

Copyright ©

Es gilt deutsches Urheberrecht.

Die Schrift darf zum eigenen Gebrauch kostenfrei heruntergeladen, konsumiert, gespeichert oder ausgedruckt, aber nicht im Internet bereitgestellt oder an Außenstehende weitergegeben werden ohne die schriftliche Einwilligung des Urheberrechtinhabers. Es ist nicht gestattet, Kopien oder gedruckte Fassungen der freien Onlineversion zu veräußern.

German copyright law applies.

The work or content may be downloaded, consumed, stored or printed for your own use but it may not be distributed via the internet or passed on to external parties without the formal permission of the copyright holders. It is prohibited to take money for copies or printed versions of the free online version.

Über den Einfluß der Erdrotation auf interne Wellen

Von WOLFGANG KRAUSS

Zusammenfassung: Die bisherigen Theorien über interne Wellen führten zu dem Resultat, daß lange Wellen polwärts einer kritischen Breite $\omega = f$ (ω = Frequenz der Welle, f = Coriolisparameter) nicht auftreten könnten. Außerdem sollten Seicheschwingungen ausgedehnter Meeresräume näherungsweise die Trägheitsperiode besitzen. Beides stimmt mit den Beobachtungen nicht überein. Es wird deshalb gezeigt, daß im Meer ein Wellentyp existieren kann, bei dem die Erdrotation die Amplitude (Wellenform) verzerrt und die Periode nicht beeinflußt. Diese asymmetrischen Wellen können in allen geographischen Breiten auftreten. Die Verzerrung der Wellenformen wird durch die GEGENBAUERSchen Differentialgleichungen (22) und (23) beschrieben; sie sind in Abb. 4 dargestellt. Physikalisch läßt sich das Ergebnis so interpretieren, daß die ablenkende Kraft der Erdrotation in jeder Welle durch eine Schrägstellung der Wellenkämme ausbalanciert wird.

On the effect of the Coriolis forces on interval waves (Summary): The to-date existing theories of internal waves led to the result that internal waves could not exist beyond a critical latitude $\omega = f$ (ω = frequency of the wave, f = Coriolisparameter). Besides, seiches-oscillations of large basins (for instance the Baltic) should approximately have the inertia period. Neither statement does correspond with the observations. It is therefore shown that there can exist a wave-type in the ocean where the rotation of the earth distorts the amplitude (wave-form) and does not effect the period. These asymmetrical waves may occur at all geographical latitudes. The distortion of the wave is described by the differential equations of GEGENBAUER (22) and (23); they are represented in Fig. 4.

I.

In Rechnungen über Eigenschwingungen ausgedehnter Meeresräume kann der Einfluß der Corioliskraft a priori nicht unberücksichtigt bleiben. Dies gilt sowohl für Schwingungen der Meeresoberfläche als auch für lange interne Wellen. Bei internen Wellen hat sich bisher keine eindeutige Ansicht über den Einfluß, den die Erdrotation auf die Schwingungsform nimmt, durchsetzen können. Vielmehr findet man von der Ignorierung des Corioliseffektes bis zur völligen Beherrschung der Periode durch die Erdrotation die verschiedensten Ansichten vertreten, ohne daß diese im Einzelnen gegeneinander abgegrenzt wurden.

1. Im Zweischichtenmodell ergibt die Umformung des hydrodynamischen Gleichungssystems für freie zweidimensionale Schwingungen auf der rotierenden Erde die charakteristische Gleichung

$$(1) \quad \bar{\omega}^4 - \bar{\omega}^2 \{ g \varkappa^2 (h_1 + h_2) + 2f^2 \} + h_1 h_2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g^2 \varkappa^4 + f^4 + g (h_1 + h_2) f^2 \varkappa^2 = 0.$$

Die Lösungen für lange Wellen sind

$$(1a) \quad \bar{\omega}_1^2 = f^2 + g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \varkappa^2 \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \text{ an der internen Grenzfläche}$$

und

$$(1b) \quad \bar{\omega}_0^2 = f^2 + g (h_1 + h_2) \varkappa^2 \text{ an der Oberfläche,}$$

worin $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}$ die Frequenz der Schwingungen auf der rotierenden Erde (T = Periode),

$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl (λ = Wellenlänge), g die Schwerebeschleunigung, $f = 2\Omega \sin \varphi$

den Coriolisparameter, ρ_1, ρ_2 die Dichten der beiden Schichten und h_1, h_2 deren Dicken darstellen.

Bezeichnet man mit ω die Frequenz der Schwingung auf der nichtrotierenden Erde, so erhält man aus

$$(2) \quad \omega^4 - \omega^2 \left\{ g \kappa^2 (h_1 + h_2) \right\} + h_1 h_2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g^2 \kappa^4 = 0$$

die beiden Lösungen

$$(2a) \quad \omega_1^2 = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \kappa^2 \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}$$

und

$$(2b) \quad \omega_0^2 = g (h_1 + h_2) \kappa^2.$$

Die Gleichungen (1a), (1b) lassen sich dann schreiben:

$$(1c) \quad \bar{\omega}_1^2 = f^2 + \omega_1^2, \quad \bar{\omega}_0^2 = f^2 + \omega_0^2.$$

Sie besagen, da bei großer Ausdehnung des schwingenden Systems $\omega_i^2 \ll f^2$ ist, daß in erster Annäherung $\bar{\omega}_i = f$ wird, d. h.

- i) auf der rotierenden Erde ist die Periode der freien inneren Schwingungen näherungsweise gleich der Periode der Trägheitsschwingungen.

Die Rechnungen im Zweischichtenmodell haben ferner zur sogenannten „Resonanztheorie der internen Gezeiten“ geführt (A. DEFANT, 1950, B. HAURWITZ, 1950, W. KRAUSS, 1957/1958). In dieser wird gezeigt, daß

- ii) die Gezeitenkraft auf einer nichtrotierenden Erde keine internen Gezeitenwellen erregen kann. Auf der rotierenden Erde sind ganztägige interne Gezeitenwellen vom Typ der erzwungenen Schwingungen (A. DEFANT, 1950) nur bei $\varphi = 30^\circ$, halbtägige bei $\varphi = 74^\circ$ möglich. Interne Mitschwingungswellen (W. KRAUSS, 1959a) können zwischen dem Äquator und $\varphi = 30^\circ$ (ganztägige Periode) bzw. $\varphi = 74^\circ$ (halbtägige Periode) auftreten. Bei $\varphi = 30^\circ$ bzw. $\varphi = 74^\circ$ wird die Wellenlänge unendlich groß.

2. Die Beobachtungen stimmen mit diesen theoretischen Funden in den hohen Breiten insofern nicht überein, als es

- i) keine geographische Begrenzung für das Auftreten interner Gezeitenwellen durch den Coriolisparameter zu geben scheint.

Ganztägige interne Gezeiten wurden bereits von Bj. HELLAND-HANSEN (1930) als typische Erscheinung in tiefen Meeresräumen des Nordostatlantischen Ozeans (nördlich $\varphi = 30^\circ$) erkannt. Auf der „Anton-Dohrn“-Dauerstation 2293 in der geographischen Breite $\varphi = 61^\circ 34'$ N treten sie bis in 1350 m Tiefe (unterste Grenze der Analyse, Wassertiefe 1820 m) als beherrschende Erscheinung hervor (W. KRAUSS, 1959b). Halbtägige interne Gezeiten haben Bj. HELLAND-HANSEN und F. NANSEN (1909) in verschiedenen Regionen des Europäischen Nordmeeres gefunden. Die nördlichste Ankerstation, auf der sie analysiert und publiziert wurden, befindet sich in der Breite von $\varphi = 76^\circ$ N in der Barents See (N. N. ZUBOW, 1932).

Zu ähnlichen Widersprüchen zwischen Theorie und Beobachtung war H. U. SVERDRUP (1926) bereits früher beim Studium der Gezeiten der Meeresoberfläche geführt worden. Auf einer nicht begrenzten rotierenden Fläche mit der Winkelgeschwindigkeit f tritt in

allen Lösungen der Faktor $\frac{1}{\sqrt{1 - f^2/\bar{\omega}^2}}$ auf. Da für $f > \bar{\omega}$ dieser Ausdruck imaginär

wird, sind theoretisch den Gezeitenwellen folgende Grenzen gesetzt, über die hinaus sie nicht auftreten können:

- der Gezeitenwelle S_2 bei $= 90^\circ$
- der Gezeitenwelle M_2 bei $= 75^\circ$
- der Gezeitenwelle N_2 bei $= 72^\circ$
- der Gezeitenwelle K_1 bei $= 30^\circ$
- der Gezeitenwelle O_1 bei $= 28^\circ$.

H. U. SVERDRUP macht für den Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung verantwortlich, daß die Begrenzung der Meeresräume nicht berücksichtigt wird. Daß eine Begrenzung im extremen Falle zu einer völlig anderen Lösung der hydrodynamischen Gleichungen führen kann, wird durch die KELVINSche Lösung der Kanalwellen gezeigt. Darin ist der gesamte Effekt der Erdrotation auf die Amplitudenverteilung quer zum Kanal „abgewälzt“, wohingegen in den obengenannten Theorien die Erdrotation stets in Gänze auf die Periode einwirkt und dadurch in ausgedehnten Meeresbecken diese völlig beherrscht. Die Periode wird eine Funktion der geographischen Breite. Andere Beispiele dafür, daß die Erdrotation nicht die Periode sondern die Wellenform beeinflusst, geben die Rechnungen über das Auftreten von Amphidromien.

Daß die Schwingungsvorgänge in ausgedehnten Meeresräumen Formeln vom Typ (1c) nicht zu gehorchen brauchen, zeigen

- ii) die Rechnungen von G. NEUMANN (1941) über die Seiches der Ostsee. Für das System Ostsee-Finnischer Meerbusen mit einer Länge von ca. 1500 km und einer mittleren Tiefe von ca. 100 m erhält man nach der Merianschen Näherungsformel $T = \frac{2L}{\sqrt{gh}}$ den Wert $T = 26,4$ Std. Dieser steht in guter Über-

einstimmung mit den Beobachtungsergebnissen (27,6 Std.). Demgegenüber führt die Berücksichtigung der Corioliskraft entsprechend Gl. (1c) zu

$$\bar{T} = \frac{T_r}{\sqrt{1 + (T_r/T)^2}},$$

worin T_r die Trägheitsperiode bedeutet. Mit $T_r = 14,5$ Std. ergibt sich daraus als erste Grundschwingung $\bar{T} = 12,7$ Std. Dies steht ganz kraß in Widerspruch zur Beobachtung. Die Widersprüche werden noch offensichtlicher bei der Betrachtung der Oberschwingungen sowie bei den Seiches Ostsee—Bottnischer Meerbusen.

Dies läßt nur den Schluß zu, daß die breitenabhängige Corioliskraft in vielen Fällen zu Unrecht mit der Periode der Schwingungen gekoppelt wird.

Es sei in diesem Zusammenhang auf die MARGULESSchen (s. H. KOSCHMIEDER, 1951) Rechnungen über die Eigenschwingungen einer isothermen reibungslosen Atmosphäre hingewiesen, die in Analogie zu den ozeanischen Problemen stehen. Untersucht man im Kugelkoordinatensystem Schwingungen in der mit Ω um die Erdachse rotierenden Atmosphäre, so erhält man Perioden, die überall auf der Erde den gleichen Wert besitzen und nur durch die konstante Winkelgeschwindigkeit Ω beeinflusst sind.

II.

Nachfolgend wird der Einfluß der Corioliskraft auf die Amplituden der internen Wellen betrachtet.

Aus der hydrodynamischen Bewegungsgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - 2 [\vec{\Omega}, \mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad } \Phi,$$

der Kontinuitätsgleichung

$$(2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

und der Inkompressibilitätsbedingung für vertikale Bewegungen

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

läßt sich nach der Methode der kleinen Störungen für periodische Bewegungsvorgänge der Form $e^{i\omega t}$ für vertikal geschichtete Wassermassen die Schwingungsgleichung

$$(4) \quad \left\{ \frac{g}{\omega^2 - f^2} (D_x^2 + D_y^2) - \frac{1}{\varphi(z)} D_z^2 - D_z \right\} w = 0$$

ableiten. (W. KRAUSS, 1961). Es bedeuten w die Vertikalkomponente der Bewegung, ω deren Frequenz, f den Coriolisparameter, g die Schwerebeschleunigung und $\varphi(z) =$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad \text{mit } \rho(z) \text{ als vertikale Dichteverteilung.}$$

Die Operatoren D_x^2, D_y^2, D_z^2, D_z kennzeichnen die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial}{\partial z}.$$

Da die Dichte nur von der Vertikalen abhängen soll, läßt sich Gl. (4) gemäß

$$(5) \quad w(x, y, z) = \bar{w}(x, y) W(z)$$

separieren. Dies führt auf die beiden Gleichungen

$$(6) \quad \left\{ D_x^2 + D_y^2 + \frac{\lambda}{g} (\omega^2 - f^2) \right\} \bar{w} = 0$$

und

$$(7) \quad \{ D_z^2 + \varphi(z) D_z + \lambda \varphi(z) \} W = 0.$$

Gleichung (7) wurde im Prinzip bereits von A. E. H. LOVE (1891) angegeben und später von J. E. FJELDSTAD (1935) unter Vernachlässigung des zweiten Terms in die Ozeanographie eingeführt. Sie läßt sich nur für spezielle Dichteverteilungen $\rho(z)$ bzw. $\varphi(z)$ integrieren. Lösungen haben J. E. FJELDSTAD (1935) für $\rho = \rho_0 e^{\alpha z + \beta}$, P. GROEN

(1948) für $\rho = \rho_0 + \Delta \rho \mathfrak{Tg} \left(\frac{2z}{b} \right)$ und W. KRAUSS (1959a) für $\varphi(z) = \varphi_{\min} +$

$(a^2 - z^2) \Delta$ angegeben. Im ersten Falle erhält man trigonometrische, im zweiten hypergeometrische, im letzten WHITTAKERSche Funktionen. Für beliebige Dichteverteilungen erfolgt die Integration von Gl. (7) numerisch. FJELDSTAD (1935) hat die Methode von STÖRMER mit Erfolg verwendet, der Verfasser (W. KRAUSS, 1961) hat die RUNGE-KUTTA-Methode vorgezogen. In jedem Falle ergibt die Integration von (Gl. 7) Eigenwerte $\lambda > 0$, so daß in der elliptischen Differentialgleichung (6) das Vorzeichen des dritten Gliedes allein vom Ausdruck $\omega^2 - f^2$ abhängt. Diesem Vorzeichen kommt eine Schlüsselstellung in Bezug auf die Form der internen Wellen zu. Dabei soll der Kamm der Welle mit der y -Richtung zusammenfallen.

Fall 1: $\omega > f$.

Gl. (6) nimmt die Form

$$(8) \quad \{ D_x^2 + D_y^2 + \mu^2 \} \bar{w} = 0 \quad \text{mit } \mu^2 = \frac{\lambda}{g} (\omega^2 - f^2) > 0$$

an, die meist als HELMHOLTZsche Gleichung bezeichnet wird.

a) Der Separationsansatz

$$(9) \quad \bar{w}(x, y) = F(x) G(y)$$

führt auf

$$(10) \quad (D_x^2 + \kappa^2) F = 0, (D_y^2 + \eta^2) G = 0,$$

$$(10a) \quad \mu^2 - \kappa^2 - \eta^2 = 0.$$

Da $\mu^2 > 0$, sind Wellen des Typs

$$(11) \quad \bar{w}(x, y) = w_0 e^{\pm \sqrt{\kappa^2 - \mu^2} y} \begin{cases} \sin(\kappa x) \\ \cos(\kappa x) \end{cases}$$

möglich.

α) Wenn $\kappa^2 > \mu^2$, beschreibt (11) eine Welle vom KELVINSchen Typ, deren Kamm in Form einer e-Funktion in Richtung y wächst oder fällt. In Abb. 1 ist dieser Wellentyp skizziert.

κ^2 und μ^2 haben die Dimension 10^{-12} , so daß die Abnahme der Amplitude in Richtung y ungefähr gemäß $\exp(-10^{-6}y)$ erfolgt. Auf 23 km fällt die Amplitude bereits auf $1/10$ des Ausgangswertes ab. Da die Wellenlänge der internen Wellen ca. 50 km beträgt, sind Wellen dieser Art nur in sehr schmalen Streifen an Küste oder Kontinentalabhängen — und dort auch nur als Teilstücke — nachweisbar. Für den offenen Ozean sind sie ohne Bedeutung.

β) Mit $\kappa^2 = \mu^2$ ergeben sich aus (11) Wellen mit unendlich langen Kämmen (keine y -Abhängigkeit), wie sie in Abb. 2 angedeutet sind:

$$(12) \quad \bar{w}(x, y) = w_0 \begin{cases} \sin(\kappa x) \\ \cos(\kappa x) \end{cases}$$

γ) $\kappa^2 < \mu^2$ führt auf rechteckig zelluläre Wellen vom Typ

$$(13) \quad \bar{w}(x, y) = w_0 \begin{cases} \sin(\sqrt{|\kappa^2 - \mu^2|} y) \\ \cos(\sqrt{|\kappa^2 - \mu^2|} y) \end{cases} \begin{cases} \sin(\kappa x) \\ \cos(\kappa x) \end{cases}$$

Diese sind in Abb. 3 wiedergegeben. Sie können überall auftreten, die Kämmen sind im allgemeinen kurz wegen $\text{magn} \sqrt{|\kappa^2 - \mu^2|} \approx \text{magn} \kappa$, die Amplitude ist überall konstant.

b) Die unter a) genannten Wellentypen hat bereits J. E. FJELDSTAD (1935) erwähnt. Sie lassen sich ergänzen, wenn man den Ansatz (9) zu

$$(14) \quad \bar{w}(x, y) = F(x, y) G(y)$$

variiert. Ein Spezialfall dieser Wellen ist unter 3, b ausführlich angegeben.

Fall 2: $\omega = f$.

Bei der sogenannten „kritischen Breite“ $\omega = f$ geht Gl. (6) in die Potentialgleichung

Legende zu der nebenstehenden Abbildung (Tafel 1)

Gestalt der internen Wellen im Meer

Abb. 1: Wellenkamm $e^{\pm \sqrt{\kappa^2 - \mu^2} y}$, $\kappa^2 > \mu^2$. (KELVIN-Typ)

Abb. 2: Wellenkamm konstant, unendlich lang.

Abb. 3: Wellenkamm $\sin \sqrt{|\kappa^2 - \mu^2|} y$ (SVERDRUP-Typ).

Abb. 4: Wellenkamm ${}_2F_1(n+2, -n; \frac{3}{2}; \frac{1 - \cos(\eta y)}{2}) \sin(\eta y)$.

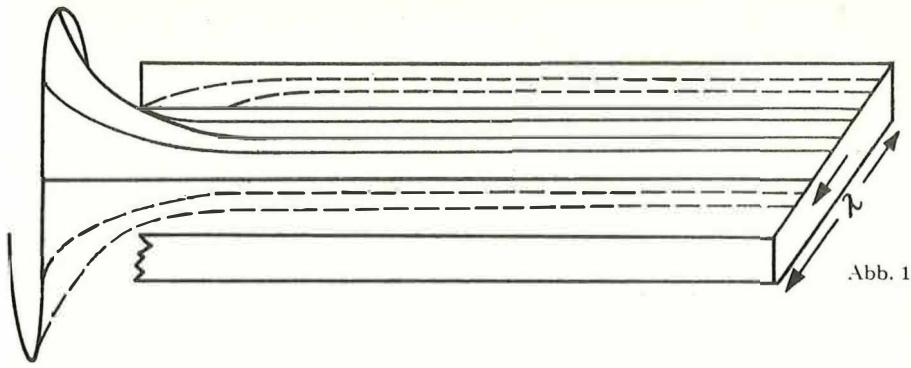


Abb. 1

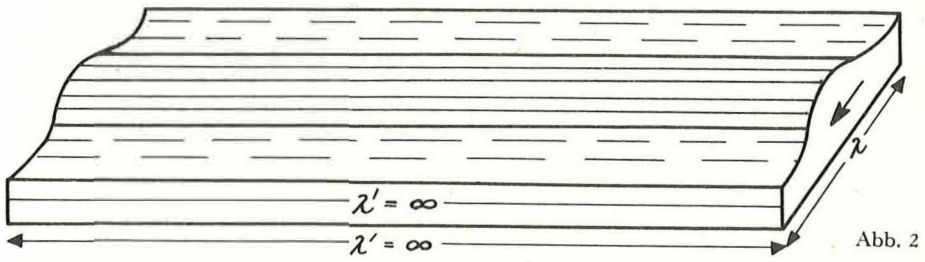


Abb. 2

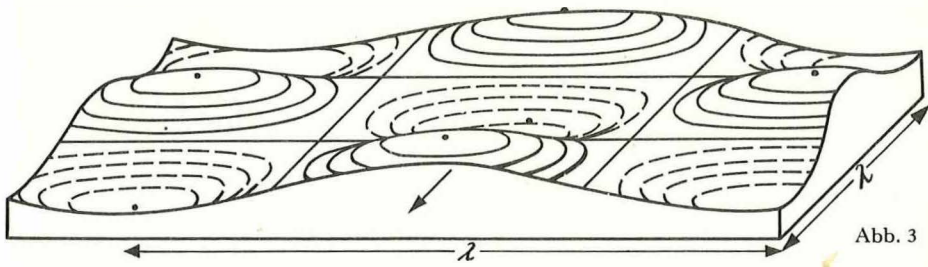


Abb. 3

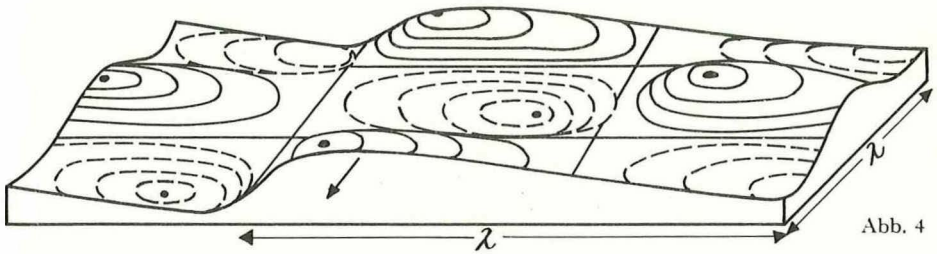


Abb. 4

Tafel 1 (zu W. Krauss)

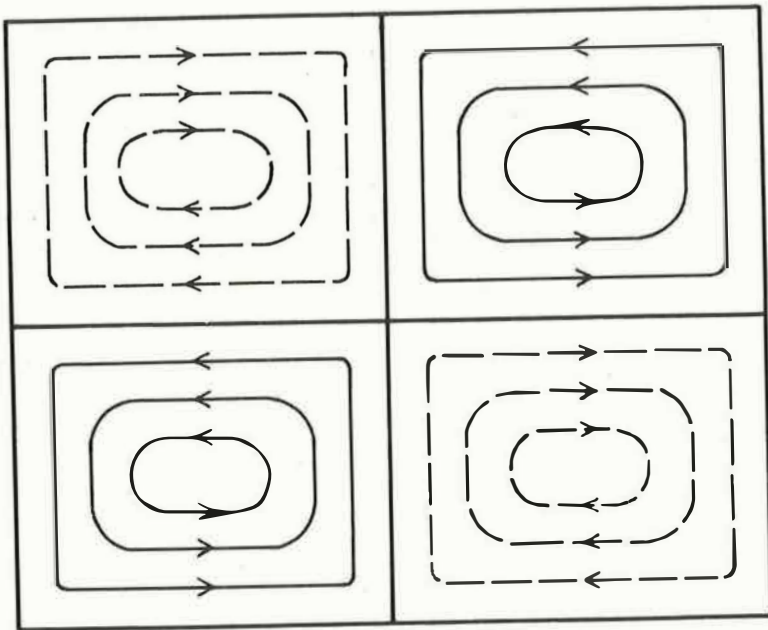


Abb. 5

Tafel 2 (zu W. Krauss)

$$(15) \quad (D_x^2 + D_y^2) \bar{w} = 0$$

über. Da dieser Fall jedoch nur für spezielle Gebiete von Bedeutung ist, sei hier nicht näher darauf eingegangen.

Fall 3: $\omega < f$.

Da in Gl. (6) $\lambda > 0$ ist, wird

$$\frac{\lambda}{g} (\omega^2 - f^2) = -\bar{\mu}^2 < 0,$$

so daß Gl. (6) in die Form

$$(16) \quad (D_x^2 + D_y^2 - \bar{\mu}^2) \bar{w} = 0 \text{ mit } \bar{\mu}^2 \text{ reell, positiv}$$

übergeht.

a) Der Separationsansatz (9) führt wiederum zu den ersten beiden Gleichungen (11), die Bedingungsgleichung $-\bar{\mu}^2 - \kappa^2 - \eta^2 = 0$ ist jedoch für $\bar{\mu}^2 > 0$ und sowohl κ^2 als auch η^2 reell und positiv nicht erfüllbar. Demzufolge sind interne Wellen mit der Frequenz ω weder mit unendlich langen Kämmen noch in rechteckig zellulärer Form mit konstanter Amplitude in Meeresgebieten polwärts $\omega = f$ möglich. Man hat daraus den Schluß gezogen, daß interne Wellen — wie in Abschnitt I angegeben — polwärts der sogenannten „kritischen Breiten“ praktisch nicht auftreten könnten, zumal auch der KELVINSche Lösungstyp mit $\eta^2 = -\bar{\mu}^2 - \kappa^2 < 0$ ohne praktische Bedeutung ist, weil hier die Abnahme der Amplitude in y -Richtung gemäß

$$(17) \quad \bar{w}(x, y) = w_0 e^{\pm \sqrt{\bar{\mu}^2 + \kappa^2} y} \begin{Bmatrix} \sin(\kappa x) \\ \cos(\kappa x) \end{Bmatrix}$$

noch stärker hervortritt als in Gl. (11).

Die Beobachtung, daß interne Wellen mit den Gezeitenperioden dennoch eine generelle Erscheinung auch der gemäßigten und polaren Regionen zu sein scheinen, legt den Schluß nahe, daß der Ansatz (9) für dieses Resultat verantwortlich ist, da er den Lösungstyp der Wellen von vornherein auf sinusoidal oder exponentiell festlegt. Dies stellt jedoch eine wesentliche Einschränkung der überhaupt denkbaren Wellenformen dar.

b) Wir untersuchen eine dreidimensionale Welle des Typs $\sin(\kappa x) \sin(\eta y)$ und nehmen an, daß die Corioliskraft auf die Amplitude der Wellen Einfluß nimmt, setzen also eine variable Amplitude voraus:

$$(18) \quad \bar{w}(x, y) = K(x) M(y) \sin(\kappa x) \sin(\eta y).$$

Die Differentialgleichung geht dann mit $-\bar{\mu}^2 = \frac{\lambda}{g} (\omega^2 - f^2)$ und der Separationskonstante b in die Formen

$$(19) \quad \{ \sin(\kappa x) D_x^2 + 2 \kappa \cos(\kappa x) D_x - b \sin(\kappa x) \} K = 0$$

$$(20) \quad \{ \sin(\eta y) D_y^2 + 2 \eta \cos(\eta y) D_y + [b - (\kappa^2 + \eta^2 + \bar{\mu}^2)] \sin(\eta y) \} M = 0$$

über. Die Transformationen

$$(21) \quad \xi = \cos(\kappa x), \zeta = \cos(\eta y)$$

liefern weiterhin

$$(22) \quad \left\{ (1 - \xi^2) D_\xi^2 - 3 \xi D_\xi - \frac{b}{\kappa^2} \right\} K(\xi) = 0$$

Legende zu der nebenstehenden Abbildung (Tafel 2)
Abb. 5: Horizontalströmungssystem der in Abb. 4 wiedergegebenen Welle.

$$(23) \quad \left\{ (1 - \zeta^2) D_\zeta - 3 \zeta D_\zeta + \frac{b - (\kappa^2 + \eta^2 + \bar{\mu}^2)}{\eta^2} \right\} M(\zeta) = 0.$$

Diese Gleichungen sind vom Typ der GEGENBAUERSCHEN Differentialgleichung (MAGNUS-OBERHETTINGER, 1948) und gelten für den Bereich $-1 \leq \xi \leq +1$ bzw. $-1 \leq \zeta \leq +1$. Setzen wir in Gl. (22)

$$(24) \quad 2\nu + 1 = 3, \quad \text{also } \nu = +1,$$

$$(25) \quad \bar{n}(\bar{n} + 2\nu) = -\frac{b}{\kappa^2}, \quad \text{also } \bar{n}_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{\kappa} \sqrt{\kappa^2 - b},$$

und in Gl. (23)

$$(26) \quad 2\nu + 1 = 3, \quad \text{also } \nu = +1,$$

$$(27) \quad n(n + 2\nu) = +\frac{b - (\kappa^2 + \eta^2 + \bar{\mu}^2)}{\eta^2}, \quad \text{also } n_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{\eta} \sqrt{b - (\kappa^2 + \bar{\mu}^2)},$$

so lassen sich die Lösungen in Form von hypergeometrischen Reihen ${}_2F_1$ angeben:

$$(28) \quad K(\xi) = \frac{\Gamma(\bar{n} + 2)}{\Gamma(\bar{n} + 1)\Gamma(2)} {}_2F_1\left(\bar{n} + 2, -\bar{n}, \frac{3}{2}; \frac{1 - \xi}{2}\right),$$

$$(29) \quad M(\zeta) = \frac{\Gamma(n + 2)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(2)} {}_2F_1\left(n + 2, -n, \frac{3}{2}; \frac{1 - \zeta}{2}\right).$$

Darin bedeutet Γ die Gammafunktion.

Mit Rücksicht auf Gl. (21) haben interne Wellen des angegebenen Typs die Form

$$(30) \quad w(x, y, z, t) = W(z) e^{i\omega t} {}_2F_1\left(\bar{n} + 2, -\bar{n}, \frac{3}{2}; \frac{1 - \cos(\kappa x)}{2}\right) \sin(\kappa x) \\ \cdot {}_2F_1\left(n + 2, -n, \frac{3}{2}; \frac{1 - \cos(\eta y)}{2}\right) \sin(\eta y).$$

Die Variablen $\frac{1 - \cos(\kappa x)}{2}$ und $\frac{1 - \cos(\eta y)}{2}$ schwanken zwischen 0 und +1. Da sich

in den Realteilen von $(\bar{n} + 2 - \bar{n} - \frac{3}{2})$ und $(n + 2 - n - \frac{3}{2})$ die Koeffizienten n

und \bar{n} herausheben, gilt

$$(31) \quad 0 < \operatorname{Re}\left\{\bar{n} + 2 - \bar{n} - \frac{3}{2}\right\} < 1,$$

$$0 < \operatorname{Re}\left\{n + 2 - n - \frac{3}{2}\right\} < 1,$$

so daß die angegebenen hypergeometrischen Reihen ${}_2F_1$ im Gesamtbereich zwischen

0 und 1 mit Ausnahme von +1 konvergent sind. Die Stellen $\frac{1 - \cos(\kappa x)}{2} = +1$,

d. h. $\cos(\kappa x) = -1$ sind jedoch nicht kritisch, weil an diesen Stellen in Gl. (30) die Glieder der hypergeometrischen Reihe vom Typ $A_m \cdot 1^m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) sind, jedoch mit $\sin(\kappa x) = 0$ multipliziert werden. Das gleiche gilt für die y -Richtung.

Als Beispiel wählen wir

$$(32) \quad \bar{\mu}^2 = 10^{-12}, \quad \kappa^2 = \eta^2 = 10^{-1}, \quad b = 0,$$

somit $\bar{n} = 0$ und $n = -1 + \sqrt{2} \cdot i$.

Die Welle hat die Form

$$(33) \quad w(x, y, z, t) = W(z) \sin(\kappa x) {}_2F_1\left(n+2, -n, \frac{3}{2}; \frac{1 - \cos(\eta y)}{2}\right) \sin(\eta y) e^{i\omega t};$$

die y -Abhängigkeit erfolgt mit den obigen Zahlenwerten gemäß

$$(34) \quad {}_2F_1\left(n+2, -n, \frac{3}{2}; \frac{1 - \zeta}{2}\right) \sin(\eta y) = \sin(\eta y) \left\{ \begin{array}{l} 1 + (1 - \zeta) + 0,6000 (1 - \zeta)^2 \\ + 0,3143 (1 - \zeta)^3 \\ + 0,1571 (1 - \zeta)^4 \\ + 0,0771 (1 - \zeta)^5 + \dots \end{array} \right\}$$

sie ist in Abb. (4) wiedergegeben. Die ablenkende Kraft der Erdrotation bedingt eine Asymmetrie der Welle, und zwar wird der Kamm auf der einen Seite herabgedrückt, auf der anderen gehoben. Die Wirkung der Corioliskraft wird somit in jeder Welle ausbalanciert; die Periode wird nicht beeinflusst. Die Wellen können — wie in Gl. (33) — vom Typ der stehenden Wellen sein. Auch fortschreitende Wellen sind möglich, da die Superposition der zwei Wellen

$$w_1(x, y, z, t) = W(z) {}_2F_1\left(n+2, -n, \frac{3}{2}; \frac{1 - \cos(\eta y)}{2}\right) \sin(\eta y) \sin(\kappa x) \sin(\omega t)$$

$$w_2(x, y, z, t) = W(z) {}_2F_1\left(n+2, -n, \frac{3}{2}; \frac{1 - \cos(\eta y)}{2}\right) \sin(\eta y) \cos(\kappa x) \cos(\omega t)$$

zu der Form

$$w(x, y, z, t) = W(z) {}_2F_1\left(n+2, -n, \frac{3}{2}; \frac{1 - \cos(\eta y)}{2}\right) \sin(\eta y) \cos(\kappa x - \omega t)$$

führt.

Der Fall $\bar{\mu}^2 < 0$, d. h. $\omega > f$ bedingt in Gl. (27)

$$n_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{\eta} \sqrt{b - (\kappa^2 - \bar{\mu}^2)}$$

und bringt auch für $b + \bar{\mu}^2 > \kappa^2$ nichts Neues; $n_{1,2}$ nimmt nur reelle Werte an.

In unserem Beispiel gemäß Gl. (32) würde der Imaginärteil verschwinden; der Wellentyp wird dadurch nicht beeinflusst.

Somit können in allen geographischen Breiten amplitudenvariable interne lange Wellen existieren; sie können darüberhinaus dort als Mitschwingungswellen (W. KRAUSS, 1959a) erzeugt werden.

III.

Über die Form der internen Wellen liegen keine hinreichend genauen Beobachtungen vor; beim gegenwärtigen Stand des Wissens läßt sich folgendes hypothetische Bild entwerfen:

Als Folge der gezeitenerregenden Kräfte und der veränderlichen meteorologischen Verhältnisse werden die geschichteten Wassermassen zum internen Mitschwingen angeregt. Diese Wellen, die überall im Ozean mehr oder weniger stark auftreten, bilden wahrscheinlich „rechteckig“ zelluläre Systeme mit Wellenlängen und Kammlängen von ca. 50 km und sind vom Typ der fortschreitenden oder stehenden Wellen. Unter dem Einfluß der Erdrotation haben sie eine asymmetrische Form, die bei Vorhandensein von stationären mittleren Grundströmungen die Tendenz der internen Wellen zum „Überbrechen“ (interne Brandung) erheblich steigern dürfte. A. DEFANT (1948) hat hierfür Beispiele angegeben. Man wird deshalb auch keine sehr regelmäßigen Wellenzüge erwarten dürfen.

Das horizontale Strömungsbild beim Durchgang eines solchen Wellensystems zeigt Abb. 5. Während die gezeitenregenden Kräfte im homogenen Meer nur ein sehr großräumiges Strömungssystem erzeugen, wie es von den Gezeitenatlanten her bekannt ist, rufen sie in geschichteten Wassermassen neben diesem System nullter Ordnung (in der Terminologie der internen Wellen) noch ein relativ kleinräumiges System von internen Mitschwingungswellen und Strömungen im Inneren des Meeres hervor, das eine sehr starke Unruhe in die mittleren Verhältnisse bringt. Der zelluläre Charakter der Strömungen täuscht ein System von „Wirbeln“ vor.

Literaturverzeichnis

- DEFANT, A. (1948): Über interne Gezeitenwellen und ihre Stabilitätsbedingungen, Arch. Meteorol. Geophys. Bioklimatol. Serie A., 1, 39. — DEFANT, A. (1950): On the origin of internal tide waves in the open sea. J. Marine Res. 9, 111. — DEFANT, A. (1957): Flutwellen und Gezeiten des Wassers. Handbuch der Physik, XL VIII, Geophys. II, 880. — FJELDSTAD, J. E. (1935): Interne Wellen. Geophys. Publ. 10, Nr. 8. — GROEN, P. (1948): Contribution to the theory of internal waves. Meded. en Verh. Kgl. Nederl. Meteorol. Inst. Serie B, Deel II, Nr. 11. — HAURWITZ, B. (1950): Internal waves of tidal character. Transact. Amer. Geophys. Union 31, 47. — HELLAND-HANSEN, Bj. (1930): Report of the scientific results of the "Michael Sars" North Atlantic deep-sea exped. 1910. Vol. I. Physical Oceanography and Meteorology. Part I. — HELLAND-HANSEN, Bj. und F. NANSEN (1909): The Norwegian Sea. Rep. Norweg. Fishery a. Marine Invest. II, 2. Christiana. — KOSCHMIEDER, H. (1951): Physik der Atmosphäre. 2. 305, Leipzig. — KRAUSS, W. (1957/58): Interne Welle großer Amplitude, Teil I—III. Dtsch. hydrogr. Z. 10, 191 bzw. 11, 194 bzw. 11, 246. — KRAUSS, W. (1959a): Theorie der internen Mitschwingungswellen. Kiel. Meeresforsch. XV, 3. — KRAUSS, W. (1959b): Über meteorologisch bedingte interne Wellen auf einer Dauerstation südwestlich Islands. Ergänzungsheft Reihe B (4^o), Nr. 3 Dtsch. hydrogr. Z., 55. — KRAUSS, W. (1961): Die internen Seiches der Ostsee. Beiheft Dtsch. hydrogr. Z. In Vorbereitung. — LOVE, A. E. H. (1891): Wave motion in a heterogeneous heavy liquid. Proc. London Math. Soc. XXII, 307. — MAGNUS, W. u. F. OBERHETTINGER (1948): Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 97. Berlin. — NEUMANN, G. (1941): Eigenschwingungen der Ostsee. Arch. Dtsch. Seewarte, 61, 4. — SVERDRUP, H. U. (1926): The tides on the North Siberian Shelf. J. Washington Acad. Sci. 16, 529. — ZUBOW, N. (1932): Hydrological investigations in the south-western part of the Barents Sea during the summer 1928. Transact. Oceanogr. Inst. II, 4.