

# Copyright ©

---

Es gilt deutsches Urheberrecht.

Die Schrift darf zum eigenen Gebrauch kostenfrei heruntergeladen, konsumiert, gespeichert oder ausgedruckt, aber nicht im Internet bereitgestellt oder an Außenstehende weitergegeben werden ohne die schriftliche Einwilligung des Urheberrechtinhabers. Es ist nicht gestattet, Kopien oder gedruckte Fassungen der freien Onlineversion zu veräußern.

German copyright law applies.

The work or content may be downloaded, consumed, stored or printed for your own use but it may not be distributed via the internet or passed on to external parties without the formal permission of the copyright holders. It is prohibited to take money for copies or printed versions of the free online version.

Aus dem Institut für Meereskunde der Universität Kiel

## Zur Theorie zweidimensionaler nichtlinearer interner Wellen in stetig geschichteten Medien

Von LORENZ MAGAARD

**Zusammenfassung:** Es werden exakte Wellengleichungen für beliebige instationäre zweidimensionale interne Wellen endlicher Amplitude in inkompressiblen stetig geschichteten Medien aufgestellt. Für den Spezialfall mit konstanter Phasengeschwindigkeit  $c$  fortschreitender interner Wellen wird ein erstes Integral gefunden, das für  $c = 0$  mit der Gleichung von R. R. LONG (1953) für stationäre (Lee-) Wellen übereinstimmt. Einige exakte Lösungen dieser Gleichung (C. S. YIH, 1960) werden in Bezug auf interne Wellen diskutiert. Es wird gezeigt, daß für diese Lösungen die Wellenlänge von der Amplitude unabhängig ist, während das Wellenprofil für große Amplituden stark von der Sinusform abweicht (Abb. 1). Das Auftreten von Wellen solchen Profils wird durch Beobachtungen im Meere verifiziert (Abb. 2 und 3).

**On the theory of two-dimensional nonlinear internal waves in continuously stratified media.** (Summary): Exact wave equations for non-stationary two-dimensional internal waves of finite amplitude in incompressible continuously stratified media have been derived. A first integral has been found for the special case of progressive waves with a constant phase speed  $c$ . For  $c = 0$ , this integral is identical with R. R. LONG's equation (1953) for stationary flow (especially lee-waves). Some exact solutions of this equation (C. S. YIH, 1960) have been discussed with respect to internal waves. It has been shown, that for these solutions the wave length is independent of the amplitude whereas the wave profile is strongly distorted compared with a sine wave (fig. 1). The occurrence of waves with such a distorted profile is verified by observations in the sea (fig. 2 and 3).

### I. Einleitung

Theoretische Studien interner Wellen wurden bisher meist mit Hilfe der Störungsrechnung durchgeführt. Die zahlreichen Resultate dieser Untersuchungen interner Wellen infinitesimaler Amplitude wurden kürzlich von W. KRAUSS (1965) zusammenfassend dargestellt. In dieser Arbeit werden zweidimensionale Bewegungsvorgänge in inkompressiblen reibungsfreien Medien unter Vernachlässigung der Corioliskraft betrachtet. Außer den eben genannten einschränkenden Voraussetzungen sollen dabei keinerlei Vernachlässigungen, etwa der nichtlinearen Glieder, vorgenommen werden.

### II. Herleitung der Wellengleichungen für beliebige instationäre Wellen

Bewegungen in einem vertikalen Schnitt eines reibungsfreien inkompressiblen Mediums unter dem Einfluß der Schwerkraft als einziger äußerer Kraft werden bei Vernachlässigung der Corioliskraft durch die Gleichungen

$$(1) \quad \rho(u_t + u u_x + w u_z) + p_x = 0$$

$$(2) \quad \rho(w_t + u w_x + w w_z - g) + p_z = 0$$

$$(3) \quad u_x + w_z = 0$$

$$(4) \quad \rho_t + u \rho_x + w \rho_z = 0$$

beschrieben. Dabei bedeuten

$u$  Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung ( $x$ -Achse horizontal in beliebiger Richtung)

w Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung (z-Achse vertikal nach unten gerichtet)

p Druck

$\rho$  Dichte

g Erdbeschleunigung.

Die Indizes bezeichnen partielle Ableitungen.

Als Randbedingungen sollen hier

$$(5) \quad w = 0 \text{ für } z = 0 \quad (\text{ungestörte Oberfläche})$$

$$(6) \quad w = 0 \text{ für } z = H \quad (\text{ebener Boden in konstanter Tiefe } H) \text{ gefordert werden.}$$

Wegen (3) kann man eine Stromfunktion  $\psi(x, z, t)$  gemäß

$$(7) \quad \psi_z = u$$

$$(8) \quad \psi_x = -w$$

eingeführen. Elimination von p aus (1) und (2) ergibt

$$(9) \quad \alpha \rho_x + \beta \rho_z + \gamma \rho = 0$$

mit

$$(10) \quad \alpha = \psi_{xt} + \mathbf{J}(\psi_x, \psi) + g$$

$$(11) \quad \beta = \psi_{zt} + \mathbf{J}(\psi_z, \psi)$$

$$(12) \quad \gamma = \alpha_x + \beta_z = \Delta \psi_t + \mathbf{J}(\Delta \psi, \psi).$$

Dabei bedeutet  $\mathbf{J}(\psi_1, \psi_2) = \psi_{1x} \psi_{2z} - \psi_{1z} \psi_{2x}$  die Funktionaldeterminante von  $\psi_1, \psi_2$  hinsichtlich  $x, z$ . Nach Einführung von

$$(13) \quad f(x, z, t) = \log \rho(x, z, t)$$

als neue unbekannte Funktion hat man also das Gleichungssystem

$$(14) \quad \alpha f_x + \beta f_z = -\gamma$$

$$(15) \quad \psi_z f_x - \psi_x f_z + f_t = 0$$

zu behandeln. Faßt man (14), (15) als lineares inhomogenes Gleichungssystem für die Größen  $f_x, f_z$  und  $f_t$  auf, so erhält man als allgemeine Lösung

$$(16) \quad \nabla f = \lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Dabei sind  $\nabla, \mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  Vektoren mit den Komponenten

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right), (\beta, -\alpha, \delta) \text{ und } \left( \frac{\gamma}{\delta} \psi_x, \frac{\gamma}{\delta} \psi_z, 0 \right)$$

mit

$$(17) \quad \delta = -\alpha \psi_x - \beta \psi_z.$$

$\lambda$  ist eine willkürliche skalare Funktion. Aus (16) erhält man als Integrabilitätsbedingung

$$(18) \quad \nabla \lambda \times \mathbf{a} + \lambda \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \mathbf{b} = 0$$

und daraus durch skalare Multiplikation mit  $\mathbf{a}$

$$(19) \quad \lambda \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = 0.$$

Damit wird (16) zu

$$(20) \quad \nabla f = - \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

und (18) zu

$$(21) \quad \nabla \times \left( - \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \mathbf{a} + \mathbf{b} \right) = 0.$$

(21) ist ein System notwendiger und hinreichender Gleichungen in der Stromfunktion  $\psi$  allein. Hat man eine Lösung von (21) gefunden, so ist das zugehörige  $\rho$  durch (20) bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Durch (7) und (8) sind  $u$  und  $w$  eindeutig bestimmt, und  $p$  ist durch (1) und (2) bis auf eine additive Funktion von  $t$  festgelegt.

Da man bei der Untersuchung interner Wellen die Dichte nicht nur an einem einzigen Raum-Zeit-Punkt vorgeben möchte sondern z. B. das zeitliche Mittel der Dichte an allen Raumpunkten, ist es zweckmäßig, das Studium der internen Wellen nicht auf (21) sondern auf (20) aufzubauen. Man kann dann  $\rho(x, z, t = 0)$  oder  $\rho(x = 0, z, t)$  vorgeben. (Vorgabe von  $\rho(x, z = 0, t)$  ist unzweckmäßig). Das entspricht der Vorgabe von  $\bar{\rho}(x, z)$  bei der Störungsrechnung, wiewohl hier  $\bar{\rho}(x, z)$  im Falle seiner Existenz nicht exakt gleich  $\rho(x, z, t = 0)$  bzw.  $\rho(x = 0, z, t)$  zu sein braucht.

(Bei Sinuswellen läßt sich  $\bar{\rho}(z)$  exakt durch Anfangsbedingungen in  $\rho(x, z, t)$  ausdrücken: Im Falle einer stehenden Welle gibt es ein  $t = t_0$  mit  $\bar{\rho}(z) = \rho(x, z, t_0)$ ; im Falle einer fortschreitenden Welle gibt es nach Einführung einer Koordinate  $s = x - ct$  (vgl. (34)) ein  $s = s_0$  mit  $\bar{\rho}(z) = \rho(s_0, z)$ ).

Gibt man  $\rho(x, z, t = 0)$  vor, so erhält man aus (20)

$$(22) \quad f(x, z, t) = f(x, z, 0) - \int_0^t \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \delta \, dt$$

sowie

$$(23) \quad f_x(x, z, 0) - \int_0^t \left[ \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \delta \right]_x \, dt + \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \beta - \frac{\gamma}{\delta} \psi_x = 0$$

und

$$(24) \quad f_z(x, z, 0) - \int_0^t \left[ \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \delta \right]_z \, dt - \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \alpha - \frac{\gamma}{\delta} \psi_z = 0.$$

Gibt man  $\rho(x = 0, z, t)$  vor, so erhält man aus (20)

$$(25) \quad f(x, z, t) = f(0, z, t) - \int_0^x \left[ \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \beta - \frac{\gamma}{\delta} \psi_x \right] dx$$

sowie

$$(26) \quad f_t(0, z, t) - \int_0^x \left[ \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \beta - \frac{\gamma}{\delta} \psi_x \right]_t dx + \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \delta = 0$$

und

$$(27) \quad f_z(0, z, t) - \int_0^x \left[ \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \beta - \frac{\gamma}{\delta} \psi_x \right]_z dx - \frac{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})} \alpha - \frac{\gamma}{\delta} \psi_z = 0.$$

Die Systeme (23), (24) bzw. (26), (27) sind die Gleichungen für interne Wellen. Selbstverständlich können die Gleichungen auch nichtperiodische Lösungen haben. Wie üblich werden hier Gleichungen, die neben anderen Vorgängen wellenartige Vorgänge beschreiben, als Wellengleichungen bezeichnet.

Zur besseren Einsicht in die Bedeutung der Gleichungen werden ihre linearen Anteile in  $\psi$  bzw. den Ableitungen von  $\psi$  berechnet. Es ist

$$(28) \quad \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = \Delta \psi_{tt} + \dots$$

und

$$(29) \quad \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = -g (g \psi_{xx} + \psi_{ztt}) + \dots$$

Damit werden die linearen Anteile von (23), (24) und (26), (27)

$$(30) \quad \rho_x(x, z, 0) = 0$$

$$(31) \quad \Delta \psi_{tt} + \frac{\rho_z(z, 0)}{\rho(z, 0)} (g \psi_{xx} + \psi_{ztt}) = 0$$

und

$$(32) \quad \rho_t(0, z, t) = 0$$

$$(33) \quad \Delta \psi_{tt} + \frac{\rho_z(0, z)}{\rho(0, z)} (g \psi_{xx} + \psi_{ztt}) = 0.$$

Da das  $\rho(x, z, 0)$  bzw.  $\rho(0, z, t)$ , wie oben erwähnt, dem  $\bar{\rho}(x, z)$  der Störungsrechnung entspricht, ergeben sich hier dieselben Resultate wie die der linearen Theorie:  $\bar{\rho}$  darf nur von  $z$  abhängen, und (31) bzw. (33) ist die bekannte Wellengleichung interner Wellen infinitesimaler Amplitude (vgl. z. B. bei W. KRAUSS (1965)).

Damit ist der Zusammenhang der Systeme (23), (24) bzw. (26), (27) mit den bisher bekannten Ergebnissen hergestellt.

Bisher ist es nicht gelungen, die Gleichungssysteme in voller Allgemeinheit zu lösen. Wesentliche Fortschritte sind jedoch möglich, wenn man sich auf den Spezialfall von Wellen, die mit einer konstanten Phasengeschwindigkeit  $c$  fortschreiten, beschränkt.

### III. Die Wellengleichung für fortschreitende interne Wellen

Zur Behandlung interner Wellen, die mit einer konstanten Phasengeschwindigkeit  $c$  fortschreiten, wird eine neue unabhängige Variable  $s$  gemäß

$$(34) \quad s = x - ct$$

eingeführt. Dadurch werden (14) und (15) zu

$$(35) \quad \alpha f_s + \beta f_z = -\gamma$$

und

$$(36) \quad (\psi_z - c) f_s - \psi_s f_z = 0$$

mit

$$(37) \quad \alpha = -c \psi_{ss} + J(\psi_s, \psi) + g,$$

$$(38) \quad \beta = -c \psi_{zs} + J(\psi_z, \psi)$$

und

$$(39) \quad \gamma = -c \Delta \psi_s + J(\Delta \psi, \psi).$$

Statt (16) erhält man als eindeutige Lösung von (35), (36)

$$(40) \quad f_s = \frac{\gamma}{\delta + \beta c} \psi_s$$

$$(41) \quad f_z = \frac{\gamma}{\delta + \beta c} (\psi_z - c)$$

mit

$$(42) \quad \delta = -\alpha \psi_s - \beta \psi_z.$$

Gibt man  $\rho(s=0, z)$  vor, so erhält man aus (40 und (41)

$$(43) \quad f(s, z) = f(0, z) + \int_0^s \frac{\gamma}{\delta + \beta c} \psi_s ds$$

und

$$(44) \quad \Gamma + \int_0^s \left[ \frac{\gamma \psi_s}{\delta + \beta c} \right]_z ds - \frac{\gamma (\psi_z - c)}{\delta + \beta c} = 0$$

mit

$$(45) \quad \Gamma = \frac{\rho_z(0, z)}{\rho(0, z)}.$$

Statt des Gleichungspaares (23), (24) bzw. (26), (27) hat man also im Falle fortschreitender interner Wellen nur eine einzige Wellengleichung, nämlich (44). (44) enthält als linearen Anteil

$$(46) \quad \Delta \psi_s + \Gamma \psi_{zs} + \frac{g \Gamma}{c^2} \psi_s = 0.$$

(46) hat für  $\Gamma = \Gamma_0 = \text{const.}$  die periodischen Lösungen

$$(47) \quad \psi_n(s, z) = \psi_{0n} e^{-\frac{\Gamma_0}{2} z} \sin \frac{n \pi}{H} z \sin \kappa_n s$$

mit

$$(48) \quad \kappa_n^2 = \frac{g \Gamma_0}{c_n^2} - \frac{n^2 \pi^2}{H^2} - \frac{\Gamma_0^2}{4}.$$

#### IV. Eine andere Formulierung der Wellengleichung

Zur weiteren Behandlung der Wellengleichung wird eine modifizierte Stromfunktion  $\varphi$  gemäß

$$(49) \quad \varphi(s, z) = \psi(s, z) - c z$$

eingeführt. Dadurch wird

$$(50) \quad \alpha = J(\varphi_s, \varphi) + g$$

$$(51) \quad \beta = J(\varphi_z, \varphi)$$

$$(52) \quad \gamma = J(\Delta \varphi, \varphi)$$

und

$$(53) \quad \delta + \beta c = -g \varphi_s - \frac{1}{2} J(\varphi_s^2 + \varphi_z^2, \varphi).$$

Die Wellengleichung wird also formal einfacher. Ein weit wesentlicherer Vorteil ergibt sich aber darüber hinaus: Durch (49) wird (36) zu

$$(54) \quad J(\rho, \varphi) = 0,$$

woraus

$$(55) \quad \rho = \rho(\varphi)$$

folgt. Setzt man das in (35) ein, so erhält man

$$(56) \quad (\delta + \beta c) \frac{d\rho}{d\varphi} - \gamma \rho = 0.$$

Die Gleichungssysteme (43), (44) und (55), (56) sind beide dem System (35), (36) äquivalent. Also sind (43), (44) und (55), (56) äquivalent, und man kann die Behandlung fortschreitender interner Wellen statt mit (43), (44) nun mit dem bedeutend einfacheren System (55), (56) durchführen, wobei (56) nunmehr die Wellengleichung ist.

#### V. Ein erstes Integral der Wellengleichung

Mit (52), (53) wird (56) zu

$$(57) \quad \left[ g \varphi_s + \frac{1}{2} J(\varphi_s^2 + \varphi_z^2, \varphi) \right] \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} + J(\Delta \varphi, \varphi) = 0.$$

Das läßt sich auch darstellen als

$$(58) \quad J \left\{ \Delta \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} \left[ \frac{1}{2} (\varphi_s^2 + \varphi_z^2) - g z \right], \varphi \right\} = 0.$$

Damit gewinnt man ein erstes Integral der Wellengleichung (56):

$$(59) \quad \Delta \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} \left[ \frac{1}{2} (\varphi_s^2 + \varphi_z^2) - g z \right] = F(\varphi),$$

wobei  $F(\varphi)$  eine willkürliche Funktion ist. Setzt man in (59)  $c = 0$  (d. h. ersetzt man  $\varphi$  durch  $\psi$ ), so ergibt sich eine Gleichung, die R. R. LONG (1953) für stationäre Bewegungen, insbesondere Leewellen, abgeleitet hat. Mit Hilfe der Transformation

$$(60) \quad \varphi' = \int \sqrt{\rho} \, d\varphi$$

geht (59) in

$$(61) \quad \Delta \varphi' - g z \frac{d\rho}{d\varphi'} = G(\varphi')$$

über (C. S. YIH, 1958). Die willkürliche Funktion  $G(\varphi')$  kann z. B. durch Vorgabe der Funktionen  $\varphi'$ ,  $\varphi'_s$ ,  $\varphi'_{ss}$  für  $s = 0$  festgelegt werden. Die Gleichungen (59) und (61) kann man auch als Variationsprobleme formulieren. (59) und (61) sind Eulersche Gleichungen zu den Funktionalen

$$(62) \quad I(\varphi) = \int_0^H \int_0^L \left\{ \frac{\rho}{2} (\varphi_s^2 + \varphi_z^2) + g \rho z + \int \rho F d\varphi \right\} ds dz$$

(R. R. LONG, 1953)

bzw.

$$(63) \quad I(\varphi') = \int_0^H \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} (\varphi'_s{}^2 + \varphi'_z{}^2) + g \rho z + \int G(\varphi') d\varphi' \right\} ds dz$$

(L willkürlich).

## VI. Einige exakte Lösungen der Wellengleichung

In dieser Arbeit interessieren nur Lösungen der Wellengleichung, die die Randbedingungen

$$(64) \quad \varphi'_s = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und } z = H$$

erfüllen, die ferner in  $s$  periodisch sind und die zu einer stabilen mittleren Dichte gehören.

Im Falle, daß  $\frac{d\rho}{d\varphi'}$  und  $G(\varphi')$  lineare Funktionen von  $\varphi'$  sind, kann man Lösungen von (61) auffinden. Diese Lösungen wurden (für  $c = 0$ ) von C. S. YIH (1960) dargestellt. Sie werden dort insbesondere zum Studium von Leewellen benutzt (unperiodische Bewegungen stromaufwärts).

Die hier interessierenden periodischen Lösungen werden zwar erwähnt, aber nicht im Hinblick auf fortschreitende interne Wellen ausführlich diskutiert. Daher soll hier ein Lösungstyp in Bezug auf interne Wellen diskutiert werden.

Es sei

$$(65) \quad \frac{d\rho}{d\varphi'} = \varepsilon = \text{const.}$$

und

$$(66) \quad G(\varphi') = \eta \varphi' \text{ mit } \eta = \text{const.}$$

Damit wird (61) zu

$$(67) \quad \Delta \varphi' - \eta \varphi' = g \varepsilon z.$$

Durch Separation des homogenen Teiles von (67) findet man die in  $s$  periodischen und die Randbedingungen (64) befriedigenden Lösungen

$$(68) \quad \varphi'_n = -\frac{g \varepsilon_n}{\eta_n} z + C_{1n} \sin \sqrt{-\eta_n} z + C_{2n} \cos \sqrt{-\eta_n} z \\ + (A_n \sin \varkappa_n s + B_n \cos \varkappa_n s) \sin n \frac{\pi}{H} z$$

mit

$$(69) \quad \varkappa_n^2 = -\eta_n - \frac{n^2 \pi^2}{H^2}.$$

Für die weitere Diskussion wollen wir uns auf den Fall

$$(70) \quad C_{1n} = C_{2n} = B_n = 0$$

beschränken.

Da gemäß (69) verschiedene  $\varkappa_n$  möglich sind, gehört entsprechend der Beziehung

$$(71) \quad c_n = \frac{\omega}{\varkappa_n}$$

bei fester Frequenz  $\omega$  zu jeder Lösung  $\varphi'_n$  ein verschiedenes  $c_n$ . Eine additive Überlagerung von Lösungen  $\varphi'_n$ , wie sie bei stationären Wellen (C. S. YIH, 1960) möglich ist, führt hier zu keiner internen Welle mehr, die mit konstanter Phasengeschwindigkeit  $c$  fortschreitet, da die additiven Anteile verschiedene Geschwindigkeiten haben. Jedes  $\varphi'_n$  wird daher als eine Einzellösung angesehen.

Aus (65) und (68) folgt mit (70)

$$(72) \quad \rho_n = \rho_o + \varepsilon_n \left[ -\frac{g \varepsilon_n}{\eta_n} z + A_n \sin \varkappa_n s \sin n \frac{\pi}{H} z \right].$$

$$\text{Für die mittlere Dichte } \bar{\rho}(z) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\lambda_n} \rho_n(s, z) ds \quad \left( \lambda_n = \frac{2\pi}{\varkappa_n} \right)$$

hat man damit

$$(73) \quad \bar{\rho}(z) = \rho_o + \bar{\rho}_z z$$

mit

$$(74) \quad -\frac{g \varepsilon_n^2}{\eta_n} = \bar{\rho}_z = \text{const.} \quad (\text{unabhängig von } n).$$

Daraus erhält man

$$(75) \quad \eta_n = -\frac{g \varepsilon_n^2}{\bar{\rho}_z}.$$

Bezeichnet man noch die Amplitude der Dichtestörung mit

$$(76) \quad \rho'_n = \varepsilon_n A_n,$$

so erhält man für willkürliche  $n$ ,  $\varepsilon_n$ ,  $\rho'_n$  und  $\bar{\rho}_z$  exakte Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen:

$$(77) \quad \rho_n(x, z, t) = \bar{\rho}(z) + \rho'_n \sin n \frac{\pi}{H} z \sin \kappa_n (x - c_n t)$$

$$(78) \quad u_n(x, z, t) = c_n + \frac{n \frac{\pi}{H} \frac{\rho'_n}{\varepsilon_n} \cos n \frac{\pi}{H} z \sin \kappa_n (x - c_n t) + \frac{\bar{\rho}_z}{\varepsilon_n}}{\sqrt{\rho_n}}$$

$$(79) \quad w_n(x, z, t) = - \frac{\frac{\kappa_n}{\varepsilon_n} \rho'_n \sin n \frac{\pi}{H} z \cos \kappa_n (x - c_n t)}{\sqrt{\rho_n}}$$

mit

$$(80) \quad \kappa_n^2 = \frac{g \varepsilon_n^2}{\bar{\rho}_z} - \frac{n^2 \pi^2}{H^2} .$$

## VII. Diskussion der Lösungen

Die weitere Diskussion wird ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit auf den Fall  $n = 1$  beschränkt. (Der Index  $n = 1$  wird dann weggelassen.)

a) Das Wellenprofil

Die Isopykne  $\rho = \rho(0, z_0)$  habe die Tiefenlage  $z = z(s, z_0)$ ; dann gilt gemäß (77)

$$(81) \quad \rho(0, z_0) = \bar{\rho}[z(s, z_0)] + \rho' \sin \kappa s \sin \frac{\pi}{H} z(s, z_0).$$

Die Auslenkung  $\zeta(s, z_0)$  der Flüssigkeitsteilchen (nach oben positiv gerechnet) aus ihrer Ruhelage  $z = z_0$  wird gegeben durch

$$(82) \quad \zeta(s, z_0) = z_0 - z(s, z_0).$$

Aus (82) und (81) folgt

$$(83) \quad \zeta(s, z_0) = \frac{\rho'}{\bar{\rho}_z} \sin \kappa s \sin \left\{ \frac{\pi}{H} [z_0 - \zeta(s, z_0)] \right\} .$$

Die Extrema von  $\zeta(s, z)$  haben dieselben Abszissen wie die Extrema von  $\sin \kappa s$ .

Damit erhält man das Resultat: Die Wellenlänge interner Wellen ist (jedenfalls in dem betrachteten Beispiel) von der Wellenhöhe unabhängig.

Aus (77) erhält man ferner als Bedingung dafür, daß die Auslenkung der Flüssigkeitsteilchen nicht über die Ränder herausführt, die Ungleichung  $\frac{\rho'}{\bar{\rho}_z} \leq \frac{H}{\pi}$ . Führt man  $\Delta \bar{\rho} = \bar{\rho}(H) - \rho_0$  ein, so lautet die Bedingung

$$(84) \quad \rho' \leq \frac{\Delta \bar{\rho}}{\pi} = 0,318 \Delta \bar{\rho} .$$

Legende zu der nebenstehenden Abbildung (Tafel 1)

Abb. 1: Interne Wellen großer Amplitude (Darstellung der Isopyknen). Es bedeuten  $\lambda$  die Wellenlänge und  $H$  die Wassertiefe. Links die mittlere Dichte mit willkürlichem  $\Delta \bar{\rho}$ .

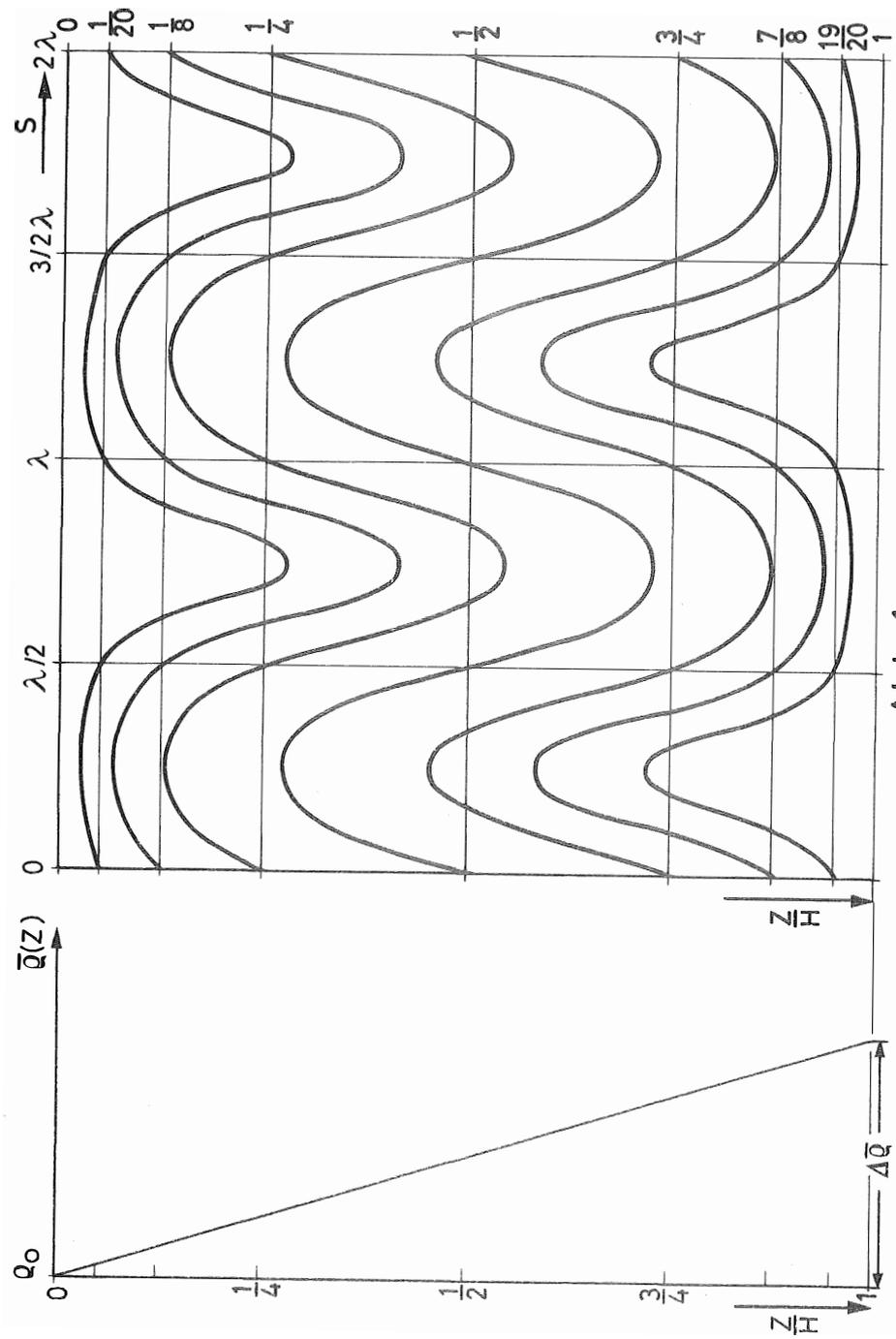
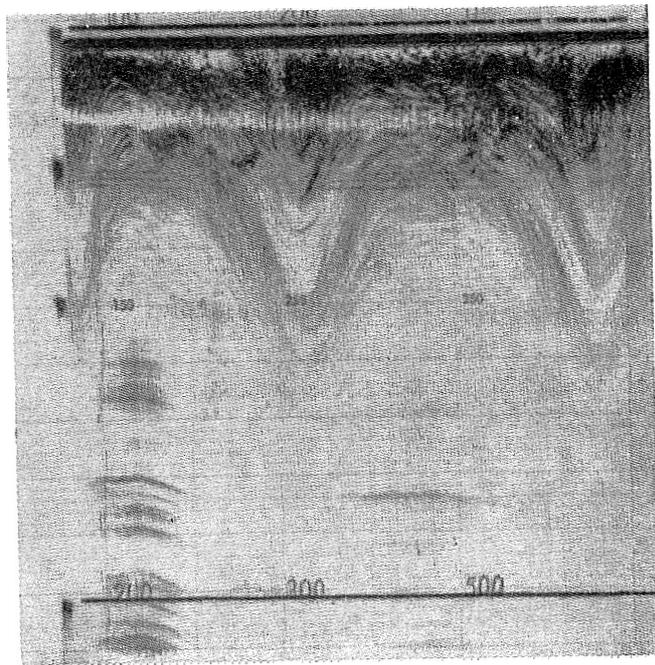
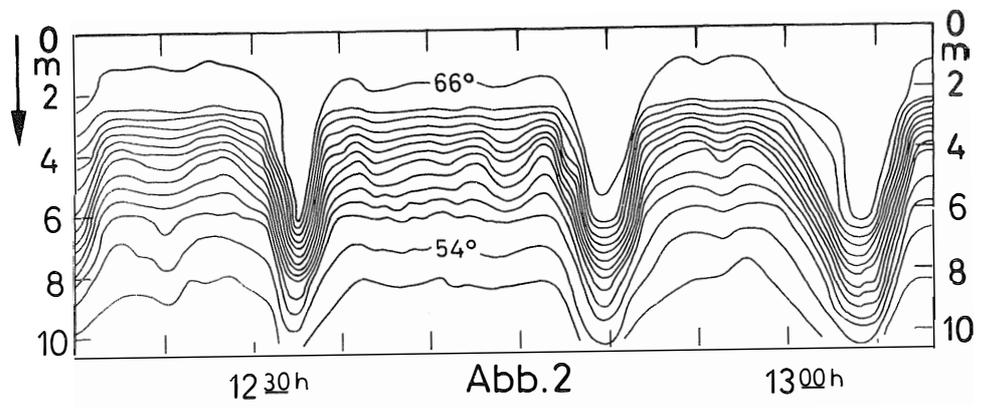


Abb.1

Tafel 1 (zu L. Magaard)



Tafel 2 (zu L. Magaard)

Abb. 1 gibt die Verteilung der Auslenkungen  $\zeta(s, z_0)$  als Lösung der impliziten transzendenten Gleichung (83) für den Fall  $\rho' = 0,3 \Delta \bar{\rho}$  an, zeigt also einen Fall, in dem die größtmöglichen Amplituden nahezu angenommen werden.

Es sei besonders hervorgehoben, daß die Größe von  $\Delta \bar{\rho}$  dabei willkürlich ist, d. h. Verzerrungen der Wellen, wie Abb. 1 sie zeigt, sind unabhängig von der Stärke der Schichtung und können daher insbesondere auch in Medien mit schwacher Schichtung, z. B. im Meere durchaus auftreten.

Zahlreiche Beobachtungen oberflächennaher interner Wellen großer Amplitude im Meere zeigen die in Abb. 1 dargestellten breiten Wellenkämme und spitzen Wellentäler. Zwei Beispiele solcher Beobachtungen (V. VALDEZ (1960) und E. C. LAFOND (1962)) sind in Abb. 2 und Abb. 3 wiedergegeben.

Theoretische Untersuchungen von W. KRAUSS (1961) haben ferner für kurze fortschreitende interne Grenzflächenwellen dieselbe Struktur des Wellenprofils ergeben.

#### b) Die Wellenlänge

Die Wellenlänge wird durch die charakteristische Gleichung (80) gegeben. Zur weiteren Untersuchung wird die Konstante  $\epsilon$  mit dem mittleren Strom  $\bar{u}(z) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda u(s, z) ds$  in Verbindung gebracht.

Es ist

$$(85) \quad \bar{u}(z) \approx c + \frac{1}{\epsilon} \frac{\bar{\rho}_z}{\sqrt{\bar{\rho}(z)}} .$$

Zum Vergleich mit der linearen Theorie, in der man mit verschwindendem  $\bar{u}(z)$  arbeiten kann, wird  $\epsilon$  nun so gewählt, daß  $\bar{u}(z)$  möglichst klein wird. Für schwache Schichtung erhält man dann

$$(86) \quad \epsilon \approx - \frac{\bar{\rho}_z}{c \sqrt{\rho_0}} .$$

Setzt man das in (80) ein, so ergibt sich

$$(87) \quad \kappa^2 = \frac{g \bar{\rho}_z}{c^2 \rho_0} - \frac{\pi^2}{H^2} .$$

Dieses Resultat stimmt für schwache Schichtung näherungsweise mit (48) (für  $n = 1$ ) überein. Da, wie gezeigt, die Wellenlänge nicht von der Wellenhöhe abhängt, ist natürlich plausibel, daß man hier die Wellenlänge für interne Wellen infinitesimaler Amplitude erhält.

#### Legenden zu den nebenstehenden Abbildungen (Tafel 2)

Abb. 2: Ein Beobachtungsbeispiel oberflächennaher interner Wellen (Darstellung der Isothermen, Temperaturen in ° Fahrenheit) (nach E. C. LAFOND, 1962).

Abb. 3: Interne Wellen in einem Echogramm (nach V. VALDEZ, 1960). Position:  $\varphi = 8^\circ 43' 4''$  S,  $\lambda = 13^\circ 4' 5''$  E, Wassertiefe 110 m. Die Wellenhöhe beträgt rund 30 m.

#### Literaturverzeichnis

KRAUSS, W. (1961): Zur trochoidähnlichen Form der kurzen fortschreitenden internen Grenzflächenwellen. Kieler Meeresforsch. 17, 159—162. — KRAUSS, W. (1965): Methoden und Ergebnisse der Theoretischen Ozeanographie, Bd. II: Interne Wellen. Berlin. — LAFOND, E. C. (1962): Internal waves, Part I. The Sea, Vol. 1, 731—751. — LONG, R. R. (1953): Some aspects of the flow of stratified fluids. I. A theoretical investigation. Tellus 5, 42—57. — VALDEZ, V. (1960): Internal waves on an echo sounder record. Deep Sea Research 7, 148. — YIH, C. S. (1958): On the flow of a stratified fluid. Proc. Third Natl. Congr. Appl. Mechanics, 857—861. — YIH, C. S. (1960): Exact solutions for steady two-dimensional flow of a stratified fluid. J. Fluid Mech. 9, 161—174.