wie die Dopplereffekte ein im Fall $\bar{u} \neq 0$ auf die Bandbreite $\omega_a \leq \omega \leq N$ begrenztes Spektrum verformen. Oben ist $\omega_a = 0$ vorausgesetzt. Für $\omega_a \neq 0$ wird das dopplerbeeinflusste Spektrum im Vergleich zum Fall $\omega_a = 0$ nur bei kleinen Frequenzen verändert. Es gibt einen Abfall der Energie etwas oberhalb von ω_a zu kleineren Frequenzen hin und einen "Sockel" mit $B(S) \neq 0$ bis $S = 0$ hin. Für den GATE-Fall wird hieraus der Schluß gezogen, daß man sich für die Modellrechnungen nicht um den Bereich unterhalb der kleinsten Frequenz des Modells (ω_{min}) zu kümmern braucht, solange die Energie zu kleineren Frequenzen hin

ein Stück weit etwa gleichmäßig ansteigt. Das ist aber der Fall, da ω_{\min} im Kontinuumsbereich der internen Wellen liegt.

6.3 Modellrechnungen zum Fall 2 ($N = \text{const.}, \bar{u} = \text{const.}$)

In diesem Abschnitt wird die Auswirkung von Dopplereffekten auf Querspektren anhand der Rechenergebnisse des "normalen" Modells gemäß Kapitel 4 diskutiert. Die vertikale Kohärenz wird nicht behandelt, da sie sich beim Übergang von $N = \text{const.}$ zu $N \neq \text{const.}$ viel stärker ändert als durch reine Dopplereinflüsse.

6.3.1 Horizontale Kohärenz gleicher Komponenten

Da bei GATE nur Sensoren parallel zur mittleren Strömung vorhanden waren, wird auch hier die Diskussion auf die Kohärenz in Stromrichtung beschränkt. Sie wird durch Dopplereffekte im Vergleich zum Fall $\bar{u} = 0$ stark verändert. Im Gegensatz zum dort auftretenden Kurvenverlauf (Anhang III) steigt die Kohärenz für große Frequenzen auf Werte nahe 1 an (Abb. 6.3), und zwar für γ_{u_1}, γ_w und γ_{13} . Dieser Effekt ist physikalisch leicht zu verstehen: Durch die Advektion wird bei großen Frequenzen ein praktisch "eingefrorenes" Feld am Sensor vorbeigeführt. Auch mathematisch ist der Anstieg der Kohärenz bei großem α leicht zu erklären: Für $S \gg S_{\text{crit}}$ ist $S \approx \alpha \bar{u} \cos \varphi$ und somit $\exp(-i \alpha \cos \varphi r) \approx \text{const.}$. In Abb. 6.3 ist S_{crit} (für Mode 1 wegen deren Dominanz) der für den Übergang zum reinen Dopplerregime maßgebliche Parameter.

6.3.2 Horizontale Kohärenz zwischen u und ζ

Die horizontale Kohärenz $\gamma_{u\zeta}$ ist auch im Fall $\bar{u} = 0$ für $r \neq 0$ von 0 verschieden (Abb. 6.4). Bei der Berechnung von $\gamma_{u\zeta}$ tritt im Integranden das Produkt $\cos \varphi \exp(-i \alpha r)$ auf. Das Integral, und damit $\gamma_{u\zeta}$, wird immer dann groß,

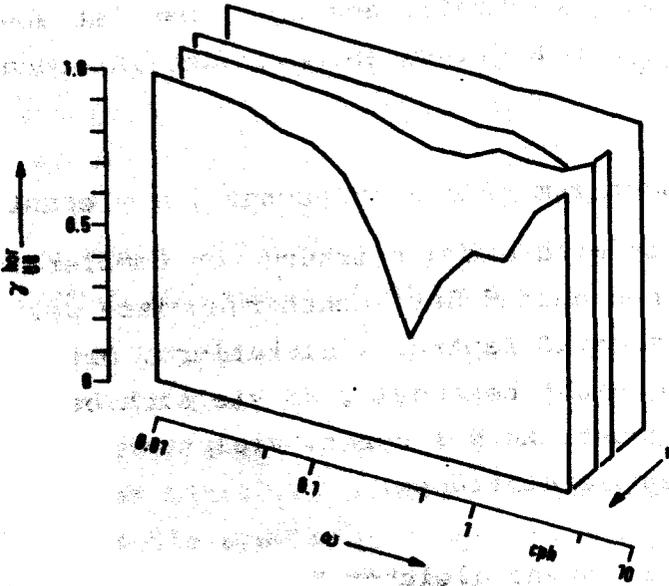


Abb. 6.3a

Horizontale Kohärenz in Stromrichtung der u -Geschwindigkeitskomponente (a) und der Vertikalauslenkung (b) in 250 m Tiefe, $r=100, 500, 1000, 4000$ m. Testrechnungen, Fall 2, Modellparameter: 1 in Tabelle 5.1.

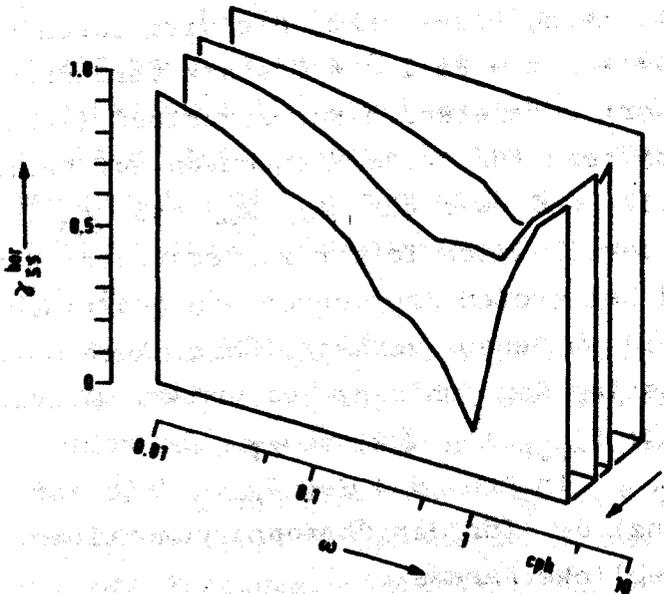


Abb. 6.3b

wenn die Oszillation des zweiten Terms die des ersten ausgleicht. Für jede Mode gibt es bei $\omega_n T = 2\pi$ ein Maximum, dessen Wellenzahl und somit Frequenz mit r abnimmt: Diese Betrachtung gilt gleichermaßen für $\bar{u} = 0$ und $\bar{u} \neq 0$. Aus dem im vorigen Abschnitt genannten Grund tritt im letzteren

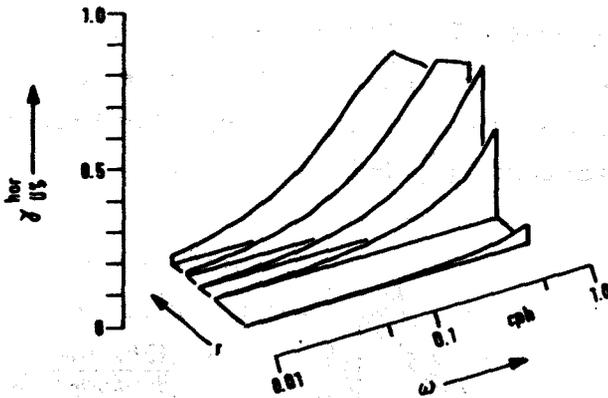


Abb. 6.4
Horizontale Kohärenz
in Stromrichtung
zwischen u und ξ ; Tiefe
und horizontale Separa-
tionen wie in Abb.
6.3. Testrechnungen,
Fall 1, Modellparame-
ter: 1 in Tabelle 5.1.

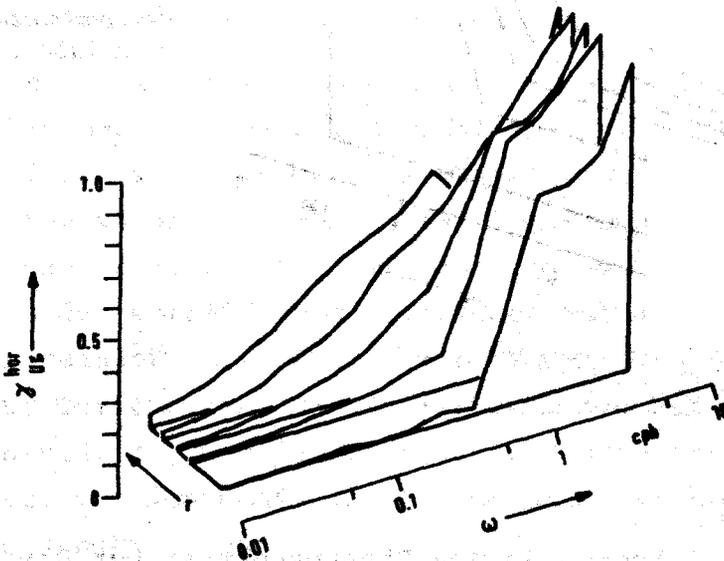


Abb. 6.5
Horizontale Kohärenz
in Stromrichtung
zwischen u und ξ ,
wie in Abb. 6.4,
aber Fall 2.

Fall eine Zunahme der Kohärenz bei großen Frequenzen auf (Abb. 6.5).

Dopplereffekte wirken sich auch in Querspektren nicht notwendigerweise nur auf die hohen Frequenzbereiche aus (Abb. 6.6). Für kleine Frequenzen gilt näherungsweise bei $S \ll N$ und $zr \ll \bar{u}$:

$$\gamma_{us}^{\text{hor}} \approx \left| \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\varphi \left\{ \sum_n g_n \frac{E_{ng}}{c_{\varphi}} \left(\bar{u} \cos \varphi + \frac{N}{h_n} \right)^{\alpha-2} \cos \varphi \sin(h_n z) \cos(h_n b) \right\} \right| / \sqrt{A_{uu} A_{\xi\xi}}$$

Für $\alpha \neq 2$ ist $\gamma_{u\zeta}^{hor} \approx const. \neq 0$. Hingegen gilt im Fall $\bar{u} \equiv 0$ $\gamma_{u\zeta}^{hor} \equiv 0$ für $r = 0$ und $\gamma_{u\zeta}^{hor} \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow 0$. Erwähnt werden muß, daß für $\bar{u} = const.$ die horizontale Kohärenz in Stromrichtung $\gamma_{v\zeta}^{hor} \equiv 0$ ist.

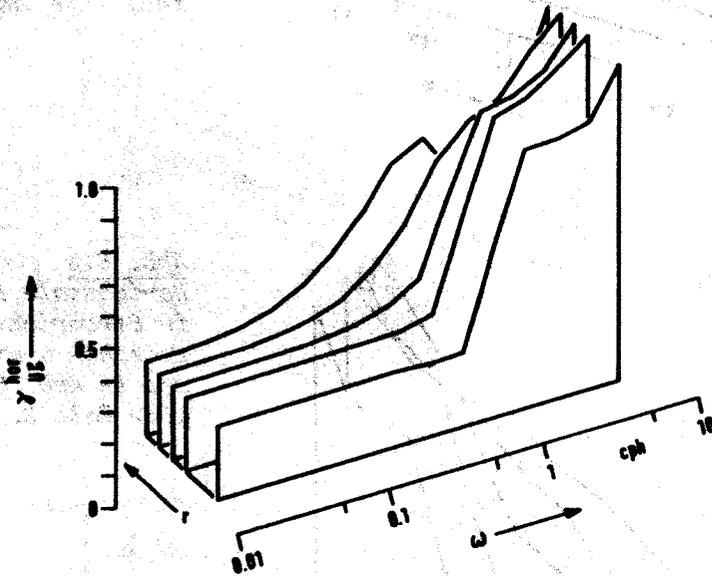


Abb. 6.6
Horizontale Kohärenz
in Stromrichtung
zwischen u und ζ ,
wie Abb. 6.5,
aber veränderte Mo-
dellparameter:
2 in Tabelle 5.1.

6.3.3 Phasen

Im Falle $\bar{u} \equiv 0$ kommen in den Phasenspektren nur die Werte 0 und $\pm \pi$ vor. Das gilt auch für $\bar{u} = 0$, außer für Punkte, die parallel zur Stromrichtung einen nichtverschwindenden Abstand haben. In diesem Falle erzeugen die Dopplereffekte einen systematischen Trend des Verlaufs der Phase in Abhängigkeit von der Frequenz. Dieser Trend ist für kleine Frequenzen in den verschiedenen Querspektren und für unterschiedliche Modellparameter nicht völlig gleich. Für Frequenzen $S \gg N$ gilt aber in jedem Fall annähernd die lineare Beziehung $d\phi/dS \approx r/\bar{u}$.

7. Charakteristika der aus den Messungen während "GATE" gewonnenen Spektren

Die Charakteristika des hochfrequenten Teils der GATE-Spektren sollen hier kurz dargestellt werden. Trotz ihrer ausführlichen Diskussion in der Literatur (insbesondere KÄSE & CLARKE, 1978; KÄSE & SIEDLER, 1980) erscheint das notwendig, um den logischen Zusammenhang dieser Arbeit zu sichern. Ohnedies ist die Abbildung der Spektren unvermeidlich, da sie mit den Ergebnissen der Modellrechnungen verglichen werden sollen. Die Diskussion der physikalischen Bedeutung der Charakteristika wird in den beiden folgenden Kapiteln geführt.

Die Stromkomponenten u und v beziehen sich in den graphischen Darstellungen nicht auf Osten und Norden, sondern auf ein um 15° gegen den Uhrzeigersinn gedrehtes Koordinatensystem, das damit der Richtung des mittleren Stromes besser entspricht (siehe Kapitel 3). Die Spektren sind aus den korrigierten Zeitreihen mit dem originalen Abfrageintervall von 3.75 min (VACM) bzw. 5 min (Aanderaa) aus Teilstücken von 512 Werten Länge bei 50-prozentiger Überlappung und Verwendung eines Hanning-Filters berechnet. Von den Aanderaa-Geräten sind nur Temperaturmeßwerte verwendet.

7.1 Autospektren

Die Autospektren (Abb. 7.1) sind durch einen Abfall etwa wie ω^{-2} im Bereich des Kontinuums oberhalb der Gezeitenfrequenz und durch eine spektrale Schulter zwischen 1.5 und 4 cph charakterisiert. Die Form der Spektren im Bereich der Schulter ist instationär (KÄSE & CLARKE, 1978). Das Temperatursignal der VACM-Strommesser ist für Frequenzen oberhalb von etwa 2 cph gedämpft. Entsprechend ist in Abb. 7.1c die Schulter in den von Aanderaa-Strommessern

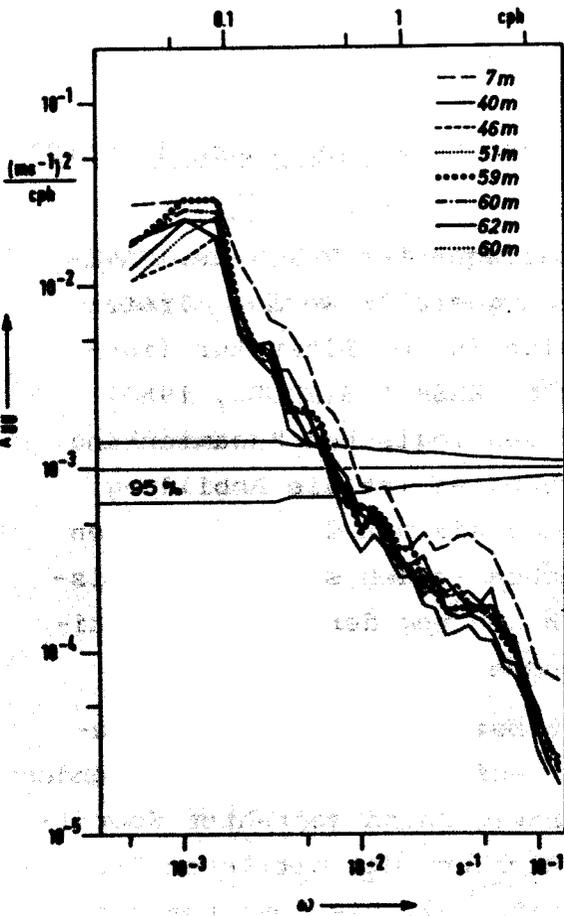
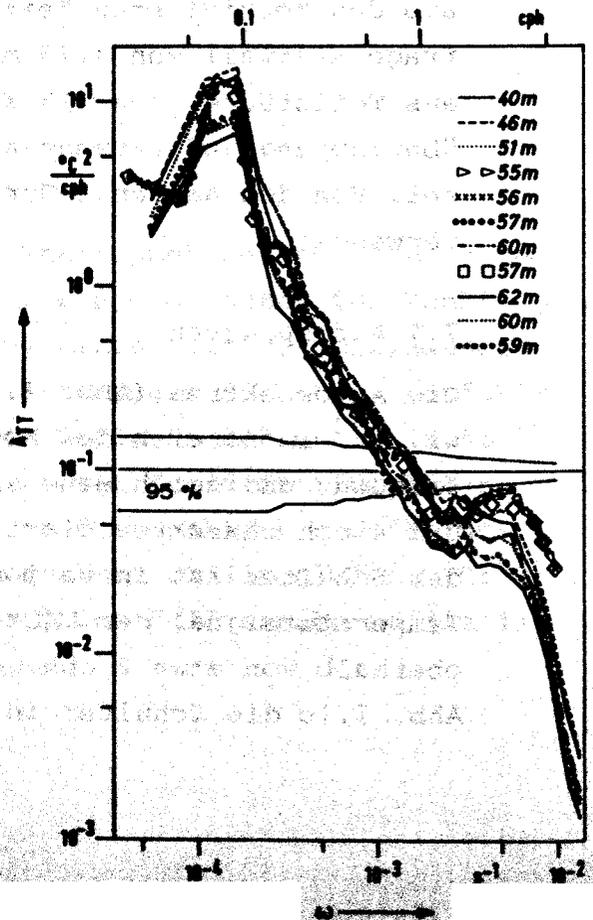
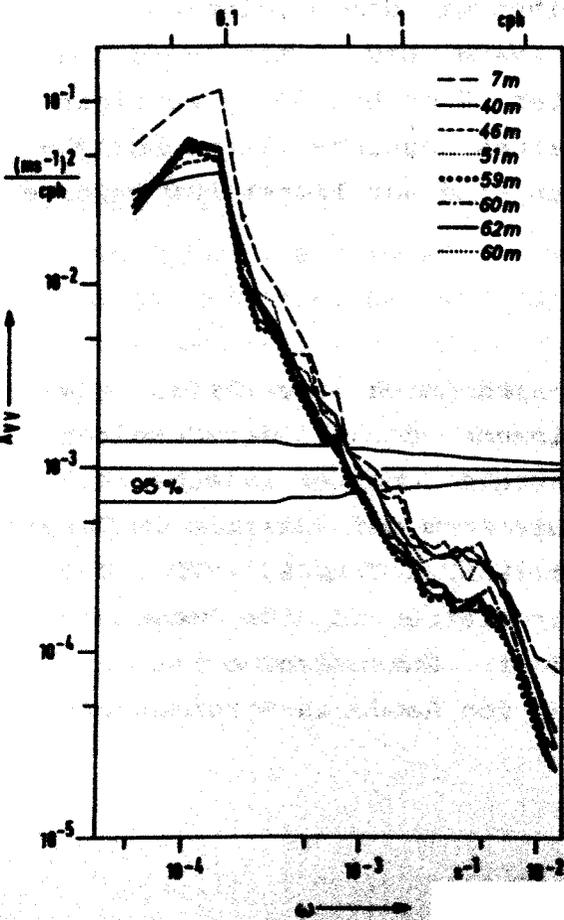


Abb. 7.1 a bis c

Aus Daten der bei GATE ausgelegten Verankerung F1 berechnete Energiespektren der Geschwindigkeitskomponenten u und v (a und b), sowie der Temperatur (c) in verschiedenen Tiefen laut Angabe. Für die Stromgeschwindigkeit sind nur Daten von VACM-Geräten berücksichtigt. Die Komponente u entspricht einer Richtung von rechtweisend 75° , d.h. in etwa der des mittleren Stroms. Vertrauensgrenzen sind eingetragen.



gewonnenen Spektren stärker ausgeprägt. Das allgemeine Energieniveau der Horizontalbewegungen ist in der Deckschicht etwas größer als in der Sprungschicht, in der keine signifikanten Unterschiede festzustellen sind.

7.2 Horizontale Kohärenz gleicher Komponenten

Die horizontale Kette der Verankerung F1 in ca. 60 m Tiefe erlaubt die Berechnung der Kohärenz für verschiedene Separationen r der Sensoren. Die Temperaturkohärenz (Abb. 7.2a) ist für größere r durch einen abrupten Abfall bei $\omega \approx 2.5$ cph gekennzeichnet. Demgegenüber fallen die Kohärenzen γ_{uv}^{hor} und γ_{uz}^{hor} (Abb. 7.2 b und c) gleichmäßiger mit der Frequenz ab. Die unterschiedliche Größe der Temperatur- und der Strömungskohärenz ist aus früheren Messungen bekannt und wird auf die Wirkung von Feinstruktur zurückgeführt (BRISCOE, 1977).

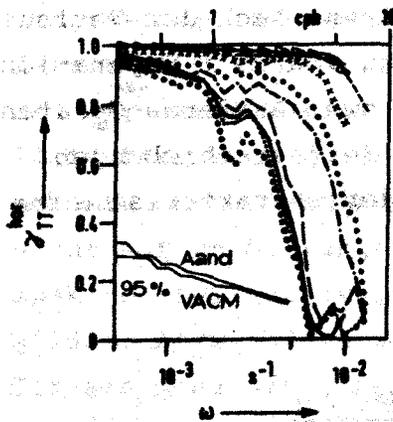
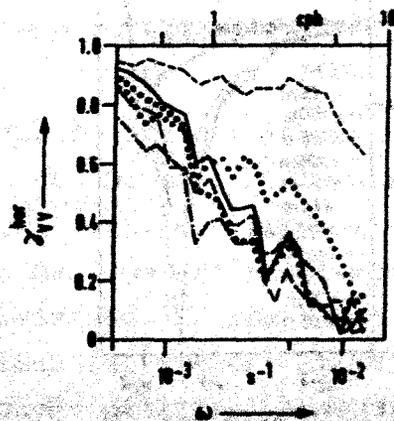
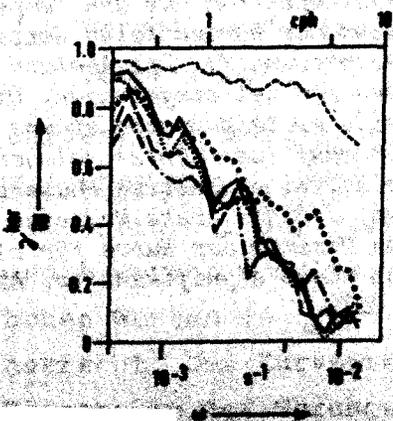


Abb. 7.2 a bis c

Horizontale Kohärenz der Geräte in der horizontalen Kette der Verankerung F1, Temperatur (a) und Geschwindigkeitskomponenten (b und c). Die Separation der Sensoren ist angegeben. In 7.2a sind die Vertrauensgrenzen für wahre Kohärenz Null auf dem 95%-Wahrscheinlichkeitsniveau eingetragen.



- VACM
- 25 m
- 100 m
- 125 m
- 290 m
- 390 m
- 415 m
- AANDERAA
- 10 m
- >> 15 m
- xxxx 25 m
- oooo 470 m

7.3 Das Phasenspektrum

Die Phase der Temperatursignale der Geräte der horizontalen Kette von F1 weist eine Abnahme mit zunehmender Frequenz bis etwa 4 cph auf, während sie oberhalb wieder zunimmt (Abb. 7.3). Der letztere Trend ist zumindest bei den Aanderaa-Geräten und bei kleiner Separation ($r \leq 25$ m) eindeutig. Der Verlauf der Phasen $\phi_{uv}^{hor}(\omega)$ und $\phi_{vv}^{hor}(\omega)$ entspricht weitgehend denen des Temperatursignals. Eine Umkehr des Trends bei hohen Frequenzen ist aber nicht zu erkennen. Wegen der wahrscheinlich stärkeren Kontamination der Strömungsdaten wird nur ϕ_{TT}^{hor} verwendet.

Insbesondere die VACM-Strommesser neigen offenbar dazu, Datenzyklen zu unterdrücken. In der vertikalen Kette der Verankerung F1 gab es Probleme mit der Zeitbasis der verschiedenen Meßreihen, die durch Verschiebung einiger Reihen um ein Abfrageintervall nur annähernd zu lösen waren. Auch der Verlauf der Phase von zwei VACM-Geräten von 25 m Separation weist im Vergleich zu den von zwei Aanderaa-Geräten gewonnenen Werten auf geringe Zeitverschiebungen hin (Abb. 7.3). Trotzdem ist der charakteristische

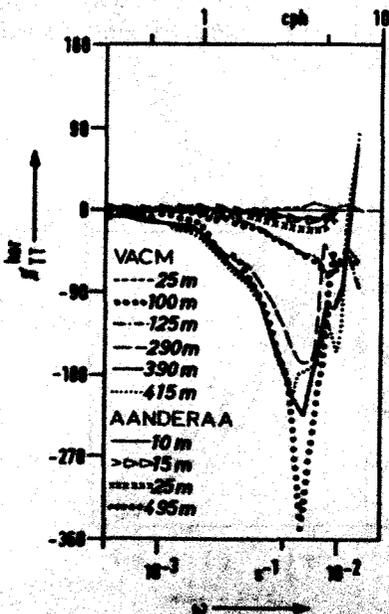


Abb. 7.3

Phasenspektrum aus den Temperaturdaten der horizontalen Kette der Verankerung F1. Der Abstand der Sensoren ist eingetragen. Die jeweils erste Meßreihe stammt vom stromauf (westwärts) gelegenen Gerät. Eine positive Phase bedeutet, daß die erste Meßreihe führt. Das Minimum der Kurve für $r=495$ m ist nicht signifikant (s. Abb. 7.2a).

Verlauf der Phasenspektren gut gesichert. Gesondert berechnete Spektren von jeweils einem Drittel der gesamten Meßreihenlängen sind innerhalb der Signifikanzgrenzen gleich.

7.4 Vertikale Kohärenz gleicher Komponenten

Eindeutige Trends sind in den Kohärenzen $\gamma_{ue}^{var}(\omega)$ und $\gamma_{vr}^{var}(\omega)$ zwischen Deckschicht (7 m Tiefe) und Sprungschicht nicht zu erkennen (Abb. 7.4 a und b). Nur ganz grob betrachtet kann eine Abnahme der Kohärenz mit wachsender vertikaler Separation festgestellt werden. Auffällig ist das niedrige Niveau der meisten Werte. Das Temperatursignal in der Deckschicht liefert keine Information über wellenbedingte Vertikalbewegungen, weil das vertikale Temperaturprofil in etwa treppenförmig ist (PETERS, 1978 a und b). Zusätzlich sind alle drei Kohärenzen der Temperatur und der Stromkomponenten zwischen der Tiefe 40 m und größeren Tiefen dargestellt (Abb. 7.4 c bis e). Wiederum sind γ_{ue}^{var} und γ_{vr}^{var} sehr klein. Daß γ_{tr}^{var} größere Werte annimmt, liegt hier auch an der unterschiedlichen Vertikalstruktur der Strömungs- bzw. Temperaturfluktuation, nicht nur an Störungen durch Feinstruktur. Phasenspektren bei vertikaler Separation sind nicht abgebildet. Anzeichen einer vertikalen Ausbreitung der Signale sind nicht festzustellen.

7.5 Vertikale Kohärenz zwischen Stromkomponenten und Temperatur

Dargestellt werden nur die Kohärenzen $\gamma_{ur}^{var}(\omega)$ und $\gamma_{vr}^{var}(\omega)$ zwischen der Strömung in der Deckschicht und der Temperatur in der Sprungschicht. Die Abbildungen 7.5 a und b werden vom breiten Maximum der Kohärenz mit hohen Werten in γ_{ur}^{var} zwischen 1.5 und 4 cph beherrscht. Der Kurvenverlauf ist von der Tiefe des Sensors in der Sprungschicht praktisch unabhängig. Die Kohärenz γ_{vr}^{var} (Abb. 7.5 b) ist sehr klein.

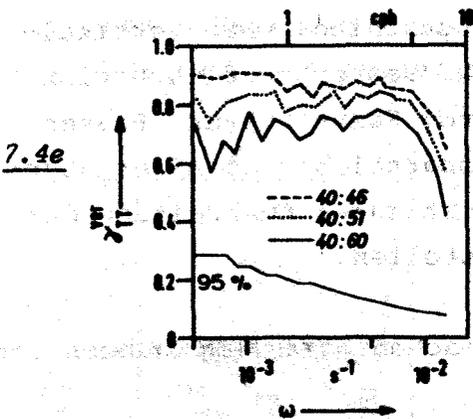
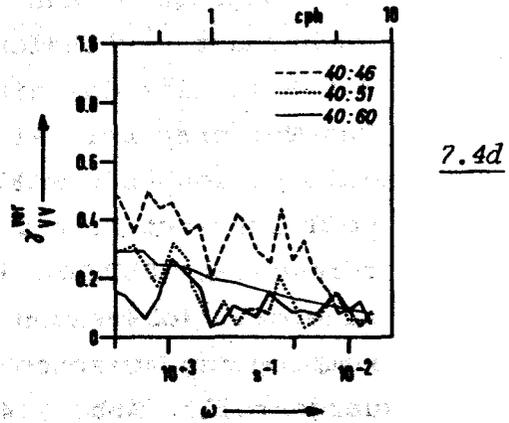
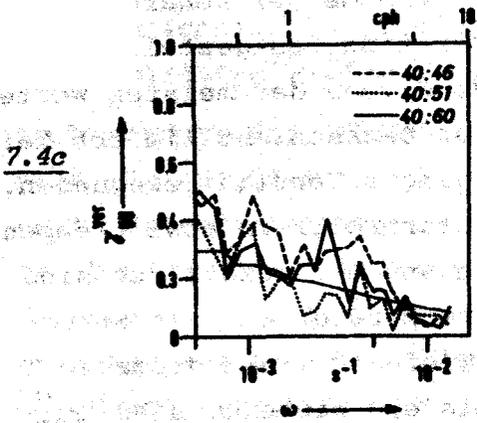
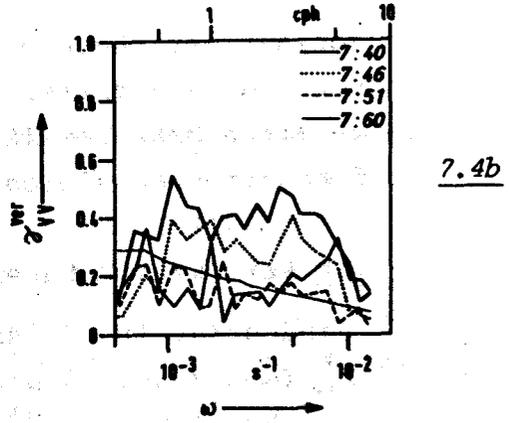
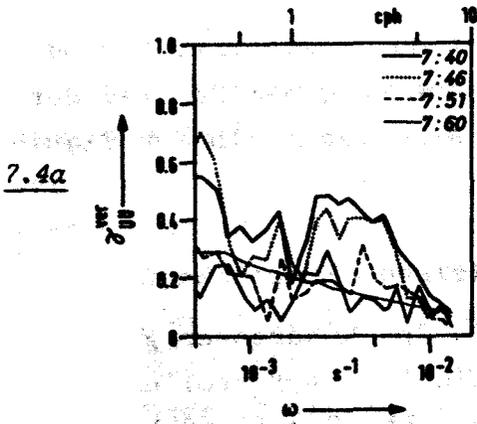


Abb. 7.4 a bis e Vertikale Kohärenzen berechnet aus Daten der Verankerung F1, Geschwindigkeitskomponenten u und v und Temperatur. Teile a und b: Kohärenz zwischen der Deckschicht (7m Tiefe) und der Sprungschicht mit Tiefen laut Angabe. Teile c bis e: Kohärenz zwischen 40 m Tiefe und den angegebenen Werten. Die dünne, durchgezogene Linie gibt die 95%-Vertrauensgrenze für wahre Kohärenz Null an.

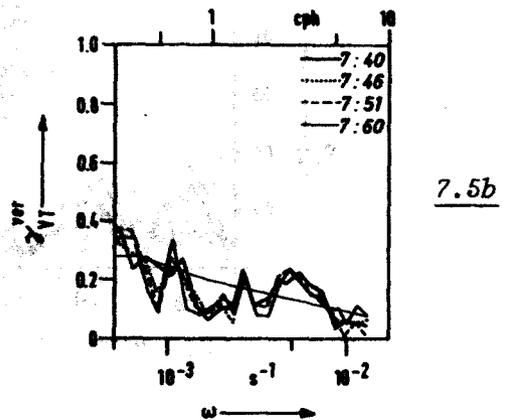
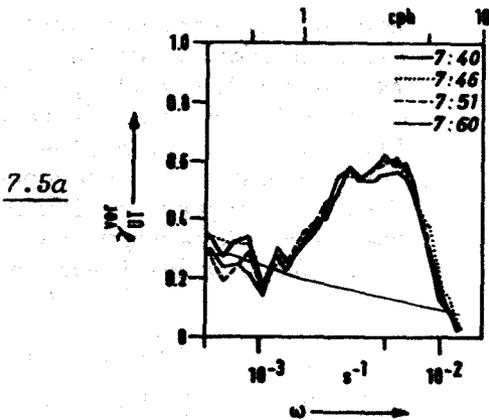


Abb. 7.5 a und b Vertikale Kohärenz zwischen den Geschwindigkeitskomponenten u und v in der Deckschicht und der Temperatur in verschiedenen Tiefen in der Sprungschicht, berechnet aus den Daten der Verankerung F1. Die dünne, durchgezogene Linie gibt die 95%-Vertrauensgrenze für verschwindende wahre Kohärenz an.

7.6 Weitere "gemischte" Kohärenzen

In der Kohärenz γ_{uv}^{hor} (Abb. 7.6) ist ein Maximum zwischen Frequenzen von 1.5 und 3.5 cph für größere horizontale Abstände der Sensoren vorhanden. Dagegen liegt die nicht abgebildete Kohärenz γ_{vr}^{hor} durchweg unterhalb der 95 % Signifikanzschwelle.

Im genannten Frequenzband stellt man auch signifikante Maxima in den Kohärenzen γ_{uv}^{ii} und γ_{vr}^{ii} am festen Ort fest (Abb. 7.7 a und b). Mit etwas gutem Willen kann dieses Charakteristikum in γ_{uv}^{ii} als deutlicher bezeichnet werden. Die Kohärenz zwischen der u - und v -Geschwindigkeitskomponente am festen Ort (Abb. 7.7 c) weist überhaupt keinen klaren Trend auf. Die verschiedenen Sensoren scheinen zufallsbedingte Maxima der Kohärenz oberhalb der Signifikanzgrenze bei allen Frequenzen zu erzeugen.

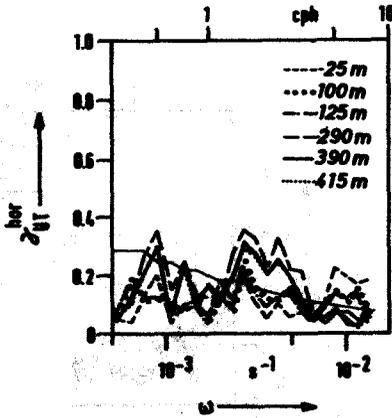
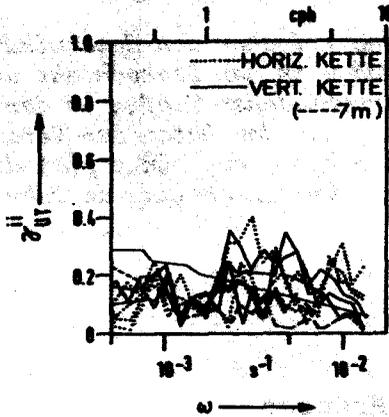
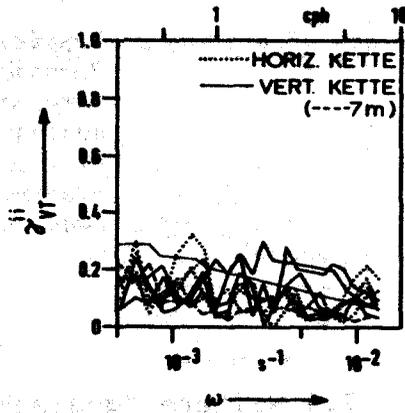


Abb. 7.6

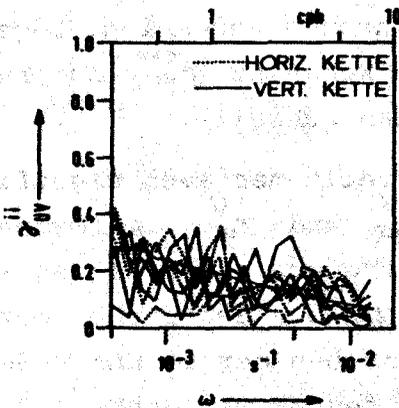
Horizontale Kohärenz zwischen der u -Geschwindigkeitskomponente und der Temperatur, berechnet aus den Meßdaten der Verankerung F1. Die horizontalen Abstände der Sensoren sind angegeben. Die dünne, durchgezogene Linie gibt die 95%-Vertrauensgrenze für verschwindende wahre Kohärenz an.



7.7a



7.7b



7.7c

Abb. 7.7 a bis c Kohärenz am festen Ort der Komponenten der Horizontalgeschwindigkeit unter sich (c) und dieser mit der Temperatur (a und b), berechnet aus den Daten der Verankerung F1. Die dünne, durchgezogene Linie gibt die 95%-Vertrauensgrenze für wahre Kohärenz Null an.

8. Ergebnisse der Modellrechnungen zu GATE

Zum Vergleich von Modell und Meßdaten sind in den Abbildungen dieses Kapitels ausgewählte "gemessene" Spektren eingetragen. Vollständig sind die letzteren in Kapitel 7 dargestellt, auf das hier global verwiesen wird.

8.1 Die Schulter in den Autospektren

Die Formulierung des Spektralmodells gemäß Kapitel 4 läßt es zu, jeden einzelnen Eigenwert mit einem beliebigen Wert der Energiedichte $E_{n\omega}(\alpha, \gamma)$ zu belegen. Bei der gewählten Auflösung im Bereich von $(\omega, \alpha, \gamma, n)$ entspricht das etwas mehr als 2200 freien Parametern; ein hoffnungsloser Fall? Es wird sich zeigen, daß im Prozeß der Anpassung des Modells an die Beobachtungen nicht unbegrenzt Raum für Willkür ist.

Zunächst werden Energiespektren behandelt. Es wird untersucht, welchen Einfluß der Verlauf der Gruppengeschwindigkeit und des Normierungsfaktors der Moden in Abhängigkeit von α bzw. ω auf die Form der Modellspektren hat. Diese Funktionen sind in den Abbildungen 8.1 bis 8.3 illustriert. Zusätzlich ist in Abb. 8.4 der ebenfalls aus Kapitel 4 bekannte Quotient $\left(\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right)_n c_n^{-1}$ für spätere Erörterungen dargestellt. Die Minima der Gruppengeschwindigkeit (8.1, 8.3) und die Maxima des Normierungsfaktors (8.2) können Maxima in den Autospektren erzeugen. Abb. 8.5 demonstriert diesen Effekt. Bei den zugehörigen Berechnungen ist das Überwiegen der ersten Mode vorausgesetzt ($g_n \sim n^{-2}$). Bezüglich der ersten Mode bewirken sowohl die Gruppengeschwindigkeit wie die Normierung ein Maximum der Energiedichte etwa bei der gleichen Frequenz, die auch durch die Berücksichtigung des mittleren Stroms nicht verschoben wird. Der

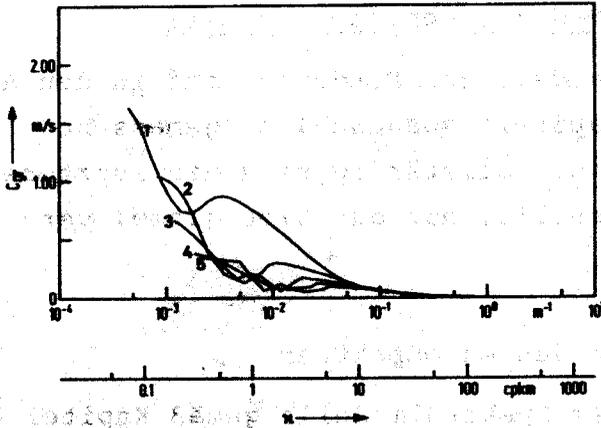


Abb. 8.1

Gruppengeschwindigkeit als Funktion der Wellenzahl für den Fall 3 (N_{GATE} , $\bar{u} \equiv (0,0)$), berechnet aus den Werten von Abb. 3.2.

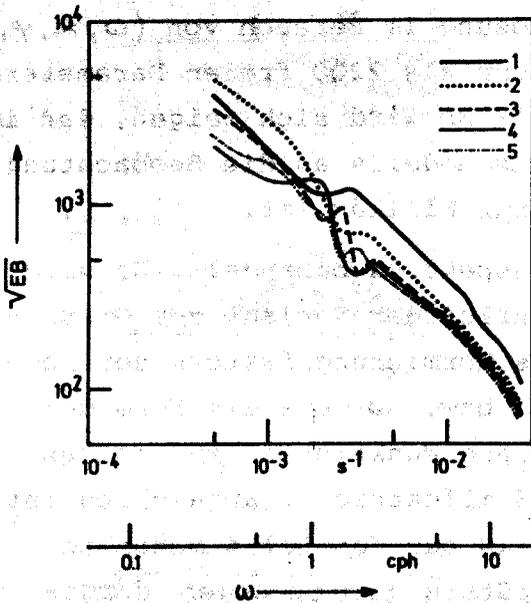


Abb. 8.2

"Amplitude" der normierten Eigenfunktionen \hat{w} vom Fall 3, d.h. Kehrwert des Normierungsfaktors (Gleichung 2.32). Die Einheit von \sqrt{VEB} ist $s \text{ kg}^{-1/2}$.

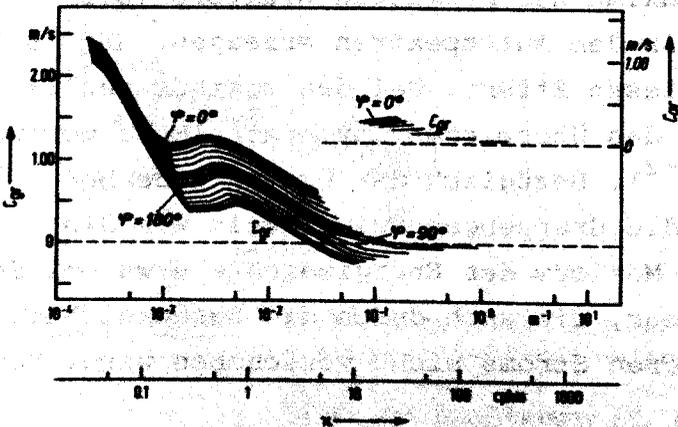


Abb. 8.3

Gruppengeschwindigkeit der 1. Mode für den Fall 4 (N_{GATE} und \bar{u}_{GATE}) in Abhängigkeit von k für verschiedene Richtungen der Wellen. Der rechts oben eingesetzte Teil der Graphik entspricht den langsamen, strom-

abwärts gerichteten Wellen. Dargestellt sind die bei den Modellrechnungen verwendeten Werte.

Vergleich der Modellspektren für die Fälle 3 und 4 zeigt lediglich das "Versmieren" der Energie im hochfrequenten Bereich infolge von Dopplerverschiebungen.

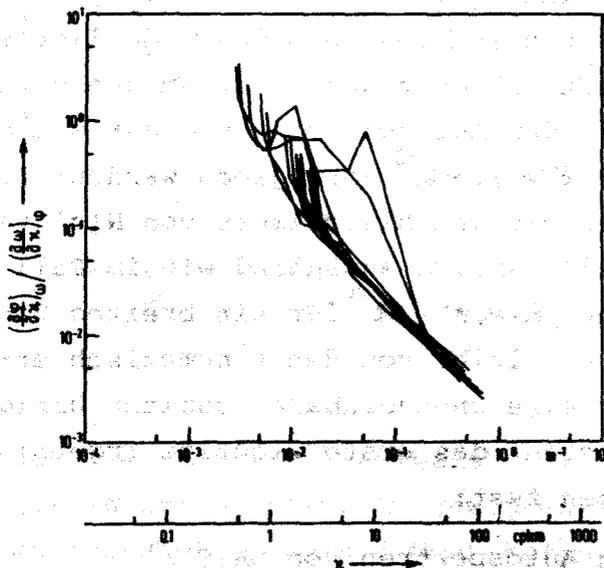


Abb. 8.4

Quotient $(S_u/S_v)_0 / (S_u/S_v)_0$ in Abhängigkeit von der Wellenzahl für den Fall 4. Die Einheit ist m^{-2} s. Eingetragen sind Werte der Moden 1 bis 5, die bei den Modellrechnungen benötigt werden.

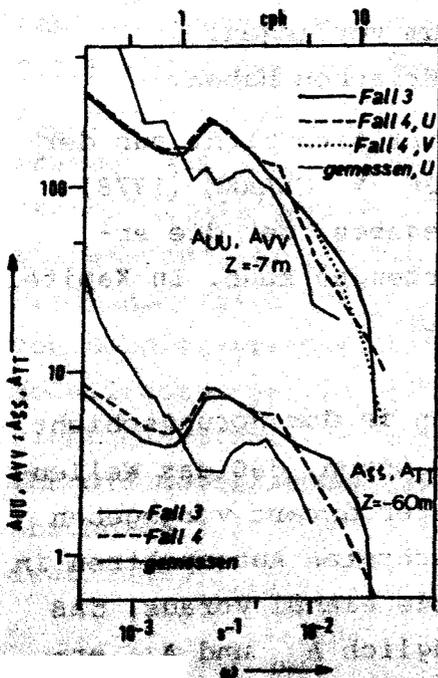


Abb. 8.5

Modell-Autospektren bei Vorgabe eines breitbandig wie ω^{-2} abfallenden Wellenzahlspektrums für die Fälle 3 und 4, ferner korrespondierende, aus Messungen gewonnene Spektren. Parameter der Modellrechnungen: 3 in Tabelle 5.1.

Alle modellierten Energiespektren sind nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Betrachtet wird nur die Form, nicht das Niveau der Kurven. Aus Messungen gewonnene Spektren sind in willkürlicher Höhe bezüglich der Ordinate eingetragen. Im Niveau vergleichbar sind nur einander zugeordnete Spektralkomponenten A_{uu} und A_{vv} . Diese Anmerkungen gelten für das gesamte Kapitel 8.

Das kinematisch erzeugte Maximum in den Autospektren liegt im Vergleich mit den Messungen bei zu kleinen Frequenzen (Abb. 8.5). Zudem sind die Modellspektren im Bereich des Kontinuums der internen Wellen, also bei kleinen Frequenzen, in bezug auf das modellierte Frequenzband, bewußt schlecht angepaßt. Um den dort beobachteten Abfall der Autospektren ungefähr wie ω^{-2} zu simulieren, muß $E(\alpha, \varphi) \sim \alpha^{-3}$ vorgegeben werden. Für kleinere Frequenzen als dem Minimalwert von $N(z)$ verhält sich das Modell nämlich annähernd wie im Fall $N^2 = \text{const.}$ Ist aber $E(\alpha, \varphi) \sim \alpha^{-3}$ für ein breites Band von Wellenzahlen, so bleibt von den kinematisch erzeugten Maxima nur eine unscheinbare Schulter übrig (Abb. 8.6). Damit steht das erste wichtige Ergebnis der Modellrechnungen fest:

Die in den Autospektren von GATE vorhandene spektrale Schulter im Frequenzbereich von 1.5 bis 4 cph ist im wesentlichen nicht durch kinematische Effekte bedingt. Eine entsprechende Struktur muß vielmehr im Wellenzahlspektrum vorliegen. Sie muß dynamische Ursachen haben.

1

Die letzte Feststellung ergibt sich nicht aus der vorstehenden Diskussion. KÄSE & CLARKE (1978) haben einen Mechanismus angegeben, der die erörterte Form der Spektren erzeugen kann. In Kapitel 9 wird dieser Punkt diskutiert.

8.2 Die Form der Autospektren in der Sprungschicht Von hier ab wird davon ausgegangen, daß das Wellenzahlspektrum mit einer Schulter derart vorgegeben wird, daß die Form der beobachteten Autospektren in etwa simuliert wird. Man setze einmal voraus, daß das für die Deckschicht bezüglich A_{uu} und A_{vv} erreicht sei. Daß dann A_{gg} dort keine Ähnlichkeit mit

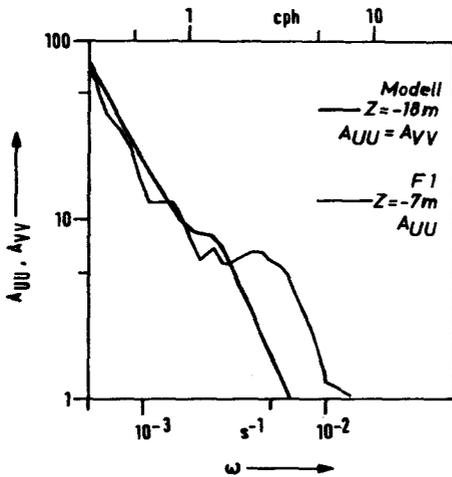


Abb. 8.6

Modell-Autospektrum bei Vorgabe eines breitbandig mit ω^{-3} abfallenden Wellenzahlspektrums (4 in Tabelle 5.1) und beobachtete Vergleichswerte. Die unterschiedlichen Tiefen sind für den Vergleich unwesentlich.

dem gemessenen A_{TTT} aufweist, beunruhigt nicht, da das in der Deckschicht gewonnene Temperatursignal keinen Rückschluß auf Vertikalbewegungen zuläßt (siehe Abschnitt 7.4). Außerdem passen aber die Spektren der Horizontalgeschwindigkeit in der Sprungschicht nicht gut zu den Messungen. Abb. 8.7 a gibt ein Beispiel. Die großen Unterschiede zwischen A_{uu} und A_{vv} sind auch durch eine sehr unterschiedliche Wahl von Modellparametern nicht zu beseitigen. Abb. 8.7 b und c zeigen, daß die relative Überhöhung von A_{vv} gegenüber A_{uu} von Beiträgen der Moden 2 bis 5 erzeugt wird. Sie beruht auf dem Zusammenwirken des "roten" Charakters von $E_{nc}(\omega)$ mit der Form der Dispersionskurven, die für $|\varphi| > 90^\circ$ im fraglichen Wellenzahl-Frequenzbereich für die Moden 2 bis 5 schon sehr stark von Dopplerverschiebungen beeinflusst ist. Für die Modellrechnungen zu Abb. 8.7 wurde eine anisotrope Richtungsverteilung $R(\varphi)$ vorgegeben, weil sich das für die Modellierung als notwendig erweist (siehe Abschnitt 8.3.3) und das angesprochene Problem verdeutlicht.

Bei den bisherigen Rechnungen ist $E_{ng}(\alpha)$ als unabhängig vom Modeindex n angesetzt. Unterschiede der Energieverteilung entlang korrespondierender Dispersionskurven verschiedener Moden ergeben sich lediglich dadurch, daß bei fester Frequenz höhere Moden größere Eigenwerte α haben. Möglicherweise ist also die modale Zusammensetzung der Spektren im Bereich 2 - 4 cph ungünstig. Eben das zeigt die in Abb. 8.8 dargestellte horizontale Kohärenz γ_{33}^{hor} , die Ergebnis eben der Modellrechnungen ist, auf denen auch Abb. 8.7 a beruht. Die berechneten Kohärenzwerte sind zu klein, die Bandbreite im Wellenzahlbereich ist danach zu groß.

Die Form der berechneten horizontalen Kohärenzen hängt viel stärker von der Gewichtung der Moden als von den Formparametern von E_{ng} ab. Näherungsweise ist z.B. die Frequenz, bei der die Kohärenz auf den Wert $1/2$ abgefallen ist, nur eine Funktion der Bandbreite im Wellenzahlbereich. Überhaupt läßt sich eine Anpassung des Modells an die Daten deswegen relativ leicht erreichen, weil die einzelnen Komponenten der Rechenresultate, also die unterschiedlichen Spektren, in ganz verschiedenem Grad von den diversen Modellparametern abhängen. Ein mathematisches Kalkül zur simultanen Bestimmung einer Anzahl von gekoppelten Parametern ist somit für eine grobe Anpassung unnötig.

Der Vergleich der gemessenen mit berechneten horizontalen Kohärenzen zwingt zur Annahme, daß die erste Mode zumindest im hochfrequenten Bereich dominierend sein muß. Damit ist eine Modellierung der in der Sprungschicht beobachteten spektralen Schulter von A_{uu} und A_{vv} aber unmöglich, wie Abb. 8.7 b und c deutlich zeigen. Der starke Abfall der Modellspektren für Mode 1 alleine ab ca. 1 cph wird davon verursacht, daß sich nahe 60 m Tiefe die Knoten der Funktionen \hat{u} und \hat{v} befinden (Abb. 3.9 bis 3.11).

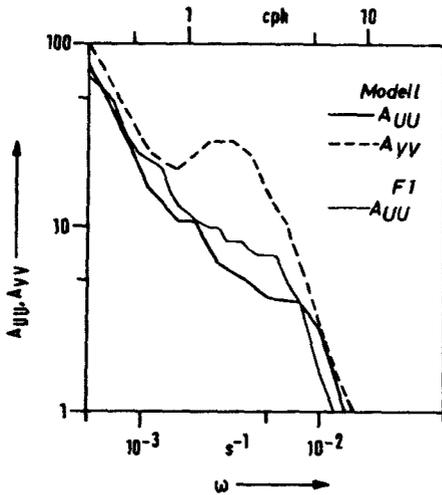


Abb. 8.7a

Autospektren der Komponenten der Horizontalgeschwindigkeit in 60 m Tiefe, Modell und Beobachtung. Modellparameter: 5 in Tabelle 5.1.

Das Ergebnis Nr. 2 lautet:

2

Mittels der stochastischen Überlagerung von Moden, die aus der mittleren Schichtung und Strömung berechnet sind, läßt sich die Vertikalstruktur der beobachteten Strömungsfluktuationen nicht angemessen beschreiben.

Die Unzulänglichkeit des Modells in diesem Punkt erstaunt zumindest nach einiger Überlegung nicht. Die unberücksichtigten langperiodischen, energetischen Schwankungen mit Trägheits- und Gezeitenfrequenz bewirken eine Modulation des Systems der Moden und Dispersionskurven. Insbesondere wird auch die Vertikalposition der Knoten von \hat{u} und \hat{v} variiert. Da A_{uu} und A_{vv} keine linearen Funktionen von z sind (Abb. 8.9), muß schon aus rein kinematischen Gründen in der Sprungschicht mehr Energie im Bereich von 2 bis 4 cph beobachtet werden, als Abb. 8.9 angibt. Überdies legt die Arbeit von REDELL (1979) die Annahme nahe, daß auch dynamische Prozesse, die Wechselwirkung unterschiedlicher Spektralbereiche, eine zeitliche Veränderung der Energie im hochfrequenten Band bewirken. Tatsächlich schwankt diese größenordnungsmäßig im Verhältnis 1 : 3 (KÄSE & SIEDLER, 1980, Abb. 13).

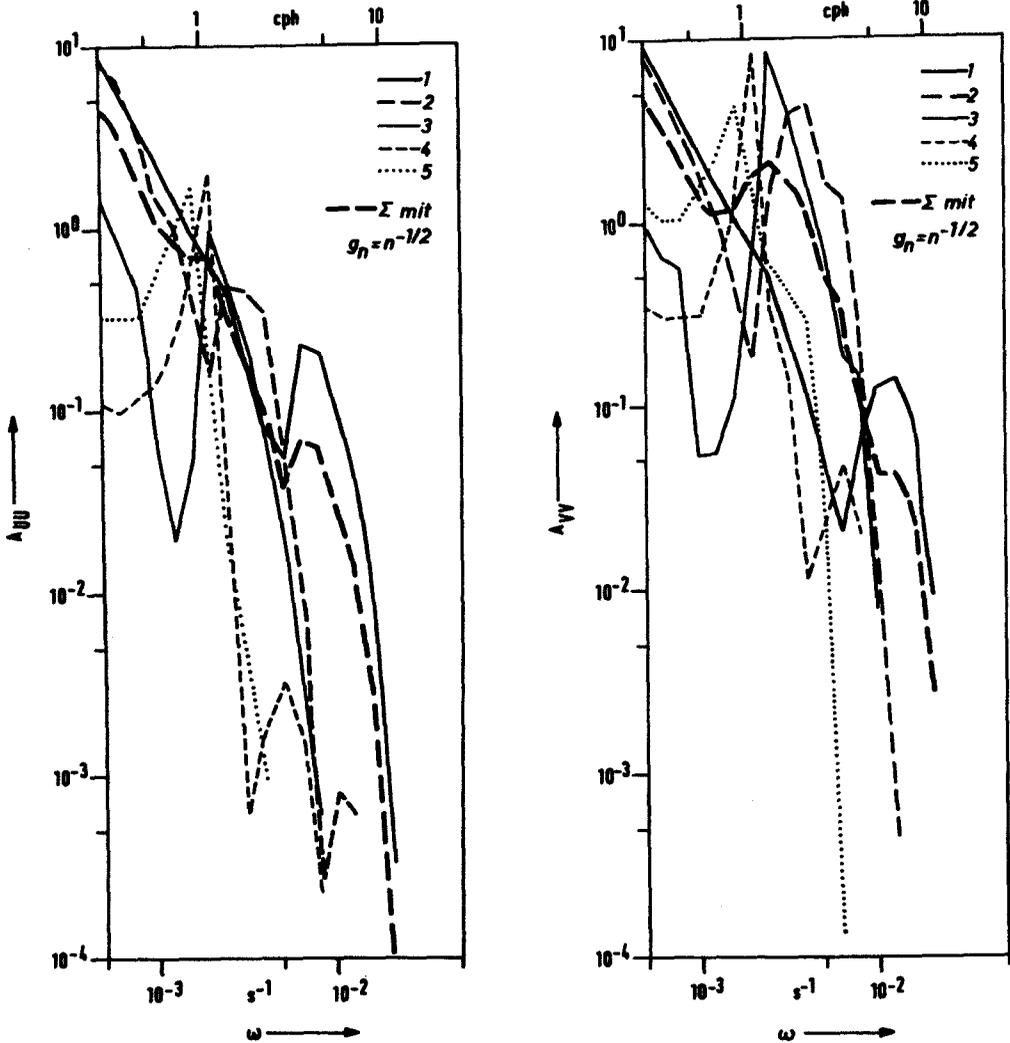


Abb. 8.7 b und c Von den Moden 1 bis 5 je für sich alleine erzeugt Autospektren in 60 m Tiefe und Summenspektrum bei einer Gewichtung der Moden wie $n^{-1/2}$. Modellparameter: 6 in Tabelle 5.1.

Betrachtet man die Form, nicht das Niveau der Kurven (s.u.), so ist in Abb. 8.9 bei $\omega = 4$ cph und $z = -60$ m die Energiedichte um den Faktor 3 zu klein. Überschlagsrechnungen zeigen, daß dieses Defizit nicht rein kinematisch durch die langperiodische Vertikalbewegung der Sprungschicht behoben werden kann.

Am Zustandekommen der beobachteten Vertikalverteilung der kinematischen Energie wie auch der vertikalen Kohärenz können außer der Wechselwirkung noch andere

Prozesse beteiligt sein. Die gemessenen Fluktuationen enthalten mit Sicherheit außer internen Wellen "Störungen" (noise), die z.B. von der Strömungsfeinstruktur (BRISCOE, 1977) verursacht werden. Da die Wellen selber durch Brechen solche Strukturen erzeugen können, sind Störung und Signal nicht unbedingt unkorreliert. Ferner ist es möglich, daß in den Beobachtungen im Mittel ein Anteil vertikal fortschreitender Wellengruppen enthalten ist. Beide Prozesse führen zu einer Verringerung der vertikalen Kohärenz. Eine quantitative Abschätzung ihrer relativen Bedeutung erscheint hier unmöglich. Die mit der Unzulänglichkeit des Modells verbundenen Probleme werden in Kapitel 9 noch einmal aufgegriffen. Einstweilen wird das Ergebnis Nr. 3 (Abschnitt 8.3.2) als Bestätigung aufgefaßt, das Konzept der Superposition von Moden weiter zu verfolgen. Entsprechend der vorstehenden Diskussion beschränken sich die folgenden Erörterungen auf die Horizontalgeschwindigkeiten in der Deckschicht und die Vertikalauslenkung in der Sprungschicht und ihre Beziehungen untereinander. Bei der weiteren Interpretation der Modellrechnungen ist Vorsicht geboten. Insbesondere ist zu prüfen, ob Tatbestände explizit auf der Vertikalstruktur der Moden beruhen.

Über die Gewichte der Moden bei Frequenzen nahe der Untergrenze des Modells (≈ 0.3 cph) kann keine Aussage gemacht werden. Die Anordnung der Strommesser in der Verankerung F1 ist dafür in horizontaler und vertikaler Richtung zu wenig ausgedehnt. In den Modellrechnungen ist willkürlich $g_n = 0.2$ gesetzt. Das entspricht für kleine Frequenzen in etwa einer Verteilung der Gesamtenergie der Moden (Gleichung (2.32)) wie $1/n$. Das Vertikalprofil der kinetischen Energie hängt von den Gewichten g_n ab und unterliegt so bei kleinen Frequenzen ebenfalls einer gewissen Willkür.

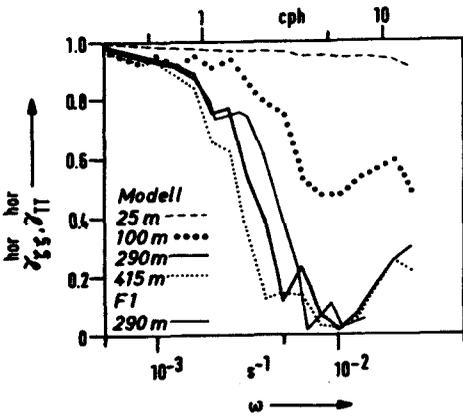


Abb. 8.8

Horizontale Kohärenz der Vertikalauslenkung in 60 m Tiefe nach Modellrechnungen; beobachtete Temperaturkohärenz zum Vergleich. Die horizontalen Abstände der Orte der Messung bzw. Berechnung sind angegeben. Modellparameter: 5 in Tabelle 5.1.

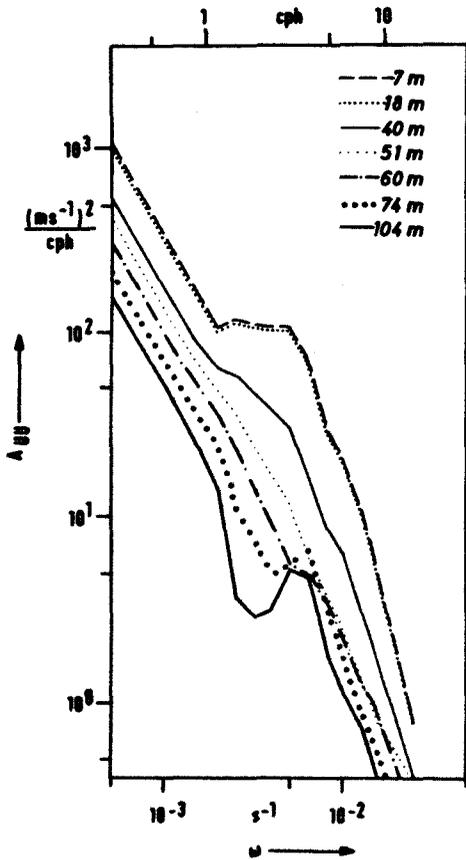


Abb. 8.9a

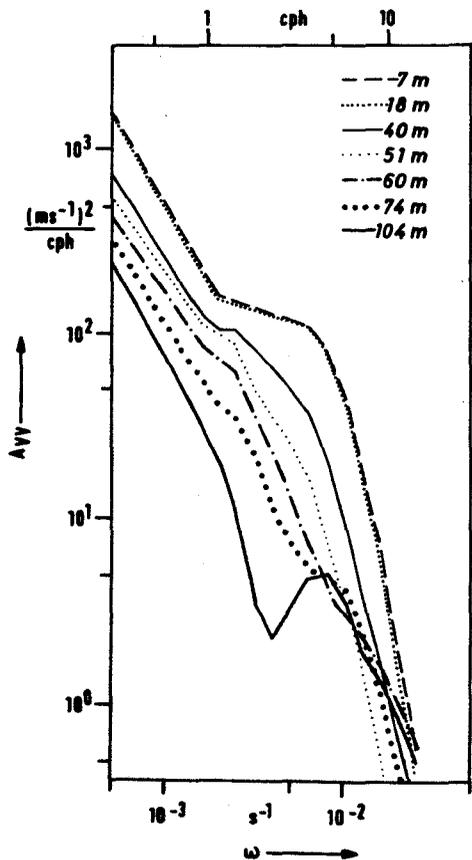


Abb. 8.9b

Abb. 8.9 a und b Modell-Autospektren der Komponenten der Horizontalgeschwindigkeit in verschiedenen Tiefen. Modellparameter: 7 in Tabelle 5.1; Fall 4.

8.3 Charakteristika der Modellspektren

8.3.1 Allgemeines, Autospektren

Im folgenden werden "gut angepaßte" Modellrechnungen vorgestellt. Die Vorgabe der in Tabelle 5.1 mit den Indizes 7 und 8 versehenen Sätze von Parametern führen zu sehr ähnlichen Resultaten. Die Werte vermitteln eine Vorstellung vom Grad der Willkür, mit der die Parameter festgelegt sind. Alle Rechnungen basieren in Schichtung und mittlerer Strömung auf der GATE-Hydrographie. Was geschieht, wenn willkürlich $\bar{u} \equiv (0,0)$ gesetzt wird, ist weiter unten (Abschnitt 8.4) erörtert. Um das Überwiegen der ersten Mode im Bereich der spektralen Schulter zwischen 1.5 und 4 cph sicherzustellen, wird bezüglich der Energieverteilung längs der Dispersionskurven nur bei der ersten Mode im Wellenzahlbereich eine spektrale Schulter vorgegeben, während die Energie bei den höheren Moden breitbandig mit ω^{-3} bzw. $\omega^{-2.75}$ abfällt (siehe auch Abschnitt 5, Tabelle 5.1). In Abb. 8.10 und 8.11 sind Rechen- und Meßergebnisse dargestellt. Die Wellenzahl des Übergangs vom Kontinuum zur Schulter der Spektren ist genau so gewählt, daß die Autospektren möglichst glatt an die kinematisch bedingte Erhöhung der Energiedichte (Abb. 8.6) anschließen.

8.3.2 Horizontale Kohärenz in der Sprungschicht

Die zu den vorstehenden Abbildungen gehörige horizontale Kohärenz ist in Abb. 8.12 dargestellt. Die Übereinstimmung mit den Messungen ist nicht übermäßig gut; offenbar ist für $\omega > 1$ cph die Energie der Moden 2 - 5 immer noch zu groß. Das zeigt die Abb. 8.12b zugrundeliegende Rechnung, in der ausschließlich Mode 1 Energie zugewiesen wurde. Das dritte wichtige Ergebnis lautet somit:

3

Die Horizontalstruktur des internen Wellenfeldes wird bestimmt durch die Dispersionskurven der ersten Mode.

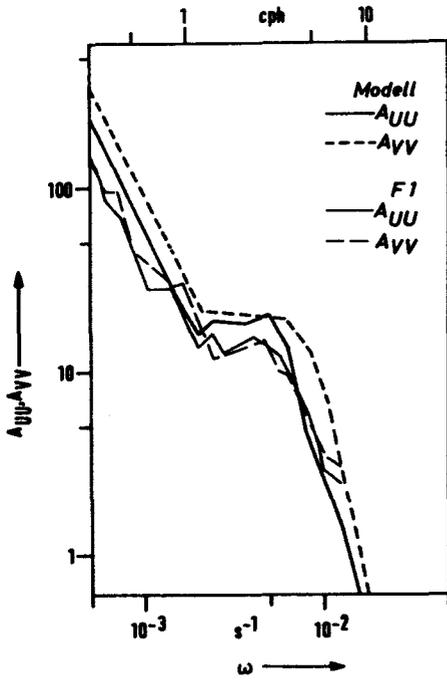


Abb. 8.10

Autospektren der Komponenten der Horizontalgeschwindigkeit in der Deckschicht ($z = -7m$), Messungen und gut angepaßte Modellrechnung. Modellparameter: 8 in Tabelle 5.1; Fall 4.

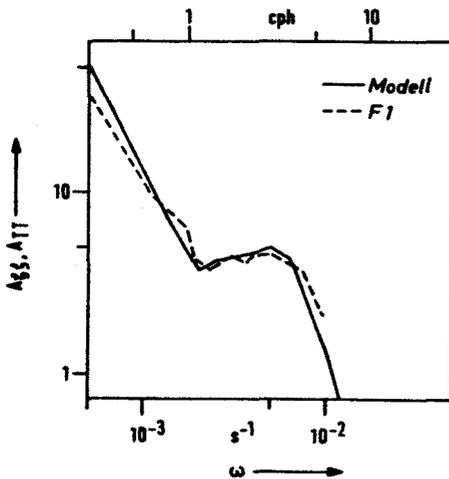


Abb. 8.11

Autospektren der Vertikalauslenkung (Modell) bzw. der Temperatur (Messungen) in 60 m Tiefe für eine gut angepaßte Modellrechnung. Modellparameter: 8 in Tabelle 5.1; Fall 4.

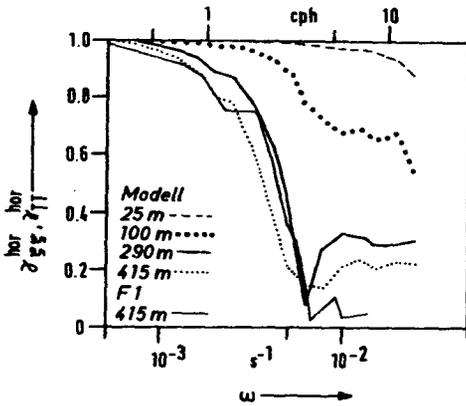


Abb. 8.12a

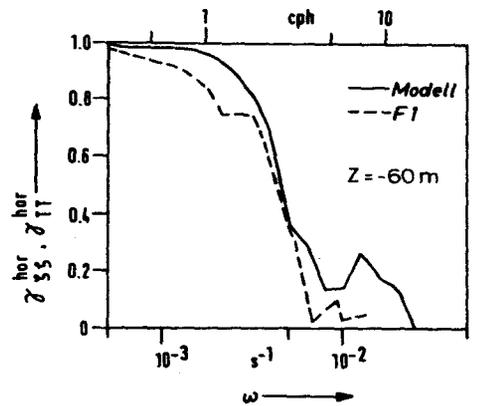


Abb. 8.12b

Abb. 8.12 a und b

Horizontale Kohärenz der Vertikalauslenkung in der Sprungschicht (60 m Tiefe) nach verschiedenen Modellrechnungen, Modellparameter: 8 (a) und 6 (b) in Tabelle 5.1; Fall 4. Zum Vergleich: Beobachtete Temperaturkohärenz. Die horizontale Separation (in Stromrichtung) ist angegeben. Teil b: Horizontale Kohärenz für Mode 1 alleine, $r = 415 \text{ m}$.

8.3.3 Das Phasenspektrum

Berechnete Phasenspektren sind in Abb. 8.13 dargestellt. Den Rechnungen liegt eine anisotrope Richtungsverteilung zugrunde, die ein Maximum in Richtungen schräg gegen den Strom hat. Das Modell reproduziert die Messungen zumindest qualitativ. Mit zunehmender Frequenz nimmt die Phase zunächst ab, da die Wellen sich mit einer stromaufwärts gerichteten Komponente ausbreiten. Sie nimmt bei hohen Frequenzen infolge von Dopplereffekten (vergleiche Abschnitt 6) wieder zu.

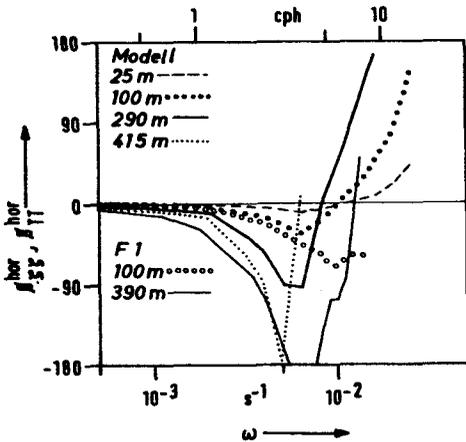


Abb. 8.13

Phasenspektrum für verschiedene Werte der horizontalen Separation (in Stromrichtung), Tiefe: 60 m, Modell und Messungen. Modellparameter: 8 in Tabelle 5.1; Fall 4. Positive Phasen bedeuten ein Fortschreiten des Signals in Stromrichtung.

8.3.4 Die Kohärenz zwischen der u-Strömungskomponente in der Deckschicht und der Vertikalauslenkung in der Sprungschicht

Bevor eine Begründung für die gewählte Form der Richtungsverteilung gegeben wird, soll erst noch die vertikale Kohärenz $\gamma_{u\zeta}^{ver}$ (bzw. $\gamma_{u\tau}^{ver}$ nach den Messungen) vorgestellt werden (Abb. 8.14). Das deutliche Maximum zwischen 1.5 und 4 cph wird gut reproduziert, ebenso auch dessen Unabhängigkeit von der Tiefe in der Sprungschicht (Abb. 7.5a). Zum weiteren Vergleich wird ein Beispiel von Rechnungen mit isotropem R herangezogen (Abb. 8.15). Dieses zeigt eindeutig, daß das Maximum der Kohärenz kinematisch vorgegeben ist und durch adäquate Wahl von $R(\varphi)$ lediglich in numerisch richtige Bereiche verschoben wird. Dieser Sachverhalt ist von der Vertikalstruktur der Moden nicht explizit abhängig. Knoten der Eigenfunktionen \hat{u} und $\hat{\zeta}$ sind weit von den jeweiligen Tiefen, für die die Berechnungen durchgeführt sind, entfernt, so daß die Terme w_{ζ}^p in Gleichung 4.14 in Abhängigkeit von ω einen "glatten" Verlauf haben.

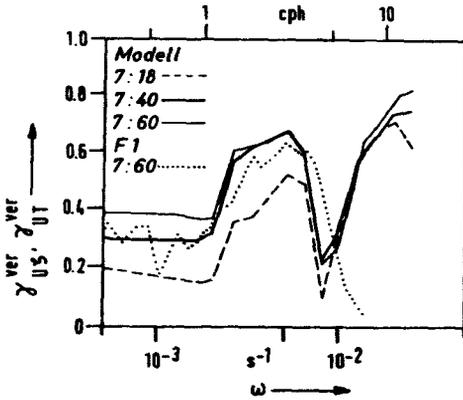


Abb. 8.14

Vertikale Kohärenz zwischen der u -Geschwindigkeitskomponente in der Deckschicht und der Vertikal-auslenkung in der Sprungschicht, Modell und Messung. Modellparameter: 8 in Tabelle 5.1; Fall 4.

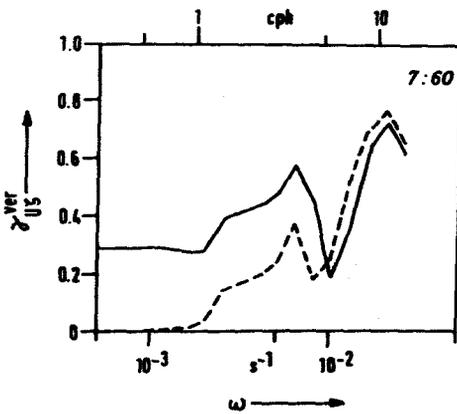


Abb. 8.15

Vertikale Kohärenz γ_{US}^{VER} zwischen Deck- und Sprungschicht (7 und 60 m Tiefe) von zwei Modellrechnungen mit isotroper (gestrichelt) bzw. anisotroper (durchgezogen) Richtungsverteilung. Modellparameter: 9 in Tabelle 5.1.

8.3.5 Die Richtungsverteilung

In Abb. 8.16 ist das Phasenspektrum wiedergegeben, das bei Vorgabe von $R = \text{const.}$, also bei Isotropie, entsteht. Entgegen den Verhältnissen im Fall 2 ($N = \text{const.}$, $\bar{u} = (\text{const.}, 0)$) dominieren Dopplereinflüsse das Phasenspektrum nur bei hohen Frequenzen. Der in 8.3.3 beschriebene prinzipielle Verlauf in Abhängigkeit von der Frequenz ist ebenso wie das Maximum von γ_{US}^{VER} durch die Kinematik des Systems im Ansatz vorgegeben.

Das Ergebnis Nr. 4 lautet:

Für die Beschreibung der aus den Messungen geschlossenen Richtung der Wellen überwiegend schräg gegen den Strom können rein kinematische Effekte nicht vernachlässigt werden. Im Modell kann eine auch zahlenmäßig richtige Nachbildung des gemessenen Phasenspektrums aber nur durch Vorgabe eines anisotropen Wellenzahl-Richtungsspektrums erreicht werden.

4

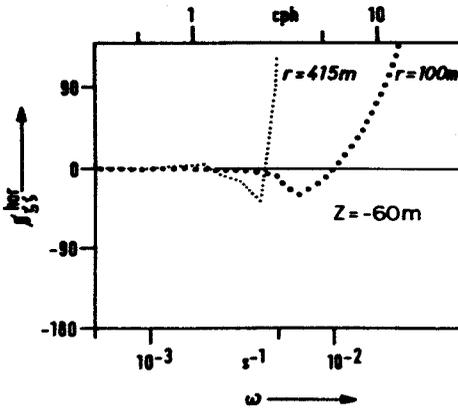


Abb. 8.16

Phasenspektrum der Vertikalauslenkung für verschiedene horizontale Distanzen laut Angabe. Das vorgegebene Wellenzahlspektrum ist isotrop (vergl. Abb. 8.13). Modellparameter: 9 in Tabelle 5.1.

Die den diskutierten Modellrechnungen zugrunde gelegte Richtungsverteilung ist quer zum Strom symmetrisch: Die Wellen laufen gleichermaßen nach "Südwesten" wie nach "Nordwesten". Im Modell führt die Symmetrie dazu; daß für die Kohärenzen $\gamma_{uv}^M \approx 0$ und $\gamma_{v3}^M \approx 0$ gilt. Da man die Aussage von Abb. 7.7c (γ_{uv}^M) als zweifelhaft ansehen kann, kommt der vertikalen Kohärenz γ_{v3}^{vr} eine Schlüsselrolle zu. In allen Modellrechnungen mit in bezug auf positive und negative Winkel asymmetrischen Richtungsverteilungen nimmt diese Kohärenz durchweg sehr große Werte an, größer als γ_{uv}^{vr} , was mit den Messungen (Abb. 7.5b) unvereinbar ist. Das Ergebnis Nr. 5 lautet:

5

Die Richtungsverteilung des internen Wellenfeldes muß als symmetrisch quer zum mittleren Strom angesehen werden.

8.3.6 Andere Kohärenzen

Der Vollständigkeit halber ist in Abb. 8.17 die berechnete horizontale Kohärenz zwischen u-Geschwindigkeitskomponente und Vertikalauslenkung dargestellt. Trotz der Fehlanpassung von A_{uu} in der Sprungschicht zeigen die Rechnungen offensichtliche Ähnlichkeit mit den Messungen (Abb. 7.16a). Das ist insofern bemerkenswert, als die modellierten Phasenspektren $\phi_{uu}(\omega)$ und $\phi_{vv}(\omega)$ der Sprungschicht weder $\phi_{SS}(\omega)$ noch den gemessenen Werten ähneln.

Abb. 8.18 zeigt berechnete vertikale Kohärenzen. Sie weichen von den aus den Meßdaten gewonnenen Werten stark ab. Global gesehen sind die berechneten Werte viel zu groß. In den Rechnungen beruht die hohe Kohärenz zwischen 7 und 104 m Tiefe bei hohen Frequenzen auf der Nähe des Reflexionspunktes (turning point) der Wellen. In der Sprungschicht können trotz Dominanz der 1. Mode kleine Werte der Kohärenz im hochfrequenten Bereich auftreten, weil die Tiefe der Knoten von \hat{u} und \hat{v} bei $\omega = \text{const.}$ vom Winkel abhängt.

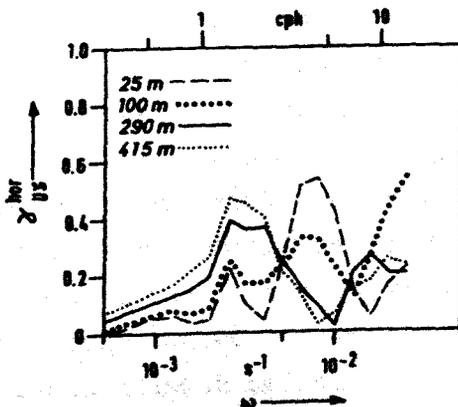


Abb. 8.17

Horizontale Kohärenz zwischen u-Geschwindigkeitskomponente und Vertikalauslenkung bei horizontaler Separation laut Angabe. Parameter der Modellrechnungen: 7 in Tabelle 5.1; Fall 4.

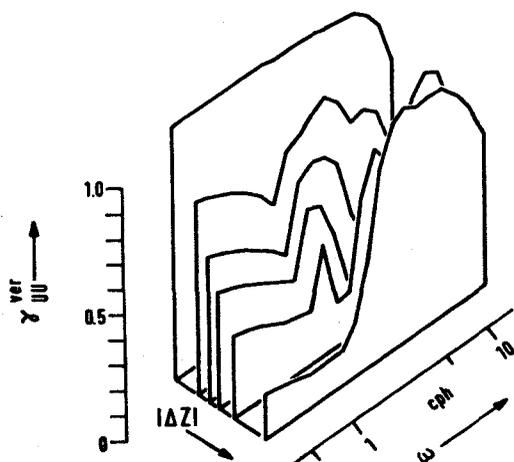


Abb. 8.18a

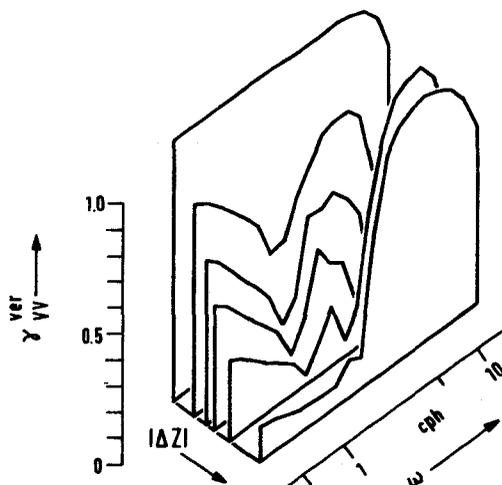


Abb. 8.18b

Abb. 8.18 a und b

Vertikale Kohärenz der Komponenten der Horizontalgeschwindigkeit zwischen der Deckschicht (7 m Tiefe) und den Tiefen 18, 40, 51, 60, 74 und 104 m in der Sprungschicht. Parameter der Modellrechnungen: 7 in Tabelle 5.1; Fall 4.

8.4 Vergleich mit Fall 3

Hier werden Rechnungen vorgestellt, die auf den mittleren Feldern N_{GATE} und $\bar{u} = (0,0)$ beruhen, deren Modellparameter aber schon im vorigen Abschnitt verwendet wurden. Gegenüber dem dort behandelten Fall 4 ändert sich die horizontale Kohärenz in der Sprungschicht nicht wesentlich (Abb. 8.19), was zu erwarten war (siehe Abschnitt 8.2). Die Phase des Temperatursignals in der Sprungschicht (Abb. 8.2a) entspricht den Messungen viel schlechter als in Fall 4. Noch deutlicher als das Phasenspektrum des Falls 3 zeigt die vertikale Kohärenz γ_{u3}^{ver} (Abb. 8.21), daß die vom mittleren Strom dem Wellenfeld aufgeprägte kinematische Struktur nicht zu vernachlässigen ist. Vom beobachteten Maximum ist keine Spur, vielmehr ist γ_{u3}^{ver} etwa konstant und ungleich Null wegen der

Anisotropie von $R(\varphi)$. Das auf den ersten Blick einleuchtende physikalische Argument, daß γ_{uT}^{var} bei Dominanz der ersten Mode deswegen groß ist, weil \hat{u} an der Oberfläche und \hat{T} in der Sprungschicht ihre Maxima haben, ist also nicht stichhaltig. Es paßt übrigens auch nicht zu der geringen Größe von γ_{uT}^{var} (Abb. 7.5b). Ergebnis Nr. 6, das letzte des Kapitels, lautet:

6

Das im Bereich von 1.5 bis 4 cph beobachtete deutliche Maximum der Kohärenz zwischen u-Geschwindigkeitskomponente in der Deckschicht und Temperatur in der Sprungschicht muß grundsätzlich auf die Wirkung des mittleren Stromes zurückgeführt werden, wobei im einzelnen die anisotrope Richtungsverteilung im Wellenzahlspektrum eine Rolle spielt.

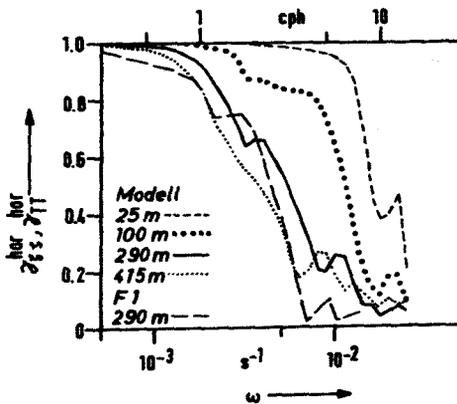


Abb. 8.19 Horizontale Kohärenz in der Sprungschicht für Distanzen laut Angabe. Modell (Fall 3; $\bar{u} = (0,0)$) und Messungen. Modellparameter: γ in Tabelle 5.1. Zum Vergleich mit Abb. 8.12a.

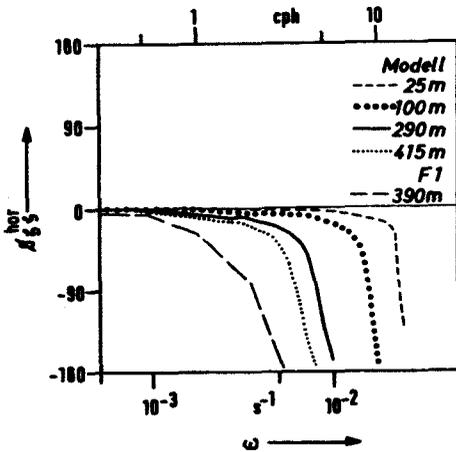


Abb. 8.20

Phasenspektrum in der Sprungschicht für unterschiedliche Separation, Fall 3 ($\bar{u} \equiv (0,0)$). Modellparameter: 7 in Tabelle 5.1. Zum Vergleich mit Abb. 8.13.

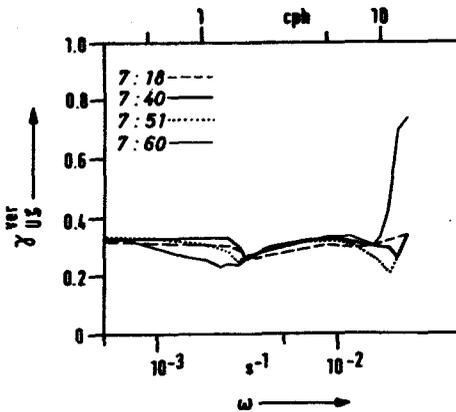


Abb. 8.21

Vertikale Kohärenz zwischen der u -Geschwindigkeitskomponente in der Deckschicht und der Vertikal auslenkung in verschiedenen Tiefen der Sprungschicht laut Angabe. Modellrechnungen, Fall 3, Parameter: 7 in Tabelle 5.1. Zum Vergleich mit Abb. 8.14.

9. Diskussion

Die im vorigen Kapitel dargestellten Ergebnisse weisen darauf hin, daß im betrachteten hochfrequenten Bereich der internen Wellen effektive Mechanismen der Wechselwirkung mit Bewegungen anderer Skalen und der Dissipation wirken, was in offenbarem Widerspruch zur Linearität und Reibungsfreiheit des Modells steht. Zudem kann die beobachtete Vertikalstruktur der Strömungsfluktuation nicht hinlänglich beschrieben werden. Eine kritische Erörterung der durchgeführten Rechnungen erscheint somit angebracht.

In dem in Kapitel 4 vorgestellten Modell wird die Horizontalstruktur der Felder stochastisch, die Vertikalstruktur aber deterministisch behandelt. Wenn man nicht von den Moden, sondern von vertikal fortschreitenden Wellen ausgeht, kann auch bezüglich der Tiefenabhängigkeit ein stochastischer Ansatz gemacht werden. Dazu sind im Formalismus von Kapitel 4 einige Änderungen anzubringen. Die Eigenfunktionen \hat{w} müssen durch entsprechende Lösungen von (2.16) ersetzt werden. Die Annahme der Energieverteilung ausschließlich auf Dispersionskurven ist fallenzulassen, was zur Streichung des Faktors $\left| c_{gr}^{-1} \right|$ in (4.14) führt. Die Matrix $F_{\frac{z}{z_0}}$ wird dagegen nicht modifiziert. Die Ergebnisse müssen sich gegenüber dem modalen Ansatz grundlegend ändern, wenn die Spektren explizit von \hat{w} / \hat{w}' abhängen, also z.B. bei der vertikalen Energieverteilung. Beschränkt man sich aber wie in Kapitel 8 auf die Horizontalbewegungen der Deckschicht und auf die Vertikalbewegungen der Sprungschicht, so werden die Modellspektren in entscheidendem Maß nur von den Faktoren $F_{\frac{z}{z_0}}$ und $E(\alpha, \gamma)$ beeinflusst. Da überdies die Beobachtungen zu der Annahme zwingen, daß die Energieverteilung im Frequenz-Wellenzahlraum schmalbandig ist (siehe Ergebnis Nr. 3), sind für vertikal fortschreitende Wellen sehr ähnliche Resultate wie in Kapitel 8 zu erwarten. Unter den genannten Einschränkungen sind die dort beschriebenen Ergebnisse auch unter der Voraussetzung als sinnvoll anzusehen, daß nicht die Existenz vertikal propagierender Komponenten, sondern die langperiodische Modifikation des Grundzustandes (N^2, \bar{y}) die Probleme mit der Vertikalstruktur verursacht. Für die obige Argumentation spielt es nämlich gar keine Rolle, aus welchem Grund die Funktionen \hat{w} unrealistisch sind. Abb. 8.17 gibt ein Beispiel dafür, daß tatsächlich einzelne Faktoren in (4.14) die Form der Spektren bestimmen können (vergleiche Abschnitt 8.3.6).

Im Rahmen der WKBJ-Näherung sind Felder von Moden und vertikalsymmetrische Felder fortschreitender Wellen praktisch nicht zu unterscheiden (MÜLLER & SIEDLER, 1975). Die GATE-Spektren liefern im hochfrequenten Bereich keinen Hinweis auf Phasenausbreitung bezüglich der Tiefe, so daß von der vertikalen Symmetrie der Wellenfelder auszugehen ist. Welche Rolle in z-Richtung propagierende Wellen bei GATE spielen, dürfte wegen der in Abschnitt 8.2 behandelten kinematischen und dynamischen Auswirkungen der langperiodischen Vorgänge kaum zu entscheiden sein. Ein Modell auf der Basis vertikal fortschreitender Wellen ist vermutlich viel aufwendiger als das hier vorgestellte, das, gemessen an seinem eher bescheidenen Anspruch, ohnedies schon komplex und rechenintensiv ist.

Die vorgestellten Modellspektren beschreiben ausschließlich das Feld der internen Wellen; Fluktuationen anderen Charakters (Rauschen) sind nicht berücksichtigt. Die Beobachtungen hingegen sind sicherlich durch Feinstruktureffekte modifiziert und dürften auch turbulente Bewegungen enthalten. Es fragt sich, ob bei Berücksichtigung des "Rauschens" die Ergebnisse von Kapitel 8 verändert würden. Das Resultat Nr. 2 ist in dieser Hinsicht bereits erörtert worden. Die Feststellungen Nr. 1 und 5 haben qualitativen Charakter und sind nicht betroffen. Die übrigen Ergebnisse können nur dann in Frage gestellt werden, wenn man dem "Rauschen" eine komplizierte Abhängigkeit von der Wellenzahl und der Richtung zuordnet, wofür es schwerlich eine Grundlage gibt.

Die Frage der Auswirkung der langsamen Veränderlichkeit der "mittleren" Strömung auf die hochfrequenten internen Wellen soll noch einmal aufgegriffen werden. Die beiden wesentlichen langperiodischen Vorgänge, interne Gezeiten und Fluktuationen im Bereich der Trägheitsperiode, brauchen nicht gesondert behandelt zu werden. Wichtig ist in diesem

Zusammenhang nur die Vertikalskala von $\bar{u}(z)$, die im Mittel durch die Tiefenlage der Sprungschicht bestimmt ist (Abb. 3.1). Die Skala wird aber als Funktion der Zeit weder durch die Gezeiten noch durch die Trägheitsbewegungen verändert, eine Aussage, die sich u.a. auf die bei GATE durchgeführten Profilstrommessungen mit guter vertikaler Auflösung stützt (PETERS, 1978b). Auf der Grundlage der zeitlich unveränderlichen Vertikalskala von \bar{u} kann man abschätzen, daß trotz der Schwankungen der "mittleren" Geschwindigkeit um $\pm 50\%$ die Absorption von Wellenenergie in kritischen Schichten auch in Perioden von großem $|\bar{u}|$ energetisch unbedeutend ist. Offenbar im Gegensatz zur Situation in der Hauptsprungschicht (siehe HOLLOWAYS (1980) Diskussion von Arbeiten zur schwachen Wechselwirkung interner Wellen) treten nieder- und hochfrequente Wellen nicht in Form der Energiedissipation in kritischen Tiefen miteinander in starke Wechselwirkung.

Der erörterte Mechanismus kann auch aus grundsätzlichen Erwägungen heraus nicht die bei GATE beobachtete Anisotropie der hochfrequenten internen Wellen erklären. Sie wird durch die relativ geringe Energie der schnellen, stromabwärts gerichteten Wellen bewirkt, die aber vom Auftreten kritischer Schichten nicht betroffen sind. Diese Einschätzung steht im Gegensatz zu einer für die Hauptsprungschicht ausgesprochenen Vermutung. Übereinstimmung besteht aber darin, daß auch die dort beobachtete Anisotropie nicht rein kinematisch, d.h. nicht allein durch Dopplereffekte, zu erklären ist (FRANKIGNOUL, 1974).

Als Ursache der Anisotropie kommt ein anderer Dissipationsmechanismus in Frage. THORPE (1978) hat gezeigt, daß die Gravitationsinstabilität von internen Wellen endlicher Amplitude in einer Scherströmung stark von deren Richtung beeinflußt wird. Eine quantitative Übertragung dieser Theorie auf die Situation bei GATE geht weit über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus.

Die direkte Erzeugung des anisotropen Feldes interner Wellen durch die entsprechenden Skalen des Windfeldes oder durch Oberflächenwellen (OLBERS & HERTERICH, 1979) dürfte kein bedeutender Mechanismus sein. Die Oberflächenwellen haben mit Sicherheit nicht und der Wind höchstwahrscheinlich nicht die geforderte Richtungsverteilung. Trotzdem müssen für die Erklärung der Anisotropie grundsätzlich externe Vorgänge herangezogen werden. Neben dem mittleren Strom gibt es im GATE-Gebiet noch einen zweiten Prozeß, der ausgesprochen gerichtet wirkt, nämlich die "easterly waves" der atmosphärischen Zirkulation mit einer Periode von ca. 3 Tagen. Diese ziehen mit ca. 10 m s^{-1} westwärts und erzeugen im Ozean Wellen nahe der Trägheitsperiode (ebenfalls ca. 3 Tage), wie KÄSE (1979) und KÄSE & OLBERS (1980) gezeigt haben. Zu untersuchen bleibt, wie die Energie zu kleineren spektralen Skalen transferiert wird. Ebenso wie in der Hauptsprungschicht (RUDDICK & JOYCE, 1978; FRANKIGNOUL & JOYCE, 1979) wurde auch bei GATE eine Korrelation der Schwankung der Energie der hochfrequenten internen Wellen mit langperiodischen Vorgängen nachgewiesen (REDELL, 1979).

Das zweite herausragende Charakteristikum der internen Wellen bei GATE, die spektrale Schulter im Bereich von 1.5 bis 4 cph, ist von KÄSE & CLARKE (1978) ausführlich diskutiert worden. Insbesondere findet sich dort der Hinweis auf das weitverbreitete Auftreten dieses Phänomens im oberen Ozean. Es hat den Charakter eines Resonanzprozesses einer dicken Schicht mit $N \approx \text{const.}$ (siehe auch SABININ, 1966). In der vorliegenden Arbeit wird aus der Existenz einer Schulter in den Frequenzspektren auf eine entsprechende Struktur im Wellenzahlspektrum geschlossen. Dies Ergebnis stimmt mit Messungen von PINKEL (1975) überein. Im Rahmen eines Modells der Anregung interner Wellen durch Windfluktuationen berechnen KÄSE & CLARKE (1978) für die Schichtung bei GATE den Transferkoeffizienten des

Energieflusses in das Wellenfeld als Funktion der Wellenzahl für verschiedene Moden. Die Struktur dieses Koeffizienten und die des hier konstruierten Wellenzahlspektrums sind äquivalent. KÄSE & SIEDLER (1980) haben auf den hohen Energieinhalt des Frequenzbandes 1.5 bis 4 cph hingewiesen. Zur weiteren Illustration ist in Abb. 9.1 das Modellspektrum der vertikalen kinetischen Energie wiedergegeben.

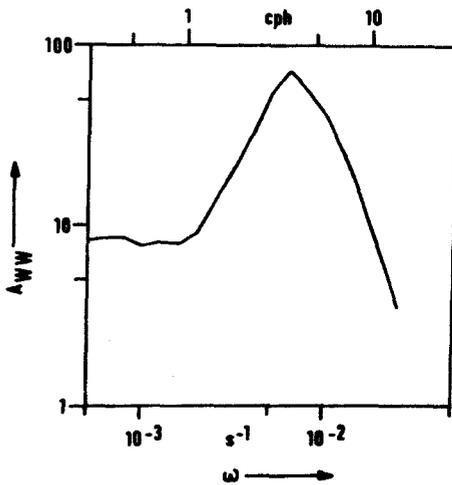


Abb. 9.1

Modell-Autospektrum der Vertikalgeschwindigkeit in der Sprungschicht (60 m Tiefe). Modellparameter: 7 in Tabelle 5.1; Fall 4. Das aus Messungen berechnete Spektrum A_{WW} ist für Frequenzen kleiner als 0.5 cph, abgesehen von einem Maximum bei der halbtägigen Gezeit, "blau" (WITTSTOCK & SIEDLER, 1980).

Die wichtigsten Charakteristika des hochfrequenten Teils der GATE-Spektren sind diejenigen, deren Ursachen in dynamischen Prozessen und nicht in der durch die mittlere Strömung verzerrten kinematischen Struktur des Wellenfeldes liegen: Die Existenz einer Schulter in den Energiespektren bei Frequenzen von 1.5 bis 4 cph (Ergebnis Nr. 1), - die Anisotropie der Fluktuationen in diesem Frequenzband (Ergebnisse Nr. 4 und 5), - das Überwiegen der ersten Mode (Ergebnis Nr. 3). Im Detail zeigt sich die rein kinematische Wirkung der mittleren Scherströmung durchaus (Ergebnis Nr. 6). Die raum-zeitlichen Skalen des Wellenfeldes sind aber derart, daß der überwiegende Teil

der Energie sich dort befindet, wo die Anisotropie des Systems von Dispersionskurven und Moden nur mäßig stark ist ("Roter" Charakter der Spektren, Dominanz der ersten Mode). Diese Tatsache erklärt, warum die früheren Arbeiten zu GATE auch bei Nichtberücksichtigung der starken mittleren Strömung erfolgreich sein konnten. Außer in einigen Details werden die Ergebnisse von KÄSE & CLARKE (1978) und KÄSE & SIEDLER (1980) hier bestätigt.

Anhang I Technische Anmerkungen und Fehlerdiskussion zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen

Das zu lösende Eigenwertproblem ist in Kapitel 2 beschrieben (Gleichung (2.16) mit Randbedingungen (2.22) und (2.27)). Es wird numerisch gelöst, und zwar mittels der "shooting method", d.h. durch Vorwärtsintegration mit einem geschätzten Eigenwert, Verbesserung des Schätzwertes durch Vergleich des berechneten mit dem geforderten Randwert, Vorwärtsintegration u.s.f..

I.1 Prozedur der numerischen Lösung

Die Funktionen $N^2(z)$ und $\bar{u}(z)$ werden an Stützstellen vorgegeben und mittels glättender kubischer Splines (SAUER & SZABO, 1969, S. 265 ff.) auf die Gitterpunkte der Differenzenschemata (s.u.) interpoliert, wobei das Verfahren auch gleich die Ableitungen \bar{u}' und \bar{u}'' liefert.

Die Integration erfolgt nach einem Prediktor-Korrektor-Verfahren 5. Ordnung (RALSTON, 1965, S. 211):

(I.1) Prediktor:

$$\hat{w}_i = 2 \hat{w}_{i-2} - \hat{w}_{i-4} - \frac{4}{3} h^2 (\hat{w}_{i-4} Q_{i-4} + \hat{w}_{i-2} Q_{i-2} + \hat{w}_{i-3} Q_{i-3}) ,$$

(I.2) Korrektor, wird iterativ verwendet:

$$\hat{w}_i^{(2)} = 2 \hat{w}_{i-4} - \hat{w}_{i-2} - \frac{h^2}{12} (\hat{w}_i^{(1)} Q_i + 10 \hat{w}_{i-4} Q_{i-4} + \hat{w}_{i-2} Q_{i-2}) .$$

Die Indizes $i, i-1$ etc. bezeichnen Werte an den Gitterpunkten z_i, z_{i-1} etc.; $h = |z_i - z_{i-1}|$; \hat{w} ist die gesuchte Eigenfunktion, Q ist in (2.29) definiert. Zum Start des genannten Verfahrens werden die Werte von \hat{w} an den ersten drei Gitterpunkten benötigt. Diese werden mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung (nach ZURMÜHL, 1963, S. 455 f.) bestimmt. Dieses, wie auch das Prediktor-Korrektor-Schema, sind an die spezielle Form von (2.16), an das Fehlen von \hat{w}' , angepaßt:

$$(I.3) \quad \hat{w}_i = \left\{ 1 - [2Q_{i-1/2} + Q_{i-1}] \frac{h^2}{6} + Q_{i-1} Q_{i-1/2} \frac{h^4}{24} \right\} \hat{w}_{i-1} + \left\{ h - Q_{i-1/2} \frac{h^3}{6} \right\} \hat{w}'_{i-1}$$

$$(I.4) \quad \hat{w}'_i = \left\{ - [Q_{i-1} + 4Q_{i-1/2} + Q_i] \frac{h}{6} + [Q_i + Q_{i-1}] \frac{h^3}{12} \right\} \hat{w}_{i-1} + \left\{ 1 - [2Q_{i-1/2} + Q_i] \frac{h^2}{6} + Q_i Q_{i-1/2} \frac{h^4}{24} \right\} \hat{w}'_{i-1}$$

Für dieses Schema muß die Funktion Q an den Zwischenpunkten $z_{i-1/2} = z_i + h/2$ berechnet werden. Das Runge-Kutta-Verfahren wird auch beim Wechsel der Gitterweite h zum erneuten Starten der Integration benutzt. Dazu wird der jeweils erste Wert der Ableitung \hat{w}'_j durch Interpolation aus der berechneten Funktion \hat{w} berechnet:

$$(I.5) \quad \hat{w}'_j = \frac{\hat{w}_{j-2}}{12h} - \frac{2\hat{w}_{j-1}}{3h} + \frac{2\hat{w}_{j+1}}{3h} - \frac{\hat{w}_{j+2}}{12h}$$

Die Formel (RALSTON, 1965, S. 42 f.) ist von 4. Ordnung.

Die beiden genannten Differenzenverfahren haben sehr ähnliche Eigenschaften in bezug auf die Fehlerfortpflanzung. Im Prinzip käme man mit dem Runge-Kutta-Schema alleine aus. Wegen der "Zwischenpunkte" benötigt es aber erheblich mehr Speicherplatz und braucht etwas mehr Rechenzeit als das gewählte Verfahren.

I.2 Das Fehlerverhalten des numerischen Lösungsverfahrens

Eine analytische Behandlung der Stabilität und der Fehlerfortpflanzung ist für die genannten Differenzenverfahren hoffnungslos kompliziert. Die Aussagen dieses Abschnitts beruhen auf dem Vergleich der numerischen mit analytischen Lösungen. Für Funktionen \hat{w} vom sinusoidalen Typ ($\Omega > 0$) treten selbst bei relativ geringen Gitterabständen keiner-

lei Probleme auf. Bei $Q = \text{const.}$ und nur 40 Gitterpunkten liegen die relativen Fehler der berechneten ersten fünf Eigenwerte bei etwa 10^{-4} .

Schwierigkeiten treten hingegen bei der Berechnung von Lösungen vom exponentiellen Typ ($Q(z) < 0$) auf, und zwar für exponentiell abfallende Funktionen. Die Ursache liegt darin, daß infolge von Rundungsfehlern und der Ungenauigkeit der Differenzenformeln wegen Anteile des exponentiell anwachsenden Teils der allgemeinen Lösung ($Q = \text{const.}$) $a_1 \exp(-\sqrt{|Q|} z) + a_2 \exp(+\sqrt{|Q|} z)$ in den Berechnungen auftreten und diese früher oder später vollständig beherrschen. Praktisch gesehen können exponentiell abfallende Lösungen nur "ein Stück weit" berechnet werden. Zum Beispiel wird für die Vorwärtsintegration von $z = 0$ bis $z = 1$ bei $Q = -1000$, $\hat{w}(0) = 1$, $\hat{w}'(0) = -\sqrt{|Q|}$, 400 Gitterpunkte, der relative Fehler von $1^0/00$ bei $z = 0.175$ erreicht. Dort ist aber $\hat{w} \approx 4 \cdot 10^{-3}$, also schon recht klein. Wenn man nicht speziell an den kleinen Werten der exakten Lösung für $z > 0.175$ interessiert ist, bietet es sich im vorliegenden Fall an, die Integration bei $z = 0.175$ abubrechen und sich mit der Information $\hat{w} \approx 0$ für $z > 0.175$ zufriedenzugeben.

I.3 Maßnahmen zur Verringerung von Rechenfehlern

Mit einer Reihe von Maßnahmen gelingt es, das Verhalten des gewählten numerischen Verfahrens zu verbessern. Die Gleichung (2.10) wird in Bezug auf die Wassertiefe H skaliert, $z' = z/H$; es folgt:

$$(I.6) \quad \hat{w}'' + H^2 Q(z) \hat{w} = 0.$$

Da die Eigenfunktionen \hat{w} ohnedies nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, kann man während der Rechnung dafür sorgen, daß keine großen Zahlen auftreten. Es wird beim Auftreten von $\hat{w}_i > 10^6 \hat{w}_1$ bis \hat{w}_i mit 10^{-6} multipliziert. Dadurch ist auch die gewählte Startbedingung $\hat{w}'_1 = 1$ unkritisch.

Meist wird die Integration vom Meeresboden zur Oberfläche hin ausgeführt. Wegen des großen Tiefenbereichs oberhalb des Meeresbodens mit $Q(z) < 0$ bei höheren Frequenzen (vergleiche den Verlauf von N_{GATE}^2 , Abb. 3.1) ist das zweckmäßig. Weiter ist es bei Inkaufnahme kleiner Fehler möglich, die Anfangs- und Endpunkte der Integration vom Meeresboden bzw. der Oberfläche fort zu verlegen, soweit Q negativ und die exakte Lösung \hat{w} sehr klein sind. In den Abb. 3.16 bis 3.23 sind z.T. Grenzen der Integration eingetragen. Bezüglich der Verlegung des Endpunktes der Integration wird zunächst auf den Schluß von Abschnitt I.2 verwiesen. Die Einführung einer gegenüber $\hat{w}(z_{\text{ende}}) = 0$ verbesserten Randbedingung erwies sich als unnötig. Die durch die Verlegung des Anfangspunktes der Integration verursachten Fehler des berechneten Eigenwertes werden im nächsten Abschnitt analysiert.

I.4 Zweischichtenmodell

Es sei $N^2(z) = N_1^2$ für $0 \geq z \geq -h$ und $N^2 = 0$ für $-h > z \geq -H$, ferner $\bar{u} \approx 0$. Die Eigenwerte sind in diesem Falle die Nullstellen der Gleichung

$$(I.7) \quad \bar{r} \cos(\bar{r} \alpha h) + \sin(\bar{r} \alpha h) \left[e^{-\alpha h} + e^{-\alpha(2H-h)} \right] \cdot \\ \cdot \left[e^{-\alpha h} - e^{-\alpha(2H-h)} \right]^{-1} = 0 \\ \text{mit } \bar{r} = \sqrt{(N^2 - \omega^2)/\omega^2} \quad ,$$

die numerisch mit hoher Genauigkeit berechnet werden können. Die folgenden Parameter sind der Schichtung bei GATE grob angepaßt: $N_1^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-2}$ ($N = 12.8 \text{ cph}$), $h = 100 \text{ m}$. Die Abhängigkeit der Eigenwerte α von H gibt Richtwerte für die Fehler an, die durch die Verlegung der Anfangspunkte der Integration bei der numerischen Berechnung der Eigenwerte entstehen. Die Ergebnisse der Rechnungen mit dem Zweischichtenmodell sind in Abb. I.1 dargestellt.

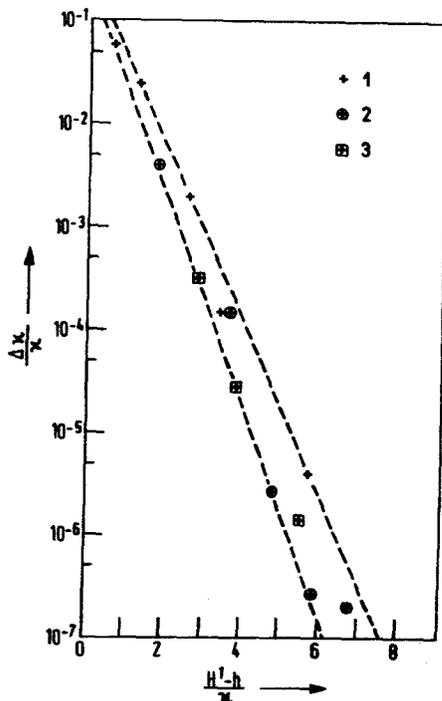


Abb. I.1

Relativer Fehler des Eigenwerts λ für ein Zweischichtenmodell ($N = 12.8$ cph für $0 \geq z \geq -h$, $N = 0$ für $z < -h$) in Abhängigkeit von einer angenommenen verringerten Wassertiefe H^1 bei tatsächlicher Tiefe H . Die gestrichelten Linien sollen die Bandbreite der Beziehung andeuten. Eingetragen sind Werte für die Moden 1 bis 3.

I.5 Gitter, Schlußbemerkung

Den Berechnungen von Eigenwerten und ψ -funktionen im GATE-Fall liegt ein Gitter mit etwas über 1000 Punkten zugrunde dessen Weite von $16 \frac{2}{3}$ m nahe dem Meeresboden stufenweise auf 0.5 m nahe der Oberfläche abfällt. Damit ist auch bei den höchsten Wellenzahlen eine ausreichende Auflösung gegeben (z.B. Abb. 3.30). Prinzipielle mathematische Probleme treten nicht auf. Die relativen Fehler der für den GATE-Fall berechneten Eigenwerte sind klein. Als Richtwert seien 0.5% genannt. Willkürliche, aber mit dem Datenmaterial verträgliche Veränderungen von N^2 oder \bar{u} erzeugen weit stärkere Veränderungen der Eigenwerte.

Der Aufwand für die Ermittlung des vollständigen Satzes von Eigenwerten und ψ -funktionen für 5 Moden an Gitterpunkten bezüglich ω und φ (10 Werte pro Dekade, $\Delta\varphi = 11.25^\circ$) war sehr groß. Die Berechnungen wurden im Dialogbetrieb mit dem Computer unter Verwendung eines graphischen Sichtgerätes durchgeführt. Eine vollständige Automatisierung der Rech-

nungen erscheint nahezu unmöglich. Zur Begründung sei auf die verschiedenen in Kapitel 3 besprochenen Probleme, die eine differenzierte Wahl von Anfangs- und Endpunkten der Integration, Schrittweiten bei der Suche nach Eigenwerten u.s.w. verlangen, und auf die Unsicherheit bei der Bestimmung des Modeindex verwiesen. Abb. 3.3 zeigt weiter, daß vielfach Dispersionskurven für verschiedene Moden bei gleichem Ψ nahe beieinander liegen. Entsprechend groß ist die Möglichkeit, den Eigenwert der falschen, d.h. gerade nicht gesuchten, Mode zu finden.

Anhang II Technische Anmerkungen und Fehlerdiskussion zur Berechnung der Modellspektren

II.1 Bestimmung von c_{gr} und $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_\omega$; Fehlerdiskussion

Um die Modellspektren berechnen zu können, wird zu jedem Eigenwert $\omega_{n\phi}^{\Psi}(\omega)$ (Gleichung (4.14)) der Wert der Gruppengeschwindigkeit $(\partial \omega / \partial x)_{\Psi}$ benötigt, teilweise auch $(\partial \Psi / \partial x)_{\omega}$ (Gleichung (4.15)). Die Ableitungen müssen numerisch aus dem Satz der berechneten $\omega_{n\phi}^{\Psi}(\omega)$ bestimmt werden. Vorausgesetzt wird, daß die Spektren an logarithmisch verteilten Frequenzwerten berechnet werden sollen. Abb. II.1 zeigt die Dispersionskurven der ersten Mode in der für die Modellierung verwendeten Auflösung des Testfalls 2 (5 Frequenzwerte pro Dekade, $\Delta \Psi = 11.25^{\circ}$). Erfahrungsgemäß ist die Berechnung von Ableitungen aus Funktionswerten, die nur in Form einer Tabelle vorliegen, nur dann mit annehmbaren Fehlerraten möglich, wenn die Werte in etwa gleichmäßige Abstände haben. Um einem solchen Zustand nahe zu kommen, wird c_{gr} aus Tabellen ($\ln \omega_i$; $\ln x_i$) bestimmt, wobei eine Transformation der Form

$$(II.1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\ln y}{x} \frac{d(\ln y)}{dx}$$

verwendet wird.

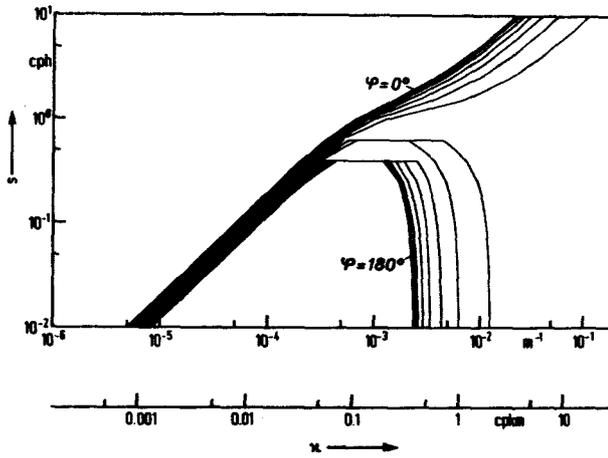


Abb. II.1a

Dispersionsdiagramm der ersten Mode der Testrechnungen, Fall 2 ($N = 1$ cph, $\bar{u} = 0.7$ m/s, $H = 5000$ m). Die Graphik stellt alle Eigenwerte so dar, wie sie für die Berechnung der Modellspektren verwendet werden. Teil a: Stromaufwärts und stromabwärts gerichtete Wellen; Teil b: Langsame, stromabwärts gerichtete Wellen. S ist die Beobachterfrequenz.

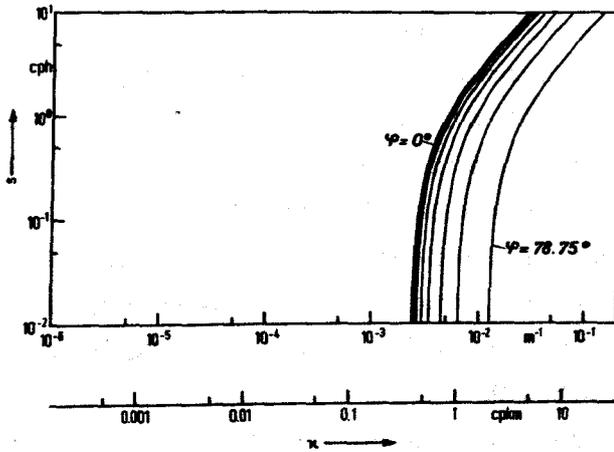


Abb. II.1b

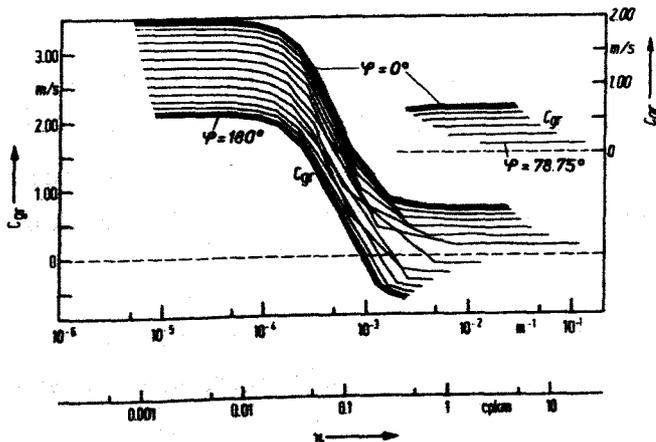


Abb. II.2

Zu II.1 gehöriges Diagramm der Gruppengeschwindigkeit. Der rechts oben eingesetzte Teil der Graphik entspricht II.1b.

Für einige Eigenwerte nahe der Minimalfrequenz bei Ast 2 und Ast 3 (Kapitel 4, Skizze 2) fällt die Logarithmierung weg.

Da $\Delta\varphi = \text{const.}$ ist (siehe aber Abschnitt II.3), wird $(\partial\varphi/\partial x)_\omega$ aus $(\varphi_i; \ln x_i)$ mittels $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{d(\ln x)}$ berechnet. Die Ableitungen werden durch eine Kurvenanpassung mit kubischen Splines bestimmt. Dabei erhält man ohne zusätzlichen Programmaufwand auch an den Tabellenrändern Werte. Die Resultate sind von denen eines Differentiationsschemas 4. Ordnung auf der Basis Lagrangescher Interpolation nicht signifikant verschieden.

Die berechneten Werte der Ableitungen sind trotz der großen Abstände der Tabellenwerte meist recht genau. Bei den Testfällen 1 und 2 liegen die Fehler durchweg bei einigen Prozent. Ausgenommen ist die Umgebung der Punkte mit $c_{gr} = 0$ im Fall 2, wo relative Fehler von 30% erreicht werden. Probleme treten an den Tabellenrändern dann auf, wenn die Krümmung der Kurven dort groß ist. Abb. II.2 zeigt die berechnete Gruppengeschwindigkeit für den Fall 2, Mode 1. Die Kurve für $\varphi = 90^\circ$ ist an ihrem Ende zu hohen Wellenzahlen hin deutlich falsch (Fehler ca. 15%). Verbesserungen können durch eine bessere Frequenzauflösung erreicht werden. Abb. II.3 zeigt den Quotienten $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_\omega \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_\varphi^{-1}$ für den Testfall 2. Der Vergleich mit analytischen Werten ergibt ebenfalls meistens kleine, nur an wenigen Stellen große Fehler.

Für den GATE-Fall können naturgemäß keine Fehlerraten genannt werden. Die Berechnungen (Beispiele in Abb. 8.3 und 8.4) machen aber einen guten Eindruck, d.h. die Kurven verlaufen gleichmäßig und es fallen keine Werte aus dem Rahmen.

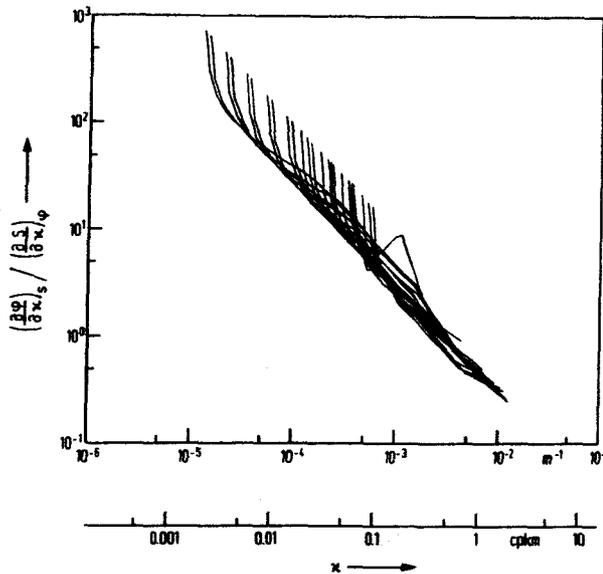


Abb. II.3

Quotient

$$\left(\frac{d\rho}{dx}\right)_\omega / \left(\frac{d\rho}{dx}\right)_\varphi$$

der Testrechnungen,
Fall 2, Moden 1 bis 5.
Kurven sind nur soweit
eingetragen, wie sie bei
der Berechnung von Mo-
dellspektren benötigt
werden.

II.2 Berechnung der Spektren

Die ungleichmäßige Verteilung der Eigenwerte (Abb. II.1 und 3.3) und der Verlauf der Kurven von c_{gr} (Abb. II.2 und 8.3) und besonders von $\left(\frac{d\rho}{dx}\right)_\omega / \left(\frac{d\rho}{dx}\right)_\varphi$ (Abb. II.3 und 8.4) lassen Schwierigkeiten bei der numerischen Integration gemäß (4.10 bzw. (4.15) erwarten. Daher scheint zunächst der Einsatz besonders genauer Integrationsverfahren angebracht. Das erweist sich aber als Irrtum. Bei Rechnungen im Fall 4 mit anisotropen Wellenzahlspektren ist der Verlauf des Integranden derart unregelmäßig, daß keine irgendwie sinnvollen Resultate erzielt werden. Das Alarmsignal stellt diesbezüglich die Berechnung von Kohärenzen größer als 1 dar. Im Mittel recht ungenau, aber auch in Extremfällen zuverlässig, ist die Trapezformel. Sie wird zur Berechnung aller Spektralkomponenten mit $r = 0$ (keine horizontale Separation) verwendet. Vergleichsrechnungen für den Fall 1 ergeben typische Abweichungen von 5%, Extremwerte von 10%, gegenüber komplexen Integrationsverfahren. Die Ursache von deren Versagen

bei bösartigen Integranden liegt daran, daß die zur Interpolation verwendeten Funktionen zwischen den Tabellenpunkten unkontrollierte Schwingungen ausführen.

Ein weiteres Problem tritt bei Querspektren zwischen Punkten horizontaler Separation auf. Bei hinlänglich großem r wird die oszillierende Funktion $\exp(-i\alpha \cdot r)$ (Gleichung (4.14)) im Raster der Tabellenwerte nicht aufgelöst. Um dennoch Querspektren in solchen Fällen näherungsweise berechnen zu können, werden der Teil des Integranden ohne die komplexe Exponentialfunktion durch einen Streckenzug und der Verlauf von $\alpha = \alpha(\varphi)$ bzw. $\varphi = \varphi(\alpha)$ durch kubische Splines dargestellt. Damit liegt der gesamte Integrand näherungsweise als kontinuierliche Funktion vor, die mittels einer auch für sehr unregelmäßige Integranden geeigneten Routine aus der NAG-Bibliothek ("D01AGF"; NAG, 1977) integriert werden kann. Von Nachteil sind dabei lediglich die ansehnlichen Rechenzeiten, die mit r anwachsen.

Ähnlich wie im vorigen Abschnitt wird auch hier durch eine Transformation die ungefähre Gleichabständigkeit von Tabellenwerten angestrebt. Eine Transformation ist allerdings nur für die Integration nach (4.15) notwendig. Aus $\alpha' = \ln \alpha$ folgt:

$$(II.2) \int_a^b y d\alpha = \int_{\ln a}^{\ln b} y(\alpha') \alpha d\alpha'.$$

II.3 Fehler der berechneten Spektren

In den Fällen mit $\bar{u} \approx 0$ (1 und 3) trägt hauptsächlich die Ungenauigkeit von c_{gr} zum Fehler der Autospektren bei. Dementsprechend sind diese außer bei der höchsten Frequenz recht genau. Selbst bei anisotropen Wellenzahl-spektren werden für den Fall 3 keine großen Probleme erwartet, da im Vergleich zum Fall 4 die Auflösung be-

zöglich φ besser ist und weil der Integrand wegen $\frac{\alpha E}{c_{gr}} = \text{const.}$ einen gleichmäßigeren Verlauf hat.

Für isotrope Fälle kürzen sich die Fehler der Autospektren fast fehlerfrei.

Im Fall 2 ($\bar{u} = \text{const.}$) hingegen wirken sich selbst recht große Fehler einzelner Werte von c_{gr} oder $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_\omega$ nur mäßig auf die verschiedenen Spektren aus, weil sie nur Teile der Tabellen bilden, über die integriert wird. Die Hauptfehlerquelle der Autospektren im Fall 2 liegt darin, daß für Frequenzen nahe N Teile der Integrationsintervalle, bedingt durch die endliche Auflösung $\Delta \varphi$, fehlen. Abb. II.1a illustriert den Sachverhalt (keilförmiger Einschnitt in die Schar der Kurven; angenommener "cut-off" $\alpha_{\text{cut}} = 10^{-2} \text{ m}^{-1}$). Die resultierenden Fehler liegen bei Dominanz der ersten Mode bei ca. 5%, sonst können sie (weiße Spektren, höhere Moden alleine) bis auf 15% anwachsen.

Das behandelte Problem tritt im GATE-Fall ebenfalls auf. Dort ist aber eine günstige Situation durch die zusätzliche Berücksichtigung der Dispersionskurven zu $\varphi = 90^\circ \pm \Delta \varphi / 2$ erreicht worden. In den "angepaßten" Spektren ist der Effekt wenig wirksam, weil die ersten Moden überwiegen und weil dort die fehlenden Intervallstücke im Bereich des Abfalls der Wellenzahlspektren mit α^{-4} (Tabelle 5.1) liegen.

Wegen der Nichtlinearitäten von (4.15) kürzen sich in den Kohärenzen bei den Fällen 2 und 4 die Fehler der Autospektren nicht völlig heraus. Ansonsten sind Aussagen über die Fehler der Querspektren in den genannten Fällen nicht möglich, da Vergleichswerte fehlen.

Anhang III Formelsammlung (Energie- und Kreuzspektren zu Fall 1 (N=const., $\bar{u} \neq 0$); technische Anmerkungen und Fehlerdiskussion zum "Alternativmodell")

III.1 Formelsammlung

Die unten aufgeführten Formeln für Auto- und Kreuzspektren werden verwendet, um das Spektralmodell zu testen. Sie gelten für das in (6.1) angegebene Frequenz-Wellenzahlspektrum.

Energiespektren

$$R_{uu}^{PP}(\omega) = \frac{2}{g_0 N^2 H} \sum_{n=1}^m \omega^{-\alpha} (N^2 - \omega^2) \cos^2(h_n z^P)$$

$$R_{vv}^{PP}(\omega) = R_{uu}^{PP}(\omega)$$

$$R_{uv}^{PP}(\omega) = \frac{4}{g_0 N^2 H} \sum_{n=1}^m \omega^{-\alpha+2} \sin^2(h_n z^P)$$

$$R_{33}^{PP}(\omega) = \frac{4}{g_0 N^2 H} \sum_{n=1}^m \omega^{-\alpha} \sin^2(h_n z^P)$$

Natürlich ist $R_{uv}^{PP}(\omega) = 0$ für $\omega > N$.

Kohärenz

Vertikale Kohärenz:

$$\gamma_{uv}^{PP} = \gamma_w^{PP} = \frac{|\sum_n \{g_n \cos(h_n z^P) \cos(h_n z^Q)\}|}{\sqrt{[\sum_n g_n \cos^2(h_n z^P)][\sum_n g_n \cos^2(h_n z^Q)]}}$$

$$\gamma_{uv}^{PQ} = \gamma_{33}^{PQ} = \frac{|\sum_n \{g_n \sin(h_n z^P) \sin(h_n z^Q)\}|}{\sqrt{[\sum_n g_n \sin^2(h_n z^P)][\sum_n g_n \sin^2(h_n z^Q)]}}$$

Horizontale Kohärenz in Richtung von \bar{u} ($\varphi = 0^\circ$):

$$\gamma_{uu}^{hor} = \frac{|\sum_n \{g_n \cos^2(h_n z) [J_0(X) - J_2(X)]\}|}{\sum_n g_n \cos^2(h_n z)}$$

mit $X = \frac{n \tilde{u} r}{H} \frac{\omega}{\sqrt{N^2 - \omega^2}}$ und den Besselfunktionen J_0 und J_2 .

$$\gamma_{vv}^{\text{hor}} = \frac{\left| \sum_n \{ g_n \cos^2(h_n z) [J_0(X) + J_2(X)] \} \right|}{\sum_n g_n \cos^2(h_n z)}$$

$$\gamma_{33}^{\text{hor}} = \gamma_{ww}^{\text{hor}} = \frac{\left| \sum_n \{ g_n \sin^2(h_n z) [J_0(X)] \} \right|}{\sum_n g_n \sin^2(h_n z)}$$

III.2 Technische Anmerkungen und Fehlerdiskussion zum "Alternativmodell" (zu Abschnitt 6.2)

Sowohl die Bestimmung der Nullstellen von (6.6) wie auch die numerische Integration von (6.5) werden mit Hilfe von Routinen aus der "NAG-Bibliothek" (NAG, 1977) bewerkstelligt. Die Integrationsroutine ("DO1AGF") benutzt keine Randpunkte. Das ist unumgänglich, da der Integrand von (6.5) an den Integrationsgrenzen singulär ist. Trotz dieser Eigenschaft treten keine Probleme auf. Testrechnungen zeigen, daß die Integration von Singularitäten des Typs $(x-x_0)^{-1/2}$ problemlos und nur eine Frage der Rechenzeit ist. Daß die Ergebnisse außer in der unmittelbaren Nähe von S_{crit} nur geringe Fehler haben, zeigt u.a. die Erhaltung der Gesamtenergie, von der lediglich Abweichungen von 2 bis 3 % auftreten. Das Verhalten der Spektren bei Frequenzen $\omega \ll N$ kann näherungsweise behandelt werden. Dazu wird in (6.5) $\cos \varphi = (S - \omega) N (\bar{u} h_n \omega)^{-1}$ substituiert. Dann berechnet man $B(S)$ nach der Formel

$$B(S) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} S^{-\alpha} (1 + \bar{u} h_n N^{-1} \cos \varphi)^{\alpha-1} d\varphi,$$

die mittels eines Taschenrechners ausgewertet werden kann. Näherungsverfahren und "Alternativmodell" weichen höchstens um wenige Prozent voneinander ab.

Literaturverzeichnis

- BANKS, W.H.H., P.G. DRAZIN & B. ZATURSKA, 1976: On the normal modes of parallel flow of inviscid stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 75, 149-171.
- BELL, T.H., Jr., 1974: Effects of shear on the properties of internal gravity wave modes. *Dt. Hydrogr. Z.*, 27, 57-62.
- BOOKER, J.R. & F.P. BRETHERTON, 1967: The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *J. Fluid Mech.*, 27, 513-529.
- BREKHOVSKIKH, L.M., K.V. KONJAEV, D.J. SABININ & A.N. SERIKOV, 1975: Short-period internal waves in the sea. *J. Geophys. Res.*, 80, 856-864.
- BRETHERTON, F.P., 1966: The propagation of groups of internal waves in a shear flow. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 92, 466-480.
- BRISCOE, M.G., 1977: On current finestructure and moored current meter measurements of internal waves. *Deep-Sea Res.*, 24, 1121-1131.
- CASE, K.M., 1960: Stability of an idealized atmosphere. I. Discussion of results. *Physics of Fluids*, 3, 149-157.
- ELIASSEN, A. & E. PALM, 1960: On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geofys. Publikasjoner*, XXII, 3, 1-23.
- FRANKIGNOUL, C.J., 1972: Comments on the energy exchange between internal waves and a shear flow. *Mém. Soc. Roy. Sc. Liège*, 6^o serie, tome II, 51-58.
- FRANKIGNOUL, C.J., 1974: Observed anisotropy of spectral characteristics of internal waves induced by low-frequency currents. *J. Phys. Oc.*, 4, 625-634.
- FRANKIGNOUL, C.J. & T.J. JOYCE, 1979: On the internal wave variability during the Internal Wave Experiment (IWEX). *J. Geophys. Res.*, 84, 769-776.
- GARRETT, C. & W. MUNK, 1972: Space-time scales of internal waves. *Geophys. Fluid Dyn.*, 2, 225-264.
- GARRETT, C. & W. MUNK, 1975: Space-time scales of internal waves: A progress report. *J. Geophys. Res.*, 80, 291-297.

- GRIMSHAW, R., 1975: Internal gravity waves: critical layer absorption in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 70, 287-304.
- HEALEY, D. & P.H. LeBLOND, 1969: Internal wave propagation normal to a geostrophic current. *J. Mar. Res.*, 27, 85-98.
- HOLLOWAY, G., 1980: Oceanic internal waves are not weak waves. *J. Phys. Oc.*, 10, 906-914.
- HOWARD, L.N., 1961: Note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.*, 10, 509-512.
- HOWARD, L.N. & S.A. MASLOWE, 1972: Stability of stratified shear flows. *Boundary-Layer Met.*, 4, 511-523.
- JONES, W.L., 1967: Propagation of internal gravity waves in fluids with shear flow and rotation. *J. Fluid Mech.*, 30, 439-448.
- KÄSE, R.H., 1979: Calculation of the energy transfer by the wind to near-inertial waves. *Deep-Sea Res.*, 26A, 227-232.
- KÄSE, R.H. & R.A. CLARKE, 1978: High frequency internal waves in the upper thermocline during GATE. *Deep-Sea Res.*, 25, 815-825.
- KÄSE, R.H. & D.J. OLBERS, 1980: Wind-driven inertial waves observed during phase III of GATE. *Deep-Sea Res.*, GATE suppl. to vol. 26 A, 191-216.
- KÄSE, R.H., H. PETERS, G. SIEDLER & W. ZENK, 1978: A compilation of current, temperature and conductivity data from moorings F1 and F2 in the GATE C-Area. "Meteor" *Forsch.-Ergebnisse*, A20, 13-48.
- KÄSE, R.H. & G. SIEDLER, 1980: Internal wave kinematics in the upper tropical Atlantic. *Deep-Sea Res.*, GATE suppl. to vol. 26A, 161-189.
- KIELMANN, J., W. KRAUSS & K.-H. KEUNECKE, 1973: Currents and stratification in the Belt Sea and the Arkona Basin during 1962-1968. *Kieler Meeresforsch.*, 29, 90-111.
- KINSMAN, B., 1965: Wind waves, their generation and propagation on the ocean surface. Prentice-Hall, 676 pp.

- KRAUSS, W., 1966: Methoden und Ergebnisse der theoretischen Ozeanographie. 2: Interne Wellen. Borntraeger, 248 pp.
- LeBLOND, P.H. & L.A. MYSAK, 1978: Waves in the ocean. Elsevier, 602 pp.
- McCOMAS, C.H. & F.P. BRETHERTON, 1977: Resonant interaction of oceanic internal waves. J. Geophys. Res., 82, 1397-1412.
- MILES, J.W., 1961: On the stability of heterogeneous shear flows. J. Fluid Mech., 10, 496-508.
- MOOERS, C.N.K., 1975: Several effects of baroclinic currents on the three-dimensional propagation of inertial-internal waves. Geophys. Fluid Dyn., 6, 277-284.
- MÜLLER, P., 1976: On the diffusion of momentum and mass by internal gravity waves. J. Fluid Mech., 77, 789-823.
- MÜLLER, P. & G. SIEDLER, 1975: Consistency relations for internal waves. Deep-Sea Res., 23, 613-628.
- MÜLLER, P., D.J. OLBERS & J. WILLEBRAND, 1978: The IWEX spectrum. J. Geophys. Res., 83, 479-500.
- NAG, 1977: The NAG FORTRAN Library Manual Mark 6. NAG Ltd.
- OLBERS, D.J., 1976: Non-linear energy transfer and the energy balance of the internal wave field in the deep ocean. J. Fluid Mech., 74, 375-399.
- OLBERS, D.J. & K. HERTERICH, 1979: The spectral energy transfer from surface waves to internal waves. J. Fluid Mech., 92, 349-379.
- PETERS, H., 1978a: On the variability of the near-surface oceanic layer in the Intertropical Convergence Zone. Oc. Acta, 1, 305-314.
- PETERS, H., 1978b: A compilation of CTD- and profiling current meter data from GATE 1974, F.S. "Meteor" and W.F.S. "Planet". "Meteor" Forsch.-Ergebnisse, A20, 49-80.
- PHILLIPS, O.M., 1969: The dynamics of the upper ocean. Cambridge Univ. Press, 261 pp.
- PINKEL, R., 1975: Upper ocean internal wave observations from FLIP. J. Geophys. res., 80, 3892-3910.

- RALSTON, A., 1965: A first course in numerical analysis. McGraw-Hill, 578 pp.
- REDELL, R.-D., 1979: Winderzeugte Trägheitsbewegungen und Energiekorrelationen interner Wellen im tropischen Atlantik. Ber. Inst. f. Meereskunde Kiel, 70, 67 pp.
- RHINES, P.B., 1970: Wave propagation in a periodic medium with application to the ocean. Rev. Geophys. Space Phys., 8, 303-319.
- RUDDICK, B.R. & T.M. JOYCE, 1979: Observations of interaction between the internal wavefield and low-frequency flows in the North Atlantic. J. Phys. Oc., 9, 498-517.
- SABININ, K.D., 1966: Connection of short-period internal waves with the vertical density gradient in the sea. Izv., Atmos. Oceanic Phys., 2, 8, 872-888. Englische Übersetzung.
- SAUER, R. & I. SZABO (Hrg.), 1969: "Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs", Bd. III, Springer, 443 pp.
- SCHOTT, F. & J. WILLEBRAND, 1973: On the determination of internal-wave directional spectra from moored instruments. J. Mar. Res., 31, 116-134.
- SIEDLER, G. & E.R. GERLACH, 1976: Verankerte Meßsysteme für die Tiefsee. InterOcean '76. 3. Internationaler Kongreß und Ausstellung für Meerestechnik und Meeresforschung, Kongreß Berichtswerk, 2, 925-940, Düsseldorf.
- THORPE, S.A., 1978: On the shape and breaking of finite amplitude internal gravity waves in a shear flow. J. Fluid Mech., 85, 7-31.
- WILLEBRAND, J., P. MÜLLER & D.J. OLBERS, 1977: Inverse analysis of the trimoored Internal Wave Experiment (IWEX), parts 1 and 2. Ber. Inst. f. Meereskunde Kiel, 20 a und b, 117 + 107 pp.
- WITTSTOCK, R.-R. & G. SIEDLER, 1980: On the determination of vertical velocities in the tropical Atlantic Ocean. "Meteor" Forsch.-Ergebnisse, A21, 40-56.
- ZURMÜHL, R., 1963: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 4. Auflage, Springer, 542 pp.

Liste der verwendeten Symbole

ϕ	Skalar, ϕ^* konjugiert komplexer Wert
$\vec{\phi}$	Vektor, ggf. $\phi = \vec{\phi} $
\mathbb{F}	Matrix
g	Erdbeschleunigung
f	Coriolisparameter
x, y, z	Koordinaten, Rechtssystem, z positiv nach oben; für GATE: x in Richtung rechtweisend 75°, d.h. in Richtung des mittleren Stromes
z_c	kritische Tiefe
z_{tp}	Tiefe des Reflexionspunktes
H	Wassertiefe
u, v, w	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors
\bar{u}, \bar{v}	Mittlere Geschwindigkeit
p, ρ, ζ	Druck, Dichte, Vertikalauslenkung
\hat{w}, \hat{u} etc.	Vertikalstruktur $\hat{w} = \hat{w}(z)$ etc.
ρ_0, ρ_e	Grunddichte im Rahmen der Boussinesq-Approximation, mittlere Abweichung von ρ_0 (meist $\rho_e = \rho_e(z)$)
N	Väisäläufigkeit $N = \sqrt{\frac{g}{\rho_0} \left \frac{d\rho_e}{dz} \right }$
$\frac{D_0}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right)$	
$\omega, \vec{\omega} = (k, l)$	Frequenz, Wellenzahlvektor
S	Beobachterfrequenz
ω_{crit}, S_{crit}	Frequenzen, bei denen die Modellspektren singulär sind
φ	Wellenrichtung (+x-Richtung: 0° , $-\tilde{n} \leq \varphi \leq \tilde{n}$)
$c = \frac{\omega}{k}$	Phasengeschwindigkeit
$c_{gr} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_\varphi$	Gruppengeschwindigkeit
Q(z)	Gleichung der Vertikalstruktur von w: $\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + Q(z) \hat{w} = 0$
$x^P = (x^P, y^P), z^P$	Ort
$\underline{r}^{pq} = \underline{x}^q - \underline{x}^p$	Horizontale Separation, $r^{pq} = \underline{r}^{pq} $, auch: r
$R_{\nu\nu}^{pq}(\tau)$	Kovarianzfunktion, obere Indizes: Orte, untere Indizes: Komponenten des Wellenfeldes
$A_{\nu\nu}^{pq}(\omega)$	Kreuzspektrum
$A_{\nu\nu}^{pp}, A_{\nu\nu}$	Autospektrum der Komponente ν in der Tiefe z^p

$\gamma_{\nu\mu}^{pq}$	Kohärenz, auch $\gamma_{\nu\mu}^{hor}$, $\gamma_{\nu\mu}^{ver}$ für horizontale bzw. vertikale Kohärenz
$\phi_{\nu\mu}^{pq}$	Phasenspektrum
E_{ges}	Gesamtenergie einer Mode pro Einheits-Oberfläche
E_0	Gesamtenergie des Wellenfeldes pro Einheits-Oberfläche
$E(\omega, \alpha)$, $E(\omega, \alpha, \varphi)$	Frequenz-Wellenzahlspektrum
$E(\alpha, \varphi)$	Wellenzahlspektrum
$E_{n\alpha}(\alpha, \varphi)$	Energieverteilung entlang einer Dispersionskurve der n-ten Mode, Ast α
$B(\omega)$, $B(S)$	Spektrum der vertikal integrierten Gesamtenergie
$R(\varphi)$	Richtungsverteilung der Wellenenergie
g_n	Gewichtsfaktor der Energie der n-ten Mode