Copyright ©

Aus dem Institut für Meereskunde der Universität Kiel

Interne Wellen in einem exponentiell geschichteten Meer

Von Wolfgang Krauss

Zusammenfassung: Es wird gezeigt, daß man mit bekannten Routinemethoden der mathematischen Physik die Kenntnisse über Kinematik und Dynamik interner Wellen wesentlich gegenüber den aus der Theorie der Grenzflächenwellen bekannten Ergebnissen erweitern kann, wenn man mit einer exponentiellen Dichteverteilung rechnet. In den Abschnitten 1—3 werden bekannte Resultate zusammengestellt, Abschnitt 4 enthält eine Formel für die Wellenlänge interner Wellen (Gl. 31). Die Energie interner Wellen (Abschnitt 5) erweist sich als erheblich größer als die der Grenzflächenwellen. In Abschnitt 7 werden Rechnungen über die Entstehung interner Wellen durch die Gezeitenkräfte, den Luftdruck und den Wind angegeben, und in Abschnitt 8 wird gezeigt, daß lineare inkompressible interne Wellen in der Tiefsee praktisch keine Dämpfung erfahren.

Internal waves in an ocean with exponential density stratification (Summary): The aim of this article is to show that one gets much more insight into the behaviour and the causes of internal waves by using an exponential density stratification than by using a two-layered model. Sections 1—3 contain known results, in section 4 we derive a formula for the wave length using the method of characteristics (equ. 31). The energy of internal waves (section 5) seems to be much greater than we may expect from the theory of boundary waves. In section 7 forced internal waves are described as a consequence of the tide generating forces, the air pressure and the wind. Results are obtained by developing the forces and the unknowns into Fourier series according to the ocean basin. Finally, in section 8, it is shown that internal waves are less damped quite in contrary to boundary waves.

Symbole:

D_z	Unterbereich zu z bei Laplace-Transformation
$\vec{f}$	$= (0, 0, 2\,\Omega_z) =$ Vereinfachter Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation
H	Meerestiefe
K_0	Amplitude der gezeitenerregenden Kraft ($K_0 \approx 10^{-4}$ g cm^{-2} sec^{-2})
p	Druck
P	$p/\bar{\rho}$
R	$\rho/\bar{\rho}$
t	Zeit
Γ	$\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dz}$, $\vec{\Gamma} = \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\bar{\rho}$
Γ_o	$\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dz}$ mit $\bar{\rho} = \bar{\rho}_o\, e^{\Gamma_o z}$
ζ	Amplitude
η	$2\pi/\lambda_y =$ Wellenzahl in y-Richtung
$\varkappa$	$2\pi/\lambda_x =$ Wellenzahl in x-Richtung
λ	Wellenlänge
μ	Virtueller Reibungskoeffizient
ν	Eigenwert
ρ	Dichte
τ	$2\pi/\omega =$ Periode

φ	Geographische Breite
Φ	Schwerepotential
ω	$2\,\pi/\tau$ = Kreisfrequenz
$\mathfrak{K}$	Äußere Kraft pro Masseneinheit
$\mathfrak{L}$	Laplace-Transformation
$\mathfrak{v}$	(u, v, w) = Geschwindigkeitsvektor

Die Rechnungen erfolgen im Rechtssystem x, y, z mit z nach unten.

1. Einführung. Die Differentialgleichungen für lineare interne Wellen bilden ein System von fünf Gleichungen für die fünf unbekannten Störungsgrößen u, v, w, R und P. Man kann aus ihnen durch Elimination von vier Größen eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die verbleibende fünfte Unbekannte ableiten. Wegen der mittleren Strömung $\bar{\mathfrak{v}}$ (z) und der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ (z) besitzt diese DGL im allgemeinen variable Koeffizienten. Um reale Verhältnisse interpretieren zu können, muß man diese Funktionen entsprechend ihrem natürlichen Verlauf berücksichtigen. Man ist dann gezwungen, numerische Integrationen durchzuführen.

Gesetzmäßige Darstellungen der Abhängigkeit eines Naturvorganges von den Umweltfaktoren gewinnt man jedoch meist nur durch analytische Lösungen. Man hat daher früher vorwiegend Grenzflächenwellen studiert, deren Abhängigkeit im Gegensatz zu den eigentlichen internen Wellen fast stets analytisch dargestellt werden kann. Grenzflächenwellen stellen jedoch einen extremen Sonderfall interner Wellen dar: Sie besitzen nur einen Eigenwert, ihre Amplitude nimmt exponentiell ab mit wachsender Entfernung von der Grenzfläche, sie sind stark gedämpft, haben geringe Energie usw. Obgleich ihr Studium wesentlich zum Verständnis des Auftretens von Wellen großer Amplitude im Inneren des Meeres beigetragen hat — es sei auf die zahlreichen Arbeiten von A. Defant verwiesen — kann die Interpretation von ozeanographischen Beobachtungen mit Hilfe von Grenzflächenwellen wegen der angegebenen Abweichungen zu mannigfachen Fehlern führen.

Quantitative Angaben zur Kinematik und Dynamik interner Wellen werden wesentlich erleichtert, wenn die in den Differentialgleichungen auftretenden Koeffizienten konstant sind. Dies wird durch eine exponentielle Dichte- und lineare mittlere Geschwindigkeitsverteilung erreicht. Beide Verteilungen charakterisieren zwar nicht das wirkliche Meer, sie führen jedoch auf Lösungen, die prinzipiell mit denen für beliebig andere Verteilungen übereinstimmen. So erhält man im Gegensatz zum Fall der Grenzflächenwellen z. B. eine unendlich abzählbare Mannigfaltigkeit von Eigenwerten und Eigenfunktionen und damit die Möglichkeit, erregende Kräfte nach diesen Funktionen zu entwickeln usw. Die Lösungen vermitteln eine bessere Einsicht in die wirklichen Vorgänge — dargestellt am theoretischen Modell — als Grenzflächenwellen.

In den nachstehenden Rechnungen werden wir die mittlere Geschwindigkeit vernachlässigen. In den Abschnitten 2—4 werden bekannte Eigenschaften der internen Welle zusammengestellt, auf denen die nachfolgenden Abschnitte basieren.

2. Die Grundgleichungen. Interne Wellen gehorchen dem Gleichungssystem

$$(1)\quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \bar{\mathfrak{v}} \cdot \nabla \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \cdot \nabla \bar{\mathfrak{v}} + \vec{f} \times \mathfrak{v} + \nabla P + \vec{\Gamma} P + R \nabla \Phi + \mathfrak{K} = 0$$

$$(2)\quad \frac{\partial R}{\partial t} + \bar{\mathfrak{v}} \cdot \nabla R + \bar{\mathfrak{v}} \cdot \vec{\Gamma} R + \bar{\mathfrak{v}} \cdot \vec{\Gamma} = 0$$

$$(3) \quad \nabla \cdot \mathfrak{v} = 0,$$

woraus mit $\bar{\mathfrak{v}} \equiv 0$ und $\bar{\rho} \equiv \bar{\rho}\,(z)$ das System

$$(4) \quad \bar{\rho} \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \vec{f} \times \mathfrak{v}\, \bar{\rho} + \nabla\, p + \rho\, \nabla\, \Phi + \mathfrak{K} = 0$$

$$(5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{d \bar{\rho}}{d z} = 0$$

$$(6) \quad \nabla \cdot \mathfrak{v} = 0$$

folgt. Für harmonische Wellen $\psi\,(\mathfrak{r}, t) = \mathring{\psi}\,(\mathfrak{r})\, e^{i \omega t}$ kann man $\mathring{u}$, $\mathring{v}$, $\mathring{R}$ und $\mathring{P}$ eliminieren und erhält für $\mathring{w}$ die DGL

$$(7) \quad \Delta_h \mathring{w} + \frac{f^2 - \omega^2}{g \Gamma - \omega^2} \left(\frac{\partial^2 \mathring{w}}{\partial z^2} + \Gamma \frac{\partial \mathring{w}}{\partial z} \right) = 0,$$

die mit $f =$ const und $\Gamma\,(z) = \Gamma_0 =$ const eine DGL mit konstanten Koeffizienten darstellt. Hat man (7) gelöst und ist die Lösung vom Typ $w = W\,(z)\, e^{i\,(\varkappa x + \eta y + \omega t)}$, so folgen aus den o.a. Gleichungen die anderen Unbekannten:

$$(8) \quad R = \frac{i \Gamma}{\omega} w$$

$$(9) \quad P = - \frac{i\,(\omega^2 - f^2)}{\omega\,(\varkappa^2 + \eta^2)} \frac{d w}{d z}$$

$$(10) \quad u = - \frac{\varkappa\, \omega + i\, \eta\, f}{\omega^2 - f^2} P$$

$$(11) \quad v = - \frac{\eta\, \omega - i\, \varkappa\, f}{\omega^2 - f^2} P.$$

3. Lösungen der homogenen Wellengleichung durch Separation.

Mit dem obigen Separationsansatz erhält man aus (7) die gewöhnliche DGL für W(z),

$$(12) \quad \frac{d^2 W}{d z^2} + \Gamma\,(z) \frac{d W}{d z} + [g \Gamma\,(z) - \omega^2]\, \nu W = 0,$$

die mit den Randbedingungen

$$(13) \quad \frac{d W}{d z} + g\, \nu\, W = 0 \text{ für } z = 0 \text{ bzw. } W = 0 \text{ für } z = 0$$

$$(14) \quad W = 0 \text{ für } z = H$$

zu lösen ist.

Dabei bedeutet

$$(15) \quad \nu = \frac{\varkappa^2 + \eta^2}{\omega^2 - f^2}.$$

Eigenfunktionen W_n (z) existieren für die Region $\omega > f$ in den Tiefen mit $g\Gamma > \omega^2$ bzw. $\omega < f$ und $g\Gamma < \omega^2$. Letzteres scheint im Ozean jedoch ohne Bedeutung zu sein.

Die Lösung von (12) — (14) mit der vereinfachten Randbedingung und $\Gamma = \Gamma_o$ beträgt

$$(16)\quad W(z) = \sum_n W_{o,n}\, e^{-\frac{1}{2}\Gamma_o z} \sin\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\,(g\Gamma_o - \omega^2)\,(\varkappa_n^2 + \eta_n^2)}{\omega^2 - f^2} - \Gamma_o^2}\ (z - H)\right\}$$

mit der Zusatzbedingung

$$(17)\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\,(g\Gamma_o - \omega^2)\,(\varkappa_n^2 + \eta_n^2)}{\omega^2 - f^2} - \Gamma_o^2}\ H = n\pi,$$

die aus $W = 0$ für $z = 0$ folgt.

4. Lösung der homogenen Wellengleichung mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens.

Der Exponentialfaktor in der Lösung (16), der durch den zweiten Term in (12) bedingt wird, ist ohne Bedeutung. Man kann daher (7) auf

$$(18)\quad \frac{\partial^2 \mathring{w}}{\partial x^2} + \frac{f^2 - \omega^2}{g\Gamma - \omega^2}\frac{\partial^2 \mathring{w}}{\partial z^2} = 0$$

reduzieren. (18) geht durch eine eindeutig umkehrbare Transformation

$$(19)\quad r = \varphi\,(x, z),\ s = \psi\,(x, z)$$

in

$$(20)\quad \begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{f^2 - \omega^2}{g\Gamma - \omega^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \mathring{w}}{\partial r^2} + \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \frac{f^2 - \omega^2}{g\Gamma - \omega^2}\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \mathring{w}}{\partial s^2} \\ &+ 2\left[\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{f^2 - \omega^2}{g\Gamma - \omega^2}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z}\right]\frac{\partial^2 \mathring{w}}{\partial r\, \partial s} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{f^2 - \omega^2}{g\Gamma - \omega^2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right)\frac{\partial \mathring{w}}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{f^2 - \omega^2}{g\Gamma - \omega^2}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right)\frac{\partial \mathring{w}}{\partial s} = 0 \end{aligned}$$

über und reduziert sich bei Spezialisierung der Variablen r und s gemäß

$$(21)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{f^2 - \omega^2}{g\Gamma - \omega^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = 0, \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \frac{f^2 - \omega^2}{g\Gamma - \omega^2}\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 = 0, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{f^2 - \omega^2}{g\Gamma - \omega^2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{f^2 - \omega^2}{g\Gamma - \omega^2}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

auf

$$(22)\quad \frac{\partial^2 \mathring{w}}{\partial r\, \partial s} = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$(23)\quad \mathring{w}\,(r, s) = f_1\,(r) + f_2\,(s).$$

Aus (21) folgt durch Radizieren

$$(24)\quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial r}{\partial x} \Big/ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial x} \Big/ \frac{\partial s}{\partial z} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma - \omega^2}}$$

und somit

$$(25)\quad z + \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma_0 - \omega^2}}\; x = c_1,\; z - \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma_0 - \omega^2}}\; x = c_2.$$

Daher gilt für die neuen Koordinaten r und s

$$(26)\quad r = z + \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma_0 - \omega^2}}\; x,\; s = z - \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma_0 - \omega^2}}\; x,$$

womit die restlichen Gleichungen (21) erfüllt werden.

Gemäß (23) hat $\mathring{w}$ die Lösung

$$(27)\quad \mathring{w}\,(x, z) = f_1\left(z + \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma_0 - \omega^2}}\; x\right) + f_2\left(z - \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma_0 - \omega^2}}\; x\right).$$

Die Randbedingung $\mathring{w} = 0$ für $z = 0$ ergibt

$$(28)\quad f_1\left(\sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma_0 - \omega^2}}\; x\right) + f_2\left(-\sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma_0 - \omega^2}}\; x\right) = 0,$$

was mit

$$(29)\quad f_1 = f_2 \text{ und } -f_1\,(x) = f_1\,(-x)$$

erreicht wird.

Aus der Randbedingung $\mathring{w} = 0$ für $z = H$ erhält man weiterhin

$$(30)\quad f_1\left(H + \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma_0 - \omega^2}}\; x\right) + f_2\left(H - \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{g\Gamma_0 - \omega^2}}\; x\right) = 0.$$

f_1 ist somit periodisch mit der Wellenlänge

$$(31)\quad \lambda = 2\,H \sqrt{\frac{g\Gamma_0 - \omega^2}{\omega^2 - f^2}}\;.$$

5. Die Energie interner Wellen.

Durch Multiplikation der DGL (12) mit $W_n(z)$ und Integration von $z = 0$ bis $z = H$ erhält man für ebene Wellen unter Berücksichtigung von (8) — (11) die Energiegleichung

$$(32)\quad \frac{1}{2}\int_0^H \bar{\rho}\,(z)\,[U_n^2\,(z) + W_n^2\,(z)]\,dz - \frac{1}{2}\int_0^H g\,\rho_n\,(z)\,\zeta_n\,(z)\,dz = 0,$$

d. h. potentielle und kinetische Energie einer internen Welle n^{ter} Ordnung sind gleich groß. Mit

$$W_n(z) = W_{o,n} \sin \frac{\varkappa_n}{\omega} \sqrt{g\Gamma_0}\,(z-H),\quad U_n(z) = -\frac{1}{\varkappa_n}\frac{dW_n}{dz},$$

$$(33) \qquad R_n(z) = \frac{\Gamma_0}{\omega} W_n(z)$$

$$\zeta_n = \frac{1}{\omega} W_n(z),\quad \rho = \bar{\rho}\, R \approx R$$

ergibt sich

$$(34) \quad E_{pot} = \frac{1}{2}\int_0^H g\, \rho_n(z)\, \zeta_n(z)\, dz = \frac{1}{4} g\, \Gamma_o\, \zeta^2_{\bullet,n}\, H,$$

d. h. die Energie ist dem Dichtegradienten Γ_o, dem Amplitudenquadrat der internen Wellen ζ_n sowie der Wassertiefe H proportional.

Das Verhältnis der potentiellen Energie einer langen Oberflächenwelle, $E_0 = \frac{1}{2}\bar{\rho}\, g\, \zeta_o^2$, zu jener einer internen Welle n^{ter} Ordnung ist durch

$$(35) \qquad E_o : E_n = \bar{\rho}\zeta_o^2 : \Gamma_o\, \zeta_{o,n}^2\, H/2$$

gegeben.

Als Beispiele wählen wir

$$\zeta_{o,n} = \frac{H}{20\,n}\,\text{cm},\ \Gamma_o = \frac{\bar{\rho}_H - \bar{\rho}_o}{\bar{\rho}_o\, H}\,\text{cm}^{-1},\ \bar{\rho}_H - \bar{\rho}_o = 4 \cdot 10^{-3}\,\text{g cm}^{-3},\ H = 10^5\,\text{cm},$$

$$\zeta_o = 10^2\,\text{cm}.$$

Es ergeben sich dann folgende Werte:

n	1	2	3	4	5
E_0/E_n	1 : 5	1 : 1,3	1 : 0,6	1 : 0,3	1 : 0,2

Die Energie interner Wellen kann somit ein mehrfaches jener der Oberflächenwellen betragen.

7. Die Entstehung interner Wellen.

In den folgenden Rechnungen werden die erregenden Kräfte nach den Eigenschwingungen eines rechteckigen Beckens entwickelt.

71. Die Eigenschwingungen.

Interne Seiches 1. und 2. Art wurden in einer früheren Arbeit als ebene Wellen beschrieben (W. Krauss, 1963). Dreidimensionale Seiches 1. Art in einem Meer mit $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq B$, $0 \leq z \leq H$ können unter Vernachlässigung der Erdrotation $(f = 0)$ wie folgt angesetzt werden:

$$(36) \quad \begin{cases} u(x, y, z, t) = U(z) \sin \varkappa x \cos \eta y \sin \omega t \\ v(x, y, z, t) = V(z) \cos \varkappa x \sin \eta y \sin \omega t \\ w(x, y, z, t) = W(z) \cos \varkappa x \cos \eta y \sin \omega t \\ P(x, y, z, t) = P^*(z) \cos \varkappa x \cos \eta y \cos \omega t \\ R(x, y, z, t) = R^*(z) \cos \varkappa x \cos \eta y \cos \omega t. \end{cases}$$

Mit $\varkappa = \varkappa_n = \frac{n\pi}{L}$, $\eta = \eta_m = \frac{m\pi}{B}$ lassen sich die Randbedingungen $u = 0$ für $x = 0$ und $x = L$ sowie $v = 0$ für $y = 0$ und $y = B$ befriedigen. Die Lösung ist durch (16) gegeben; die Periode beträgt, wie G. NEUMANN (1949) bereits ableitete und mit Meßergebnissen belegte,

$$(37)\quad \tau_{m\,n\,r} = 2\,\pi \sqrt{\frac{1}{g\Gamma_o}\left[1 + \frac{1}{\frac{n^2 H^2}{r^2 L^2} + \frac{m^2 H^2}{r^2 B^2}} + \frac{\Gamma_{\bullet}^2}{4\,\pi^2\left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{B^2}\right)}\right.}\;.$$

Interne Seiches 2. Art besitzen im allgemeinen große Wellenlängen; man kann daher die Corioliskraft nicht mehr vernachlässigen. Es läßt sich eine Lösung angeben, die jener von G. I. TAYLOR (1920) für lange Wellen an der Meeresoberfläche in einem rotierenden rechteckigen Becken entspricht. Wir sehen von diesen Rechnungen hier ab; es sei jedoch angemerkt, daß für die Frequenz solcher interner Wellen

$$(38)\quad \omega_n^2 = f^2 + \frac{g\Gamma_o\,(\varkappa^2 + \eta^2)\,H^2}{n^2\,\pi^2}$$

folgt, d. h. die Periode ist näherungsweise gleich der Trägheitsperiode. Die Formel deckt sich mit jener für lange Wellen in einem unbegrenzten Meer, die für Grenzflächenwellen mit demselben Resultat von A. DEFANT (1957) abgeleitet wurde.

72. Die Entstehung interner Gezeitenwellen.

Entwickelt man die gezeitenerregenden Kräfte $\mathfrak{K} = K_o \exp\,\{i\,(\varkappa_o x + \eta_o y + \omega_o t)\}$ nach den Eigenfunktionen des Beckens, also z. B. die x-Komponente gemäß

$$X\,e^{i\,(\varkappa_o x + \eta_o y + \omega_o t)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\;\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{X}_{l\,m}\,e^{i\,(\varkappa_l x + \eta_m y + \omega_o t)}$$

$$(39)\quad \hat{X}_{l\,m} = \frac{X}{4\,LB}\int_{-L}^{+L}\int_{-B}^{+B} e^{i\pi\left[\frac{2\,L - l\,\lambda_o}{\lambda_o L}\,x + \frac{2\,B - m\,\lambda_o'}{\lambda_o' B}\,y\right]}\,d\,x\,d\,y$$

$$\left(\varkappa_l = \frac{l\,\pi}{L},\ \eta_m = \frac{m\,\pi}{B}\right)$$

und führt dasselbe für die Variable $\psi \equiv \{u, v, w, \rho^*, p^*\}$ unter Berücksichtigung der z-Abhängigkeit dieser Größen durch:

$$(40\quad \psi\,(x, y, z, t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\;\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_{l\,m}\,(z)\,e^{i\,(\varkappa_l x + \eta_m y + \omega_o t)},$$

so ergibt sich dann mit $\bar{\rho}\,(z) = \bar{\rho}_o\,e^{\Gamma_o z}$ das Gleichungssystem

$$(41)\quad \begin{aligned}
&i\,\omega_o\,U_{lm} + fV_{lm} + i\,\varkappa_l\,P_{lm} = \hat{X}_{lm}\\
&i\,\omega_o\,V_{lm} - fU_{lm} + i\,\eta_m\,P_{lm} = \hat{Y}_{lm}\\
&i\,\omega_o\,W_{lm} - g\,R_{lm} + \frac{d\,P_{lm}}{d\,z} + \Gamma_o\,P_{lm} = \hat{Z}_{lm}\\
&i\,\omega_o\,R_{lm} + \Gamma_o\,W_{lm} = 0\\
&i\,\varkappa_l\,U_{lm} + i\,\eta_m\,V_{lm} + \frac{d\,W_{lm}}{d\,z} = 0\,.
\end{aligned}$$

Hierin sind $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ Konstanten und die übrigen Variablen nur von z abhängig. Durch Laplace-Transformation geht (41) in ein inhomogenes algebraisches System über, das nach der Cramerschen Regel hinsichtlich der Variablen aufgelöst und in den z-Bereich zurücktransformiert werden kann. Die einfachen aber umfangreichen Rechnungen führen auf

$$W_{lm}(z) = \frac{1}{(g\Gamma_o - \omega_o^2)(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)} \left[1 - \frac{e^{-\frac{\Gamma_o}{2} z}}{2}\left(\frac{\Gamma_o \sin a z}{a} + 2 \cos az\right)\right]$$

$$(42) \quad \cdot \left[i\,\omega_o(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)\,\hat{Z}_{lm} + \Gamma_o(i\,\eta_m f - \varkappa_l\,\omega_o)\,\hat{X}_{lm} - \Gamma_o(i\varkappa_l f + \eta_m\,\omega_o)\,\hat{Y}_{lm}\right]$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\Gamma_o}{2} z} \sin a z}{(\omega_o - f^2)\,a}\left[(i\,\eta_m f - \varkappa_l\,\omega_o)\,\hat{X}_{lm} - (i\varkappa_l f + \eta_m\,\omega_o)\,\hat{Y}_{lm}\right]$$

$$(43) \quad R_{lm}(z) = \frac{i\,\Gamma_o}{\omega_o}\,W_{lm}(z)$$

$$P_{lm}(z) = \frac{e^{-\frac{\Gamma_o}{2} z} \sin a z}{a}\,\hat{Z}_{lm} -$$

$$(44) \quad \frac{i}{\omega_o(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}\left[1 - \frac{e^{-\frac{\Gamma_o}{2} z}}{2}\left(\Gamma_o\frac{\sin a z}{a} + 2 \cos a z\right)\right] \cdot \left[(\varkappa_l\,\omega_o - i\,\eta_m f)\,\hat{X}_{lm} + (\omega_o\,\eta_m + i\varkappa_l f)\,\hat{Y}_{lm}\right]$$

$$(45) \quad U_{lm}(z) = -\frac{i\,\eta_m f + \varkappa_l\,\omega_o}{\omega_o^2 - f^2}\,P_{lm}(z) - \frac{i\,\omega_o\,\hat{X}_{lm} - f\,\hat{Y}_{lm}}{\omega_o^2 - f^2}$$

$$(46) \quad V_{lm}(z) = \frac{i\,\varkappa_l - \eta_m\,\omega_o}{\omega_o^2 - f^2}\,P_{lm}(z) - \frac{f\,\hat{X}_{lm} + i\,\omega\,\hat{Y}_{lm}}{\omega_o^2 - f^2}\,.$$

mit

$$(47) \quad a = \sqrt{\frac{g\,\Gamma_o - \omega_o^2}{\omega_o^2 - f^2}\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2) - \frac{\Gamma_o^2}{4}}$$

Um die weiteren Rechnungen nicht durch kleine bzw. unwesentliche Terme zu belasten, werden folgende Vereinfachungen vorgenommen:

$$(48) \quad \begin{cases} g\,\Gamma_\circ \gg \omega_\circ^2,\; g\,\Gamma_\circ \dfrac{\varkappa_l^2}{\omega_o^2} \gg \dfrac{\Gamma_\circ^2}{4}, \text{ d. h. lange Wellen} \\ \eta_m = 0 \text{ d. h. unendlich lange Wellenkämme.} \end{cases}$$

Hieraus folgen weiter

$$(49) \quad e^{-\frac{\Gamma_o}{2} z} \approx 1,\; V(z) = \hat{Y} = 0\,.$$

Die Lösung (42) vereinfacht sich dann zu

$$W_l(z) = \left[\left(\frac{\Gamma_o\,\omega_o^2\sqrt{1 - f^2/\omega_o^2}}{2\,g\,\varkappa_l^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - f^2/\omega_o^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{g\,\Gamma_o}}\sin\frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\,z\right.$$

$$
(50)\qquad \begin{aligned}
&- \frac{\omega_o}{g\varkappa_l}\left(1 - \cos \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, z\right)\Bigg]\hat{X}_l \\
&+ \frac{i\,\omega_o}{g\Gamma_o}\Bigg[1 - \frac{\Gamma_o\,\omega_o\sqrt{1 - f^2/\omega_o^2}}{2\,\varkappa_l\sqrt{g\,\Gamma_o}} \sin \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, z - \\
&\qquad - \cos \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, z\Bigg]\hat{Z}_l .
\end{aligned}
$$

Analoge Lösungen hat man für die anderen Unbekannten. Die Randbedingung $W_l = 0$ für $z = H$ fordert in (50) das Verschwinden der Faktoren von $\hat{X}_l$ und $\hat{Z}_l$:

$$
(51)\qquad \left(\frac{\Gamma_o\,\omega_o^2\sqrt{1 - f^2/\omega_o^2}}{2\,g\,\varkappa_l^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - f^2/\omega_o^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{g\,\Gamma_o}} = - \frac{\omega_o}{g\varkappa_l}\,\frac{\cos \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, H - 1}{\sin \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, H}
$$

und

$$
(52)\qquad \frac{\Gamma_o\,\omega_o\sqrt{1 - f^2/\omega_o^2}}{2\,\varkappa_l\sqrt{g\,\Gamma_o}} = - \frac{\cos \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, H - 1}{\sin \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, H} .
$$

Damit erhält (50) die Form

$$
(53)\qquad \begin{aligned}
W_l(z) = &- \frac{\hat{X}_l\,\omega_o}{g\,\varkappa_l}\Bigg\{1 - \cos \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, z + \\
&+ \frac{\cos \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, H - 1}{\sin \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, H} \sin \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, z\Bigg\} \\
&+ \frac{i\,\omega_o\,\hat{Z}_l}{g\Gamma_o}\Bigg\{1 - \cos \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, z + \\
&+ \frac{\cos \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, H - 1}{\sin \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, H} \sin \frac{\varkappa_l}{\omega_o}\sqrt{\frac{g\Gamma_o}{1 - f^2/\omega_o^2}}\, z\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Als Resonanzwellenzahl $\varkappa_l$, durch die der Resonanzfaktor gegen $-\infty$ geht, ergibt sich

$$
\varkappa_l = \frac{(2\,n - 1)\,\pi\,\omega_o\sqrt{1 - f^2/\omega_o^2}}{\sqrt{g\,\Gamma_o}\; H},
$$

d. h. es gibt Partialwellen in der Entwicklung der gezeitenerregenden Kraft, gegeben durch die Wellenlängen

$$(54)\quad \lambda = \frac{2\sqrt{g\,\Gamma_o}\;H}{(2\,n - 1)\;\omega_o\sqrt{1 - f^2/\omega_o^2}}\quad,$$

bei denen die Amplituden der erzwungenen internen Gezeitenwellen gegen Unendlich streben. Die Wellenlänge ist identisch mit jener von freien Wellen der Gezeitenperiode.

Erzwungene interne Gezeitenwellen treten somit stets dann auf, wenn die Entwicklung der gezeitenerregenden Kraft nach den Dimensionen des Meeresbeckens Partialwellen enthält, die mit den freien internen Gezeitenwellen des Beckens übereinstimmen. Es wird dann eine Schwingung mit Resonanzfrequenz des Meeres angeregt.

73. Luftdruckbedingte interne Wellen im unbegrenzten Meer.

In Analogie zum Gezeitenproblem gilt für lange Wellen

$$\frac{d^2\,W_{lmn}}{d\,z^2} + g\,\Gamma_o\,\frac{\varkappa_l^2 + \eta_m^2}{\omega_n^2 - f^2}\,W_{lmn} = 0$$

$$(55)\quad \frac{d\;W_{lmn}}{d\,z} = \frac{i\,\omega_n\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}{\bar\rho\,(\omega_n^2 - f^2)}\,P_{o,\,lmn}\ \text{für } z = 0$$

$$W_{lmn} = 0 \text{ für } z = H.$$

Es soll zunächst von der weiteren Bedingung $W = 0$ für $z = 0$, die in jedem Falle näherungsweise gilt, abgesehen werden.
Durch Laplace-Transformation folgt aus (55) mit

$$a_{lmn}^2 = \frac{g\,\Gamma_o\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}{\omega_n^2 - f^2}$$

$$(56)\quad W_{lmn}\,(D_z) = \frac{D_z}{D_z^2 + a_{lmn}^2}\,W\,(z = 0) + \frac{1}{D_z^2 + a_{lmn}^2}\;\frac{dW\,(z = 0)}{d\,z}\;,$$

so daß

$$(57)\quad W_{lmn}\,(z) = W\,(z = 0)\cos a_{lmn}\,z + \frac{i\,\omega_n\,a_{lmn}}{\bar\rho\,g\,\Gamma_o}\,P_{o,\,lmn}\sin a_{lmn}\,z$$

resultiert. Wegen der Randbedingung am Meeresboden wird

$$(58)\quad W\,(z = 0) = -\,\frac{i\,\omega_n\,a_{lmn}}{g\,\bar\rho\,\Gamma_o}\,P_{o,\,lmn}\,\mathrm{tg}\,a_{lmn}\,H,$$

so daß eine endgültige Lösung

$$(59)\quad W_{lmn}\,(z) = \frac{i\,\omega_n\,P_{o,\,lmn}}{\bar\rho}\sqrt{\frac{(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}{g\,\Gamma_o\,(\omega_n^2 - f^2)}}\left\{\sin\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}{\omega_n^2 - f^2}}\;z\right.$$
$$\left. -\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}{\omega_n^2 - f^2}}\,H\,\cos\sqrt{\frac{g\,\Gamma_o\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}{\omega_n^2 - f^2}}\;z\right\}$$

lautet. Der zweite Term des Klammerausdruckes enthält wiederum Resonanzwellenlängen, gegeben durch

$$\frac{g\,\Gamma_o\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}{\omega_n^2 - f^2} = \frac{(2n-1)^2\,\pi^2}{4\,H^2}$$

oder, in anderer Schreibweise

$$(60)\quad \omega_n^2 = f^2 + \frac{4\,g\,\Gamma_o\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)\,H^2}{(2n-1)^2\,\pi^2}.$$

Diese Lösung ist jedoch physikalisch wertlos, da der Resonanzfaktor in Verbindung mit $\cos \sqrt{\frac{g\,\Gamma_o\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}{\omega_n^2 - f^2}}\,z$ auftritt und somit eine unendlich große Amplitude an der Meeresoberfläche $z = 0$ bewirkt. Wir haben deshalb auch hier zu (55)

$$(61)\quad W_{lmn} = 0 \text{ für } z = 0$$

hinzuzufügen, so daß aus (57)

$$(62)\quad W_{lmn}\,(z) = \frac{i\,\omega_n\,P_{o,lmn}}{\bar{\rho}} \sqrt{\frac{\varkappa_l^2 + \eta_m^2}{g\,\Gamma_o\,(\omega_n^2 - f^2)}}\ \sin \sqrt{\frac{g\,\Gamma_o\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}{\omega_n^2 - f^2}}\ z$$

folgt.

Zur Erfüllung der Randbedingung am Meeresboden muß

$$\frac{g\,\Gamma_o\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)}{\omega_n^2 - f^2} = \frac{r^2\,\pi^2}{H^2},$$

d. h.

$$(63)\quad \omega^2 = f^2 + \frac{g\,\Gamma_o\,(\varkappa_l^2 + \eta_m^2)\,H^2}{r^2\,\pi^2}$$

sein. (63) besagt, daß nur jene Partialwellen aus dem Spektrum eines großräumigen Luftdruckfeldes ($\varkappa_l$, η_m klein) interne Wellen bedingen, deren Periode gemäß (63) nahezu der Trägheitsperiode entspricht. Mit $P_{o,lmn} = 20$ m b $= 2 \cdot 10^{-4}$ g cm^{-1} sec^{-2}, $\omega_n^2 \approx \omega_n^2 - f^2 = 10^{-8}$ sec^{-2}, $\varkappa_l = \eta_m = 6 \cdot 10^{-8}$ cm^{-1}, $g\,\Gamma_o = 10^{-4}$ sec^{-2} ergibt sich ein maximales $W_{lmn} \approx 17 \cdot 10^{-2}$ cm sec^{-1}, dem eine Amplitude $\zeta \approx 17$ m entspricht.

74. Windbedingte interne Wellen.

Hierbei hat man die Reibungsterme in den Bewegungsgleichungen mit zu berücksichtigen. Bei kleinräumigen Windfeldern kann man die Corioliskraft vernachlässigen und ebene Wellen betrachten. Wegen $\mathfrak{v} = f = \frac{\partial}{\partial y} = \eta = 0$ erhält man mit

$$(64)\quad \psi\,(x, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_{mn}\,(z)\,e^{i(\varkappa_n x + \omega_m t)},\ \psi = U, V, W, P, \tau_x$$

(τ_x keine Funktionswerte von z)

das System ($\vec{\Gamma} \equiv (0, 0, \Gamma_o)$).

$$(65)\quad \left(i\omega_m - \mu \frac{d^2}{dz^2}\right) U_{mn} + i\varkappa_n\,P_{mn} = 0$$

$$(66)\quad i\,\omega_m\,W_{mn} - g\,R_{mn} + \left(\frac{d}{dz} + \Gamma_o\right) P_{mn} = 0$$

(67) $\quad i\,\omega_m\,R_{mn} + \Gamma_o\,W_{mn} = 0$

(68) $\quad i\,\varkappa_n\,U_{mn} + \dfrac{d\,W_{mn}}{d\,z} = 0\,.$

Durch Laplace-Transformation nach z folgt hieraus mit $U = U\,(D_z) = \mathfrak{L}\,\{U_{mn}\}$ usw., $U_o = U_{mn}$ $(z = 0)$ und den Randbedingungen für $z = 0$

$$(69)\quad \begin{cases} (i\,\omega_m - \mu D_z^2)\,U + i\varkappa_n P = + \tau_x - \mu\,U_o\,D_z \\ i\,\omega_m W - g\,R + (D_z + \Gamma_o)\,P = 0 \\ i\,\omega_m\,R + \Gamma_o W = 0 \\ i\varkappa_n\,U + D_z W = 0\,. \end{cases}$$

Die Determinante des homogenen Systems ist durch das Polynom

(70) $\quad p\,(D_z) = i\,\mu\,\omega_m D_z^4 + i\,\mu\,\omega_m \Gamma_o D_z^3 + \omega_m^2 D_z^2 + \omega_m^2 \Gamma_o\,D_z + \varkappa_n^2\,(g\,\Gamma_o - \omega_m^2)$

gegeben. Sind α_k die Nullstellen von (70) und stellt $g(D_z)$ das Polynom dar, das derjenigen Determinante von (69) entspricht, die durch Ersetzen der Koeffizienten von W durch die inhomogenen Terme entsteht, so lautet die Lösung für W_{mn} entsprechend dem Entwicklungssatz

(71) $\quad W_{mn} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\dfrac{g\,(D_z)}{p\,(D_z)}\right\} = \sum\limits_{k=1}^{k} \dfrac{g\,(\alpha_k)}{p'\,(\alpha_k)}\,e^{\alpha_k z} \quad \left(p' = \dfrac{d\,p}{d\,z}\right).$

Zur Vereinfachung der Lösung vernachlässigen wir im Polynom (70) die Terme mit D_z^3 und D_z. Dies ist immer möglich, solange $|D_z| \gg \Gamma_o$ ist. Für sinusoidale Vertikalverteilungen von W_{mn} kann man magn $|D_z|$ durch die vertikale Wellenzahl $\gamma = n\,\pi/H$ abschätzen. In diesem Falle ist die obige Vernachlässigung wegen $\Gamma_o \approx 10^{-9}$ cm^{-1}, $\gamma \approx 10^{-5}$ cm^{-1} stets berechtigt. Das hierdurch erhaltene Polynom

(72) $\quad p\,(D_z) = i\,\mu\,\omega_m\,D_z^4 + \omega_m^2\,D_z^2 + \varkappa_n^2\,(g\,\Gamma_o - \omega_m^2)$

hat die Nullstellen

(73) $\quad \alpha_k = \pm \sqrt{\dfrac{i\,\omega_m}{2\,\mu} \pm \sqrt{\dfrac{-\,\omega_m^2}{4\,\mu^2} + \dfrac{i\,(g\Gamma_o - \omega_m^2)\,\varkappa_n^2}{\mu\,\omega_m}}} \qquad K = 1, 2, 3, 4.$

Im Radikanden $-\dfrac{\omega_m^2}{4\,\mu^2} + \dfrac{i\,(g\,\Gamma_o - \omega_m^2)\,\varkappa_n^2}{\mu\,\omega_m}$ ist der Realteil bedeutend größer als der Imaginärteil, man kann daher für (73)

(74) $\quad \alpha_k = \pm \sqrt{\dfrac{i\,\omega_m}{2\,\mu}\left\{\left(1 \pm 1\,(1 - 2\,i\,\dfrac{(g\,\Gamma_o - \omega_m^2)\,\varkappa_n^2\,\mu}{\omega_m^3} + \ldots)\right)\right\}}$

schreiben und erhält die Näherungswerte

(75) $\quad \alpha_{1,\,2} \approx \pm \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{\omega_m}{\mu}}\ , \ \alpha_{3,\,4} \approx \pm\, i\,\dfrac{\varkappa_n}{\omega_m} \sqrt{(g\,\Gamma_o - \omega_m^2)}\quad .$

Das Polynom $g\,(D_z)$ lautet

(76) $\quad g\,(D_z) = \varkappa_n\,\omega_m\,(\mu\,U_o\,D_z^2 - \tau_x\,D_z),$

so daß die Lösung (71) die Form

(77) $\quad W_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{4} \dfrac{\varkappa_n\,(\mu\,U_o\,\alpha_k^2 - \tau_x\,\alpha_k)}{4\,i\,\mu\,\alpha_k^3 + 2\,\omega_m\,\alpha_k}\,e^{\alpha_k z}$

annimmt.

Für $\alpha_{1,2}$ beschreiben $e^{\alpha_{1,2} z}$ stark gedämpfte Wellen; selbst mit den optimalen Werten $\omega_m = 10^{-4}\ \mathrm{sec}^{-1}$, $\mu = 10^{+2}\ \mathrm{cm}^2\ \mathrm{sec}^{-1}$ folgt $\alpha_k = \frac{1 \pm i}{2}\ 10^{-3}\ \mathrm{cm}^{-1}$, so daß eine Welle mit der Abklingtiefe $2 \cdot 10^3$ cm resultiert. Unter Berücksichtigung der Erdrotation würde dieser Lösungstyp der Horizontalgeschwindigkeit der Ekman-Spirale entsprechen. In diesem Zusammenhang interessieren lediglich die internen Wellen, die durch α_3, α_4 beschrieben werden. Sie sind durch

$$(78)\quad W_{mn} = \frac{\varkappa_n \left[-\mu U_o \frac{(g\Gamma_o - \omega_m^2)\varkappa_n^2}{\omega_m^2} \mp i \tau_{x,mn} \sqrt{\frac{(g\Gamma_o - \omega_m^2)\varkappa_n^2}{\omega_m^2}} \right]}{\pm 4\mu \left(\sqrt{\frac{(g\Gamma_o - \omega_m^2)\varkappa_n^2}{\omega_m^2}} \right)^3 \pm 2\omega_m i \sqrt{\frac{(g\Gamma_o - \omega_m^2)\varkappa_n^2}{\omega_m^2}}}\ e^{\pm i \sqrt{\frac{(g\Gamma_o - \omega_m^2)\varkappa_n^2}{\omega_m^2}}\, z}$$

gegeben. Die Realteile in (78) sind vernachlässigbar klein; eine Näherung ist daher

$$(79)\quad W = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_{mn} \approx \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\varkappa_n \tau_{x,mn}}{\omega_m} \sin \sqrt{\frac{(g\Gamma_o - \omega_m^2)\varkappa_n^2}{\omega_m^2}}\, z,$$

wobei zur Erfüllung der Randbedingung am Meeresboden $z = H$

$$(80)\quad \sqrt{\frac{(g\Gamma_o - \omega_m^2)\varkappa_n^2}{\omega_m^2}} = \frac{r\pi}{H}$$

sein muß.

Dies zeigt, daß diejenigen spektralen Komponenten τ_{mn} des Windfeldes, die sich mit möglichen Stabilitätsschwingungen decken, zur Entstehung solcher Wellen führen.

Bei großräumigen Windfeldern hat man die Corioliskraft zu berücksichtigen; dies führt jedoch zu Schwierigkeiten.

8. Reibungseinflüsse.

Wir betrachten ebene interne Wellen $e^{i(\varkappa x + \omega t)}$ auf einer nichtrotierenden Erde. Es gelten die Gleichungen

$$(81)\quad \left(i\omega - \frac{d}{dz} \mu \frac{d}{dz} \right) U + i\varkappa P = 0$$

$$(82)\quad i\omega W - gR + \frac{dP}{dz} + \Gamma P = 0$$

$$(83)\quad i\omega R + \Gamma W = 0$$

$$(84)\quad i\varkappa U + \frac{dW}{dz} = 0 .$$

Setzt man U aus (84) in (81) und R aus (83) in (82) ein, so erhält man

$$(85)\quad \begin{cases} \left(i\omega - \frac{d}{dz} \mu \frac{d}{dz} \right) \frac{1}{\varkappa} \frac{dW}{dz} + \varkappa P = 0 \\ (g\Gamma - \omega^2) W + i\omega \left(\frac{dP}{dz} + \Gamma P \right) = 0, \end{cases}$$

woraus als DGL für W(z)

$$(86)\quad \frac{d^4 W}{d z^4} + \left(\frac{2}{\mu}\frac{d\mu}{dz} + \Gamma\right)\frac{d^3 W}{d z^3} + \left(\frac{1}{\mu}\frac{d^2\mu}{d z^2} - \frac{i\,\omega}{\mu} + \frac{\Gamma}{\mu}\frac{d\mu}{dz}\right)\frac{d^2 W}{d z^2} - \frac{i\,\omega\,\Gamma}{\mu}\frac{dW}{dz} - \frac{i\,(g\,\Gamma - \omega^2)\,\varkappa^2}{\omega\,\mu} W = 0$$

folgt.

Über den Reibungskoeffizienten ist wenig bekannt, da er jedoch von der Größenordnung 1 bis $10^2\ cm^2\ sec^{-1}$ ist, kann man als maximale Werte für $\Delta\mu/\mu \approx 10/10^2 = 10^{-1}$ annehmen. Für $\bar{\rho}$ gilt hingegen $\Delta\,\bar{\rho}/\bar{\rho} \approx 10^{-3}/1 = 10^{-3}$. Für (86) wird man daher $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz} > \Gamma$ annehmen müssen; dennoch ist für sinusoidale Wellen der erste Term erheblich größer als der zweite, so daß (86) im allgemeinen auf

$$(87)\quad \frac{d^4 W}{d z^4} - \frac{i\,\omega}{\mu}\frac{d^2 W}{d z^2} - \frac{i\,(g\,\Gamma - \omega^2)\,\varkappa^2}{\omega\,\mu} W = 0$$

reduziert werden kann.

Eine Lösung ist ($\Gamma = \Gamma_o = \text{const}$)

$$(88)\quad W = W_n \sin \gamma_n z \quad \left(\gamma_n = \frac{n\,\pi}{H}\right)$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$(89)\quad \gamma_n^4 + \frac{i\,\omega_n}{\mu}\gamma_n^2 - \frac{i\,(g\,\Gamma_o - \omega_n^2)\,\varkappa^2}{\omega_n\,\mu} = 0,$$

woraus für die Frequenz ω_n

$$(90)\quad \omega_n = \frac{i\,\mu}{2}\frac{\gamma_n^4}{\gamma_n^2 + \varkappa^2} + \sqrt{-\frac{\mu^2\,\gamma_n^8}{4\,(\gamma_n^2 + \varkappa^2)^2} + \frac{g\,\Gamma_o\,\varkappa^2}{\gamma_n^2 + \varkappa^2}}$$

bzw. wegen $\gamma_n^2 \gg \varkappa^2$

$$(91)\quad \omega_n \approx \frac{i\,\mu\,\gamma_n^2}{2} + \sqrt{\frac{g\,\Gamma_o\,\varkappa^2}{\gamma_n^2} - \frac{\mu^2\,\gamma_n^4}{4}}$$

folgt. Mit $g\Gamma_o \approx 10^{-6}\ sec^{-2}$, $\varkappa^2 \approx 10^{-12}\ cm^{-2}$, $\gamma^2 \approx 10^{-10}\ cm^{-2}$ erkennt man, daß der erste Term generell wesentlich größer ist als der zweite, so daß der Radikand positiv ist. Gemäß (17) stellt

$$(92)\quad \omega_{o,n} \approx \frac{\varkappa\,\sqrt{g\,\Gamma_o}}{\sqrt{\gamma_n^2 + \varkappa^2}} \approx \frac{\varkappa}{\gamma_n}\sqrt{g\,\Gamma_o}$$

die Frequenzen der Welle im reibungsfreien Medium dar. Man erhält somit für die Frequenz im reibungsbehafteten Medium

$$(93)\quad \omega_n \approx \sqrt{\omega_{o,n}^2 - \frac{\mu^2\,\gamma_n^4}{4}} + \frac{i\,\mu\,\gamma_n^2}{2}\,.$$

Die Frequenz erfährt infolge der Reibung eine unwesentliche Verkleinerung und die Welle wird gemäß $\exp\,(-\mu\,\gamma_n^2 t/2)$ gedämpft. Der Dämpfungskoeffizient ist proportional dem Reibungskoeffizienten μ, dem Quadrat der Ordnung n der internen Welle $\left(\gamma_n = \frac{n\,\pi}{H}\right)$

und umgekehrt proportional dem Quadrat der Wassertiefe H. Die Abklingzeit τ_a, d. h. diejenige Zeit, nach der die Amplitude auf $1/e = 0{,}368$ des Ausgangswertes abgeklungen ist, beträgt

$$(94) \quad \tau_{a,n} \approx \frac{2}{\mu \gamma_n^2} = \frac{2\,H^2}{\mu\, n^2 \pi^2},$$

d. h. ist (in der obigen Näherung) von der Periode unabhängig. Die Werte gemäß (94) sind lediglich im Flachwasser von Bedeutung. So erhält man mit $\mu = 10^2$ cm^2 sec^{-1} und $H = 100$ m für die internen Wellen 1. Ordnung $\tau_a \approx 2 \cdot 10^5$ sec, d. h. ca. 2,3 Tage, für die 5. Ordnung ca. 0,1 Tage. In der Tiefsee erhält man mit $H = 3 \cdot 10^5$ cm, $\mu = 10$ cm^2 sec^{-1} eine Abklingzeit $\tau_a \approx 2 \cdot 10^9/n^2$ sec, so daß selbst interne Wellen 10ter Ordnung nach ca. $2 \cdot 10^7$ sec, d. h. ca. 230 Tage auf 0,368 des Ausgangswertes abklingen. Dieses Ergebnis ist sehr befremdend. Zwar deuten alle Meßreihen, die ein permanentes Auftreten interner Wellen im Meer zeigen, darauf hin, daß interne Wellen bedeutend weniger gedämpft werden als Grenzflächenwellen; die obigen Zahlenwerte überraschen dennoch. Auf der Basis der Theorie, die jede Vermischung ausschließt, scheint es jedoch keine erwähnenswerte Dämpfung zu geben. Vielleicht erklärt dies, warum interne Wellen eine so permanent beobachtete Erscheinung im Ozean sind.

Literaturverzeichnis

DEFANT, A. (1957): Flutwellen und Gezeiten des Wassers. Handb. d. Physik **48**, Geophys. 2, 865—881, Springer-Verlag, Berlin. — KRAUSS, W. (1963): Zum System der internen Seiches der Ostsee. Kieler Meeresforsch. **19**, 2, 119—132. — NEUMANN, G. (1949): Stabilitätsschwingungen und die innere thermische Unruhe im Meer und in der Atmosphäre. Dtsch. Hydrogr. Z. **2**, 1—3, 52—67. — TAYLOR, G. I. (1920): Tidal oscillations in gulfs and rectangular basins. Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2,20.