Aus dem Institut für Meereskunde der Universität Kiel

Über den Einfluß von Reibung und Vermischung auf interne Wellen

Von Paul H. LeBlond

Zusammenfassung: Es wird gezeigt, daß interne Wellen in einer inkompressiblen Flüssigkeit mit innerer Reibung und Vermischung nur existieren können, wenn die Schichtung Γ größer als eine minimale Schichtung Γ_{min} ist und daß ihr Auftreten dann auf einen endlichen Wellenlängenbereich beschränkt ist. Die maximale Frequenz ist kleiner als im Fall einer idealen Flüssigkeit (Väisäläfrequenz). Eine Flüssigkeit der obigen Art verhält sich internen Wellen gegenüber wie ein Filter, dessen Bandbreite von den Flüssigkeitseigenschaften und der Schichtung abhängt und dessen maximale Durchlässigkeit bei Wellen liegt, deren horizontale Wellenlänge doppelt so groß wie die vertikale ist. Alle Abweichungen der Eigenschaften interner Wellen (mit Ausnahme des Dämpfungsfaktors) gegenüber denen in einer idealen Flüssigkeit lassen sich als Funktion des Verhältnisses Γ/Γ_{min} darstellen.

On the effect of friction and mixing on internal waves (Summary): It is shown that in an incompressible fluid where viscosity and mixing are present internal waves can exist only when the stratification, Γ, is larger than a minimum value, Γ_{min}, and then only for a finite band of wave lengths. The maximum frequency is smaller than in ideal fluids (Väisälä frequency). Such an incompressible fluid is seen to behave as a filter for internal waves, the band-width of which depends on fluid properties and on stratification, and which has its maximum response for waves having a wave length twice as long in the horizontal as in the vertical direction. All deviations (except for the damping factor) from the theory of ideal fluids can be expressed as functions of the ratio Γ/Γ_{min}, so that the results can be written in a generalized form which applies to all fluids.

Die Rolle, die Zähigkeit und Vermischung im Falle unstabil geschichteter Flüssigkeiten spielen, ist bereits untersucht worden (Konvektionstheorie). Dem Einfluß von dissipativen Vorgängen auf die Dynamik stabil geschichteter Flüssigkeiten hat man dagegen wenig Beachtung geschenkt. Hier werden einige Abweichungen in den Eigenschaften (besonders in der Frequenz) interner Wellen untersucht, die auftreten, wenn man interne Wellen statt in einer idealen Flüssigkeit nunmehr unter Berücksichtigung von Reibung und Vermischung behandelt.

In einer unbegrenzten und bewegungslosen inkompressiblen Flüssigkeit nehme die Dichte $\rho_0(z)$ linear nach unten zu. Es werden kleine Störungen dieses Ruhezustandes studiert und vorausgesetzt, daß diese hinreichend klein sind, so daß man die Gleichungen linearisieren kann. Wenn die Schichtung nicht sehr stark ist, kann man auch die Boussinesq-Approximation benutzen.

Mit der z-Achse positiv nach unten und den obigen Voraussetzungen ist die Dynamik des Systems durch die folgenden Gleichungen für Impuls, Masse und Dichte gegeben:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right)\mathfrak{v} - \frac{\rho}{\rho_0}\mathfrak{g} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} = 0 \tag{2}$$

und

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa \nabla^2\right)\rho + w\frac{d\rho_0}{dz} = 0. \tag{3}$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{v}$, ρ, p die Störungsanteile von Geschwindigkeit, Dichte und Druck; w ist die Vertikalkomponente von $\mathfrak{v}$; ν und $\varkappa$ sind molekulare Reibungs- bzw. Vermischungskoeffizienten, und $\mathfrak{g}$ ist die Schwerkraft.

Durch Elimination kann man aus den Gleichungen (1) — (3) eine Wellengleichung für w allein ableiten:

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varkappa \nabla^2\right) \nabla^2 w + g\, \Gamma\, \nabla_h{}^2 w = 0$$

mit $\Gamma = \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz} = \text{const.}$, $g = |\mathfrak{g}|$ und $\nabla_h{}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Es werden Wellenlösungen der Form

$$(5) \qquad w = e^{\omega t - i \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r}}$$

studiert, bei denen die Frequenz ω komplex ist, der Wellenvektor jedoch reelle Komponenten hat.

Substituiert man (5) in (4), so folgt die charakteristische Gleichung

$$(6) \qquad \omega^2 + k^2 (\nu + \varkappa)\, \omega + k^4 \nu \varkappa + \frac{k_h{}^2 g\, \Gamma}{k^2} = 0,$$

wobei k der Betrag von $\mathfrak{k}$ ist und k_h und k_v die Beträge des Horizontal- bzw. Vertikalanteiles von $\mathfrak{k}$ sind. Diese charakteristische Gleichung hat die Wurzeln

$$(7) \qquad \omega_{1,2} = \frac{-1}{2} k^2 (\nu + \varkappa) \pm i \sqrt{\frac{g\Gamma k_h{}^2}{k^2}\left[1 - \frac{(\nu - \varkappa)^2 k^6}{4 g\, \Gamma k_h{}^2}\right]}\,.$$

Da der Realteil von ω negativ ist, sind die Wellen immer gedämpft, und zwar sind die Einflüsse von Reibung und Vermischung in dieser Beziehung einfach additiv. Die Frequenz ist im allgemeinen kleiner als in idealen Flüssigkeiten und verschwindet für den Fall, daß

$$(8) \qquad 1 - \frac{(\nu - \varkappa)^2 k^6}{4 g\, \Gamma\, k_h{}^2} = 0$$

gilt. Wellen existieren dann nur für positive Werte der linken Seite von (8), d. h. zwischen den positiven Wurzeln des Polynoms

$$(9) \qquad \frac{(\nu - \varkappa)^2 k^6}{4 g\, \Gamma} - k^2 + k_v{}^2 .$$

Positive Wurzeln werden allerdings nur auftreten, wenn die kubische Diskriminante von (9) negativ ist, d. h. nur wenn

$$(10) \qquad \Gamma > \Gamma_{\min} = \frac{27\, k_v{}^4 (\nu - \varkappa)^2}{16\, g}$$

gilt.

Für interne Wellen einer bestimmten vertikalen Wellenzahl k_v ist dann (außer im Fall $\nu = \varkappa$) eine minimale Schichtungsstärke erforderlich. In einer vertikal begrenzten

Flüssigkeit (Tiefe H), in der die Wellenzahl minimal den Wert π/H annehmen kann, sind demnach interne Wellen nur möglich, wenn

$$\Gamma > \frac{27\,\pi^4\,(\nu - \varkappa)^2}{16\,g\,H^4} \tag{11}$$

gilt.

Der Minimalwert $g\,\Gamma_{min}H^4$ ist in Tabelle 1 für einige Flüssigkeiten angegeben. Man sieht, daß für dünne Schichten oder sehr zähe Flüssigkeiten diese Beschränkung sicher bedeutungsvoll ist. In einer 31,6 cm tiefen Schicht Glyzerin ist z. B. $g\,\Gamma_{min} = 0{,}12$, und in einer 1 cm dicken Schicht Wasser ist $g\Gamma_{min} = 0{,}19$.

Tabelle 1

Reibungs- und Vermischungskoeffizienten und die schwächste Schichtung, die für die Existenz von internen Wellen in verschiedenen Flüssigkeiten erforderlich ist.

	ν	$\varkappa$	$g\,\Gamma_{min}\,H^4$
	$cm^2\,sec^{-1}$	$cm^2\,sec^{-1}$	cm^3
Wasser	0,010	0,00148	0,012
Quecksilber	0,0012	0,0254	0,096
Glyzerin	6,8	0,00094	$7{,}6 \cdot 10^3$
Luft	0,150	0,205	0,50
Alkohol	0,022	0,0013	0,070
Wasser (turbulent)	10^2	14,8	$1{,}2 \cdot 10^6$

Wenn $\Gamma > \Gamma_{min}$ ist, wird es interne Schwingungen zwischen den Wurzeln von (9) geben, d. h. in dem Bereich

$$\cos\left(\frac{\Theta}{3} + 240°\right) < \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{\Gamma}}\,\frac{k^2}{k_v^2} < \cos\frac{\Theta}{3} \tag{12}$$

mit $\cos\Theta = -\sqrt{\frac{\Gamma_{min}}{\Gamma}}$. Einige Beispiele für diesen Bereich sind in Tabelle 2 angegeben. Da die Abhängigkeit von ν und $\varkappa$ nur in der Form (Γ_{min}/Γ) vorkommt, gelten die unten berechneten Bereiche für alle Flüssigkeiten.

Tabelle 2

Wellenzahlbereiche, in denen interne Wellen auftreten, für drei Werte des Parameters Γ/Γ_{min} sowie Wellenlängenbereiche in einer begrenzten Flüssigkeit mit $k_h = 2\,\pi/L$, $k_v = n\,\pi/H$, H Tiefe

Γ/Γ_{min}	Min $\frac{k^2}{k_v^2}$	Max $\frac{k^2}{k_v^2}$	Min $\frac{n^2L^2}{H^2}$	Max $\frac{n^2L^2}{H^2}$
2	1,10	3,0	2,0	40
10	1,01	7,67	0,60	400
100	1,0001	25,5	0,16	$4 \cdot 10^4$

Die höchste erreichbare Frequenz tritt jetzt bei der Wellenzahl

$$k^2 = \frac{3}{2} k_v^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_{min}} \right)^{1/3} \tag{13}$$

auf und ist

$$\omega_{max} = \sqrt{g \, \Gamma \left[1 - \left(\frac{\Gamma_{min}}{\Gamma} \right)^{1/3} \right]}. \tag{14}$$

Selbst für relativ starke Schichtungen ist die Abweichung von der Väisäläfrequenz noch wesentlich: Für $\Gamma/\Gamma_{min} = 10$ z. B. ist $\omega_{max} = 0{,}74 \sqrt{g\,\Gamma}$, für $\Gamma/\Gamma_{min} = 100$ ist $\omega_{max} = 0{,}88 \sqrt{g\,\Gamma}$.

Das Verhältnis zwischen dem Weg, den eine Welle zurücklegt, bis ihre Amplitude um einen Faktor $1/e$ abgenommen hat und ihrer Wellenlänge wird durch $\mathrm{Im}\,(\omega)/2\,\pi\,\mathrm{Re}(\omega)$ gegeben und ist hier explizit

$$\frac{1}{\pi \, k^2 \, (\nu + \varkappa)} \sqrt{\left(g \, \Gamma \frac{k_h^2}{k^2} \right) \left(1 - \frac{4 \, k^6 \, \Gamma_{min}}{27 \, k_h^2 \, k_v^4 \, \Gamma} \right)} \; . \tag{16}$$

Dieser Ausdruck stellt für kleine Dämpfungsfaktoren das Verhältnis zwischen der kinetischen Energie einer Welle und demjenigen Energieanteil, der während einer Schwingungsperiode in andere Energieformen (Wärme, potentielle Energie der Schichtung) umgewandelt wird, dar.

(16) hat unabhängig von $\nu, \varkappa$ oder Γ ein Maximum bei $k_h^2 = k_v^2/2$ und verschwindet an beiden Enden des Wellenbereiches. Das Energiespektrum einer Gruppe von internen Wellen wird dann in Fortpflanzungsrichtung seine Form ändern, und da die Energie sich mit der Zeit mehr und mehr in der Nähe der $k_h^2 = k_v^2/2$ entsprechenden Frequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g\,\Gamma}{3} \left(1 - \frac{\Gamma_{min}}{\Gamma} \right)} \tag{17}$$

konzentriert, wird das Spektrum bei ω_0 ein immer schärferes Maximum haben.

Eine inkompressible Flüssigkeit mit Reibung und Vermischung kann man dann als ein Filter für interne Schwingungen betrachten, dessen Breite dem Wellenbereich (12) entspricht und dessen höchste Durchlässigkeit bei ω_0 bzw. $k_h^2 = k_v^2/2$ auftritt.

Es ist bemerkenswert, daß alle Abweichungen sowohl die in dem imaginären Teil der Frequenz als auch die in der Breite des Wellenbereichs nur in Form des Bruches Γ_{min}/Γ von ν und $\varkappa$ abhängen, so daß interne Wellen mit Ausnahme ihres Dämpfungsfaktors genau dieselben Eigenschaften in allen Flüssigkeiten haben, in denen dieser Bruch denselben Wert annimmt.

Die meisten Resultate dieser Untersuchung, d. h. daß interne Wellen gedämpft werden, daß Reibung und Vermischung dabei eine einfach additive Rolle spielen und daß interne Wellen nur für $\Gamma > \Gamma_{min}$ und nur für einen begrenzten Bereich von Wellenlängen auftreten, sind nicht unerwartet. Kinetische Energie wird durch Reibung und Vermischung in ähnlicher Weise umgewandelt, und man erwartet auch, daß bei sehr schwachen Schichtungen die Frequenz so niedrig wird, daß Reibung und Vermischung die Störung innerhalb des Zeitraums einer einzigen Schwingungsperiode auslöschen können. Da für sehr lange Wellen die Frequenz sehr niedrig wird, kann man auch eine Begrenzung des Wellenbereichs in dieser Richtung vermuten. Für sehr kurze Wellen wird andererseits die Wirkung diffuser Vorgänge am größten, so daß auch die Existenz einer kürzesten Welle zu erwarten ist.

Die Abhängigkeit von Γ_{min} von der Differenz $(\nu - \varkappa)$ ist aber zunächst etwas überraschend. Da die Frequenz geringer wird als in einer idealen Flüssigkeit, wenn Reibung oder Vermischung allein wirken, warum soll diese Frequenzabweichung dann verschwinden, wenn beide zusammen mit demselben Betrag wirken? Um dieses Phänomen zu erklären, betrachten wir ein Flüssigkeitsteilchen, das sich mit einem gewissen Impuls durch sein Gleichgewichtsniveau bewegt. Durch den Einfluß der Reibung allein wird das Teilchen seine maximale Auslenkung langsamer erreichen und längere Zeit für eine Schwingung brauchen: Reibung wirkt dann als eine zusätzliche verzögernde Kraft an dem Teilchen. Wenn Vermischung allein wirkt, wird der Dichteunterschied zwischen dem Teilchen und seiner Umgebung nicht so groß sein wie in einer idealen Flüssigkeit. Den Einfluß der Vermischung kann man also als eine Verringerung der rücktreibenden Schwerkraft betrachten. Im Vergleich zu dem Fall einer idealen Flüssigkeit gibt es dann eine kleine zusätzliche Kraft nach oben. Das Teilchen kann sich also weiter von seinem Stabilitätsniveau entfernen, und dazu benötigt es längere Zeit. Wenn entweder Reibung oder Vermischung allein wirken, ist also die Frequenz niedriger. Wenn beide zusammen vorkommen, so wirken zwei zusätzliche Kräfte, durch die man ihren Einfluß darstellen kann, gegeneinander, und die Frequenzabweichung wird geringer als bei Reibung oder Vermischung allein. Die Untersuchung zeigt als ein Endresultat, daß diese beiden Kräfte dieselbe Abhängigkeit von Diffusions- und Wellenparametern haben, so daß sie für $\nu = \varkappa$ einander annulieren.

Da diese Untersuchung für eine unbegrenzte Flüssigkeit angestellt wurde, stellen die Resultate nur die Rolle von Reibung und Vermischung als fundamentale Eigenschaften einer Flüssigkeit dar ohne Berücksichtigung irgendwelcher Einflüsse der Ausdehnung der Flüssigkeit oder der Randbedingungen. Unter realen Verhältnissen werden an festen Rändern zusätzlich Energieumwandlungen vorkommen: Es ist also zu erwarten, daß bei Anwesenheit fester Ränder Γ_{min} größer wird als in einem unbegrenzten Medium. Die Vertikalverteilung der Störungsgrößen wird natürlich auch komplizierter. Das Ziel dieser Arbeit war aber nicht die Behandlung spezieller Probleme, sondern die Beschreibung der allgemeinen Rolle von Reibung und Vermischung in einer einfachen Weise, um die wichtigsten Abweichungen von der Theorie der internen Wellen in einer idealen Flüssigkeit darzustellen.