

# Copyright ©

---

Es gilt deutsches Urheberrecht.

Die Schrift darf zum eigenen Gebrauch kostenfrei heruntergeladen, konsumiert, gespeichert oder ausgedruckt, aber nicht im Internet bereitgestellt oder an Außenstehende weitergegeben werden ohne die schriftliche Einwilligung des Urheberrechtinhabers. Es ist nicht gestattet, Kopien oder gedruckte Fassungen der freien Onlineversion zu veräußern.

German copyright law applies.

The work or content may be downloaded, consumed, stored or printed for your own use but it may not be distributed via the internet or passed on to external parties without the formal permission of the copyright holders. It is prohibited to take money for copies or printed versions of the free online version.

## Das Spektrum der internen Bewegungsvorgänge der Ostsee im Periodenbereich von 0,5–7 Stunden

VON WOLFGANG KRAUSS

**Zusammenfassung:** Theorie und Beobachtung ergeben, daß in gezeitenfreien exponentiell geschichteten Meeren die Spektren der Horizontalgeschwindigkeit ( $u, v$ ) durch eine Gesetzmäßigkeit gemäß (12), (13), diejenigen der Temperatur gemäß (19) gegeben sind.

**Spectra of internal oscillations of the Baltic Sea for the period range from 0,5 to 7 hours (Summary):** From theory we get that internal waves due to air pressure changes are given by eq. (3), (4) and (16). From these we get the formulas (12), (13) and (19) as first approximations for the amplitude spectra of  $u, v$  and  $T$ . Figs. 2–18 show 150 spectra observed in the Baltic during 1961 to 1964 in comparison to theory (dashed lines).

### 1. Theorie der Spektren $U(\omega_n)$ , $V(\omega_n)$ und $T(\omega_n)$

Aus der Theorie der internen Wellen ist bekannt, daß Luftdruckschwankungen weit stärker als Schwankungen des Windfeldes interne Wellen erregen (W. KRAUSS, 1966, S. 103ff.). Man kann daher erwarten, daß in einem gezeitenfreien Meer das Spektrum vorwiegend durch Luftdruckschwankungen bedingt ist.

Entwickelt man das Luftdruckfeld  $P_0(x, y, t)$  in eine dreidimensionale Fourier-Reihe,

$$(1) \quad P_0(x, y, t) = \sum_{l, m, n = -\infty}^{+\infty} P_{0, lmn} e^{i(\kappa_l x + \eta_m y + \omega_n t)},$$

so erzeugt jede Partialwelle  $P_{0, lmn} e^{i(\kappa_l x + \eta_m y + \omega_n t)}$  in einem exponentiell geschichteten rotierenden Meer konstanter Tiefe  $H$  eine interne Welle der Ordnung  $r$ , falls mit einer Kombination von  $\kappa_l, \eta_m, \omega_n$  die charakteristische Gleichung

$$(2) \quad \frac{g \Gamma_0 - \omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2} (\kappa_l^2 + \eta_m^2) - \frac{\Gamma_0^2}{4} = \frac{r^2 \pi^2}{H^2}$$

erfüllt werden kann  $\left( \Gamma_0 = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} = \text{const}, f \text{ Coriolisparameter} \right)$ .

---

Legende zu der nebenstehenden Abbildung (Tafel 1)

Abb. 1: Lage der Stationen 1–9 in Tabelle 2

---

Legende zu den nebenstehenden Abbildungen (Tafel 2)

Abb. 2 u. 3: Amplitudenspektren der Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  auf den Positionen Arkona 1961, Mast Süd und Mast West ( $u_7$  = Spektrum der Geschwindigkeitskomponente  $u$  in 7 m Tiefe).

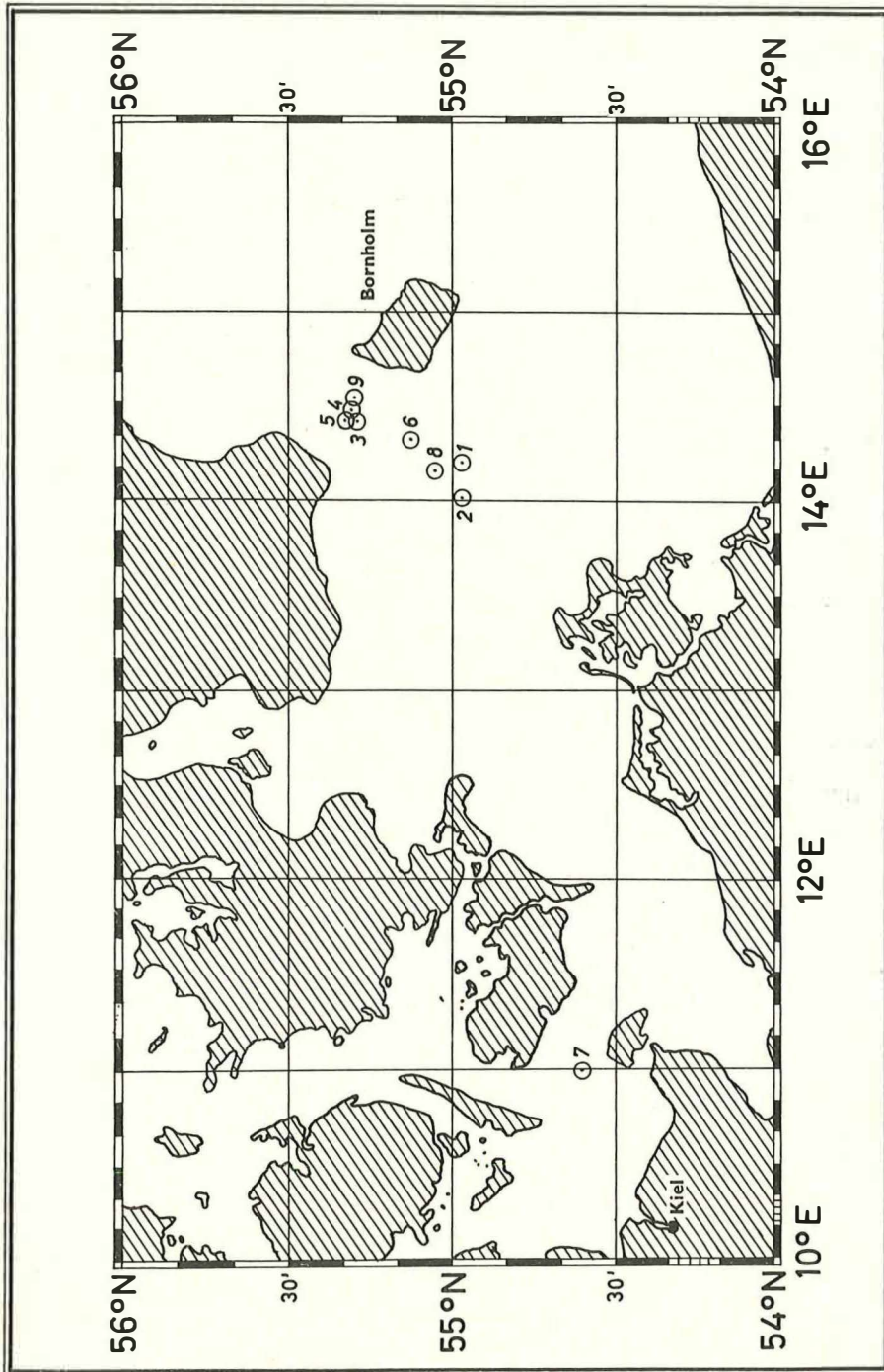


Abb.1

Tafel 1 (zu W. Krauß)

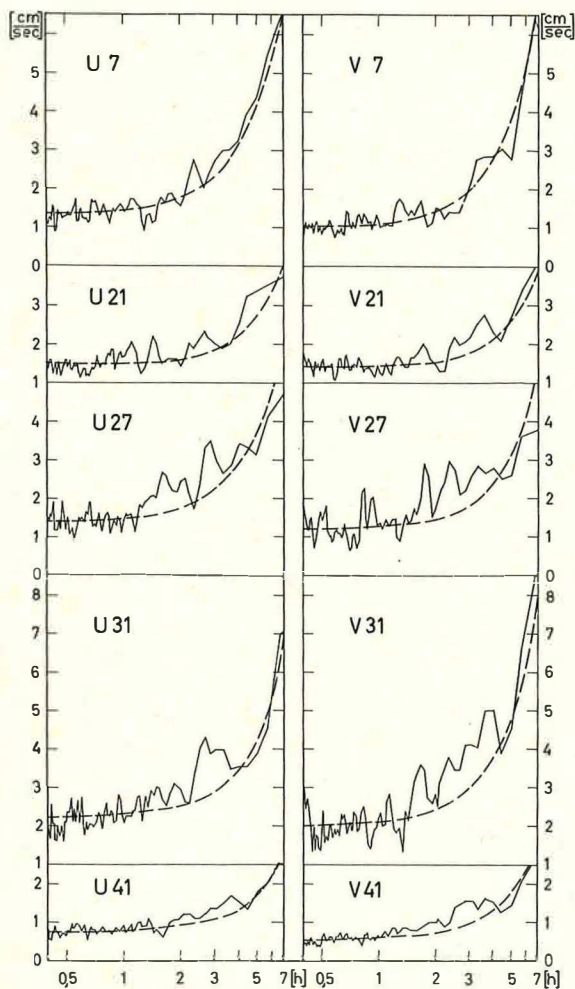


Abb. 2 Arkona 1961 Mast Süd

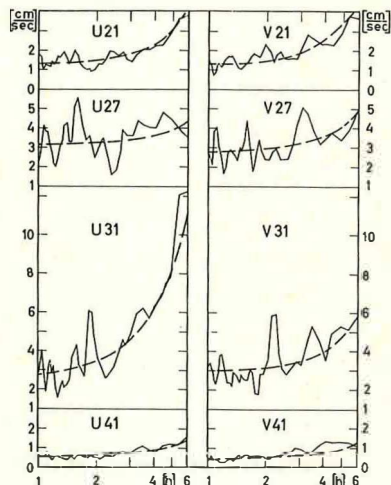
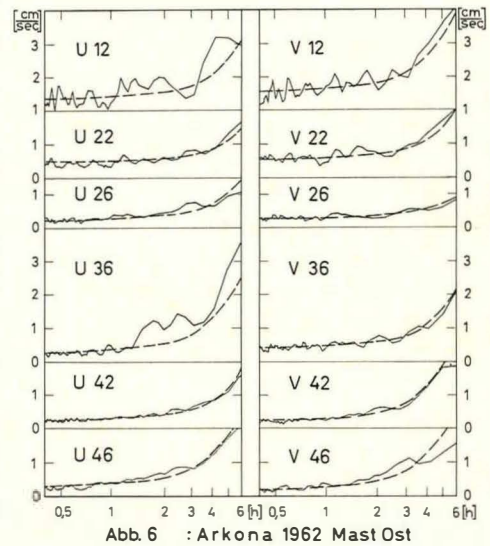
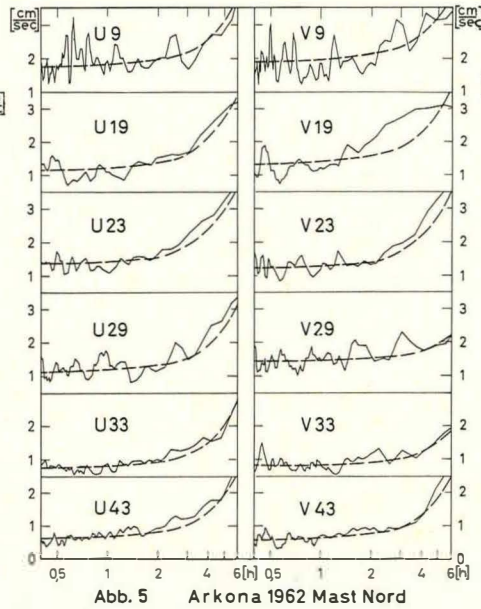
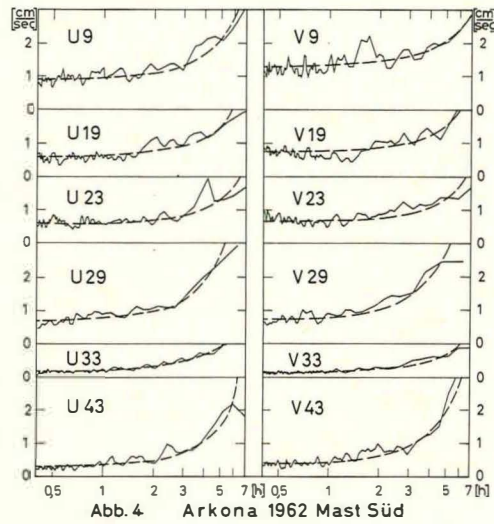
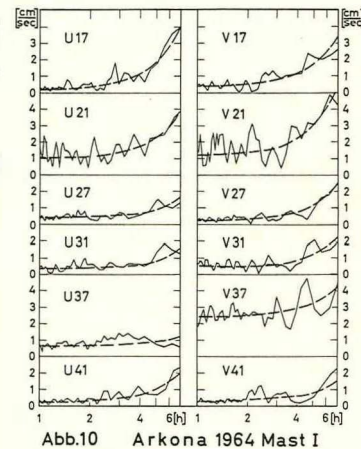
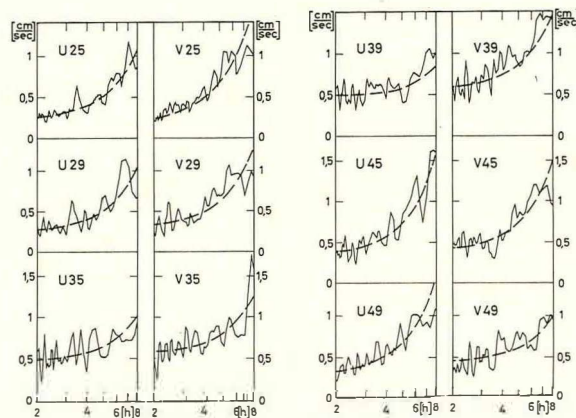
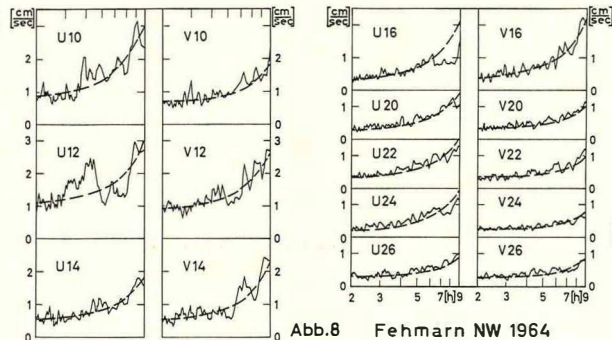
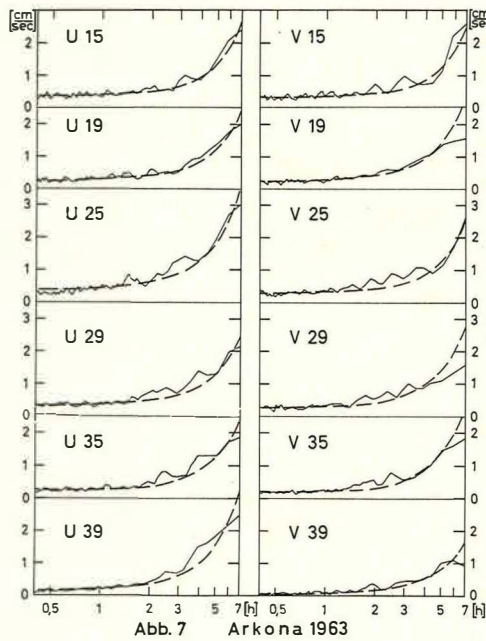


Abb. 3 Arkona 1961 Mast West

Tafel 3 (zu W. Krauß)







Die Horizontalgeschwindigkeiten  $u(x, y, z, t)$  und  $v(x, y, z, t)$  solcher Wellen sind durch

$$(3) \quad u(x, y, z, t) = \sum_{l, m, n = -\infty}^{+\infty} \frac{(\omega_n \kappa_l + i \eta_m f) P_{0, lmn}}{\omega_n^2 - f^2} \tilde{f}(z) e^{i(\kappa_l x + \eta_m y + \omega_n t)}$$

$$(4) \quad v(x, y, z, t) = \sum_{l, m, n = -\infty}^{+\infty} \frac{(\omega_n \eta_m - i \kappa_l f) P_{0, lmn}}{\omega_n^2 - f^2} \tilde{f}(z) e^{i(\kappa_l x + \eta_m y + \omega_n t)}$$

gegeben (W. KRAUSS, 1966, S. 106), worin

$$(5) \quad \tilde{f}(z) = \frac{e^{-\frac{\Gamma_0}{2} z}}{2} \left\{ 2 \cos \sqrt{\frac{g \Gamma_0 \omega^2}{\omega_n^2 - f^2} (\kappa_l^2 + \eta_m^2) - \frac{\Gamma_0^2}{4}} z - \frac{\Gamma_0 \sin \left( \sqrt{\frac{g \Gamma_0 - \omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2} (\kappa_l^2 + \eta_m^2) - \frac{\Gamma_0^2}{4}} z \right)}{\sqrt{\frac{g \Gamma_0 - \omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2} (\kappa_l^2 + \eta_m^2) - \frac{\Gamma_0^2}{4}}} \right\}$$

bedeutet.

Durch (3) und (4) ist das Amplitudenspektrum als Funktion der Frequenz  $\omega_n$  und der Wellenzahlen  $\kappa_l$  und  $\eta_m$  für jede Tiefe festgelegt, wenn man das Spektrum  $P_{0, lmn}$  des Luftdruckfeldes kennt. Bisher sind keine mehrdimensionalen Analysen des Luftdruckfeldes  $P_0(x, y, t)$  vorhanden. Die Annahme liegt jedoch nahe, daß man für hinreichend große  $\kappa_l, \eta_m, \omega_n$  in erster Näherung  $P_{0, lmn} = \text{const}$  annehmen kann.

Die Realteile von (3) und (4) sind in der Tiefe  $z_0$  durch

$$(6) \quad \text{Re} \{ u(x, y, z_0, t) \} = \sum_{l, m, n = -\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\omega_n^2 \kappa_l^2 + \eta_m^2 f^2} P_{0, lmn} \tilde{f}(z_0)}{\omega_n^2 - f^2} \cos \left[ \kappa_l x + \eta_m y + \omega_n t - \text{arctg} \left( -\frac{\eta_m f}{\omega_n \kappa_l} \right) \right]$$

$$(7) \quad \text{Re} \{ v(x, y, z_0, t) \} = \sum_{l, m, n = -\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\omega_n^2 \eta_m^2 + \kappa_l^2 f^2} P_{0, lmn} \tilde{f}(z_0)}{\omega_n^2 - f^2} \cos \left[ \kappa_l x + \eta_m y + \omega_n t - \text{arctg} \left( -\frac{\kappa_l f}{\eta_m \omega_n} \right) \right]$$

gegeben.

Legende zu den nebenstehenden Abbildungen (Tafel 3)

Abb. 4 bis 6: Amplitudenspektren der Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  auf den Positionen Arkona 1962, Mast Süd, Nord und Ost.

Legende zu den nebenstehenden Abbildungen (Tafel 4)

Abb. 7 bis 10: Amplitudenspektren der Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  auf den Positionen Arkona 1963, Fehmarn NW 1964, Arkona 1964, Mast I und II.

Wegen  $P_{o, \text{lmn}} \tilde{f}(z_o) = \text{const}$  sind die Amplitudenspektren für  $u$  und  $v$  durch

$$(8) \quad U(\omega_n, \kappa_1, \eta_m) \sim \sqrt{\frac{\omega_n^2 \kappa_1^2 + \eta_m^2 f^2}{\omega_n^2 - f^2}}$$

$$(9) \quad V(\omega_n, \kappa_1, \eta_m) \sim \sqrt{\frac{\omega_n^2 \eta_m^2 + \kappa_1^2 f^2}{\omega_n^2 - f^2}}$$

bestimmt.

Im Bereich  $\omega^2 \gg f^2$  und mit  $\kappa_1 \approx \eta_m$  kann man

$$\sqrt{\omega_n^2 \kappa_1^2 + \eta_m^2 f^2} = \omega_n \kappa_1 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\eta_m^2 f^2}{\kappa_1^2 \omega_n^2} + \dots \right)$$

$$\sqrt{\omega_n^2 \eta_m^2 + \kappa_1^2 f^2} = \omega_n \eta_m \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_1^2 f^2}{\eta_m^2 \omega_n^2} + \dots \right)$$

verwenden; die Spektren für  $U$  und  $V$  sind daher in erster Näherung:

$$(10) \quad U(\omega_n, \kappa_1, \eta_m) \sim \frac{\omega_n \kappa_1}{\omega_n^2 - f^2}$$

$$(11) \quad V(\omega_n, \kappa_1, \eta_m) \sim \frac{\omega_n \eta_m}{\omega_n^2 - f^2}$$

Berücksichtigt man  $\kappa_{l,m,n} = \frac{\omega_n}{\sqrt{\kappa_1^2 + \eta_m^2}}$  in der Form  $\kappa_1 \sim \omega_n, \eta_m \sim \omega_n$ , so erhält man schließlich das Endresultat

$$(12) \quad U(\omega_n) \sim \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2}$$

$$(13) \quad V(\omega_n) \sim \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2}$$

Die Schwankungen der Temperatur ergeben sich aus der Forderung

$$(14) \quad \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

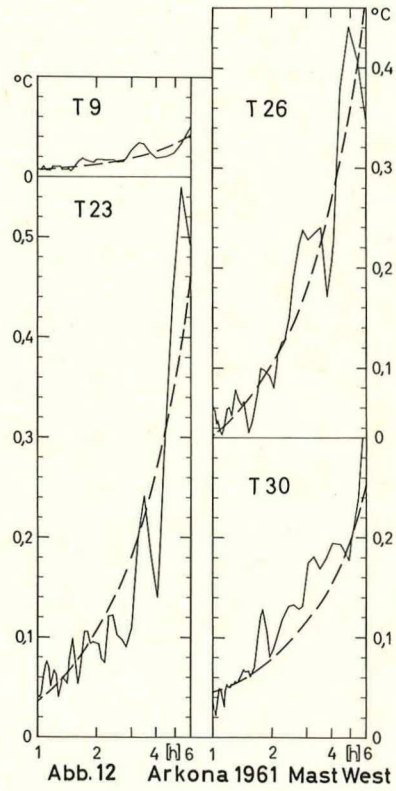
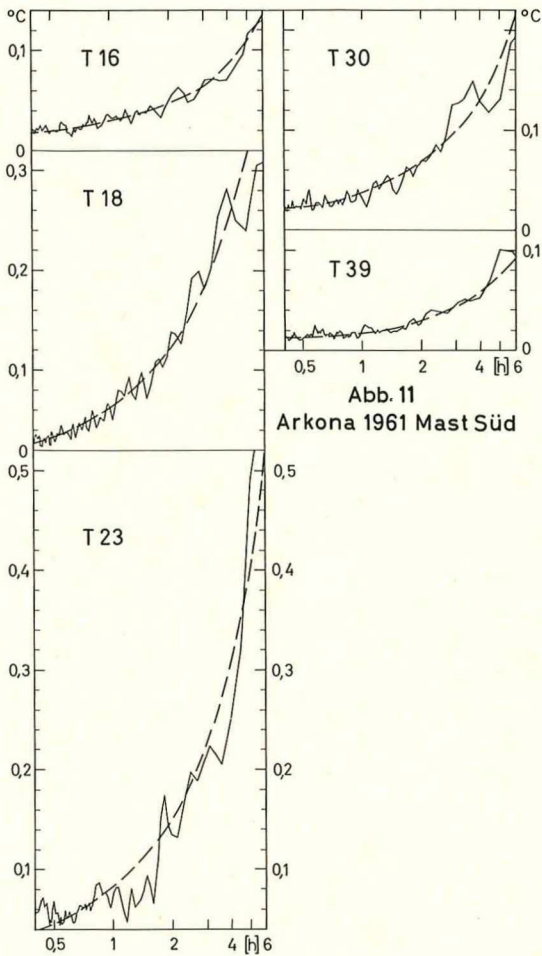
Legende zu den nebenstehenden Abbildungen (Tafel 5)

Abb. 11 u. 12: Amplitudenspektren der Temperaturschwankungen  $T$  auf den Positionen Arkona 1961, Mast Süd und West ( $T_{16}$  = Spektrum der Temperaturschwankungen in 16 m Tiefe).

Legende zu den nebenstehenden Abbildungen (Tafel 6)

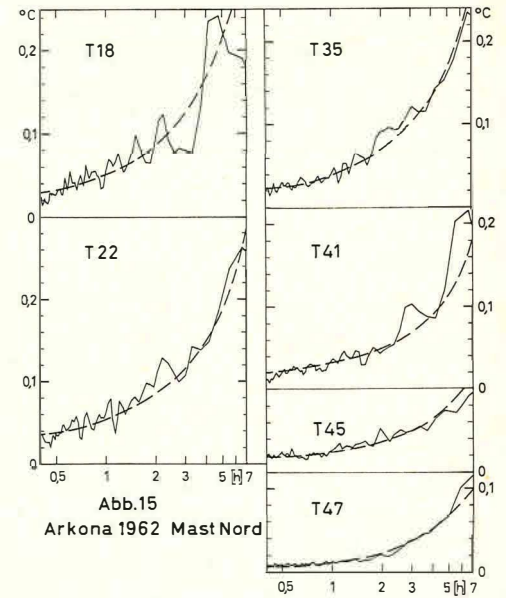
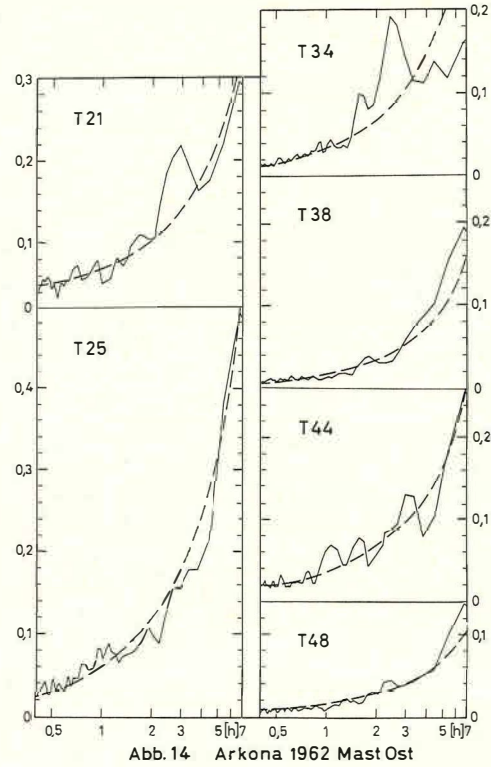
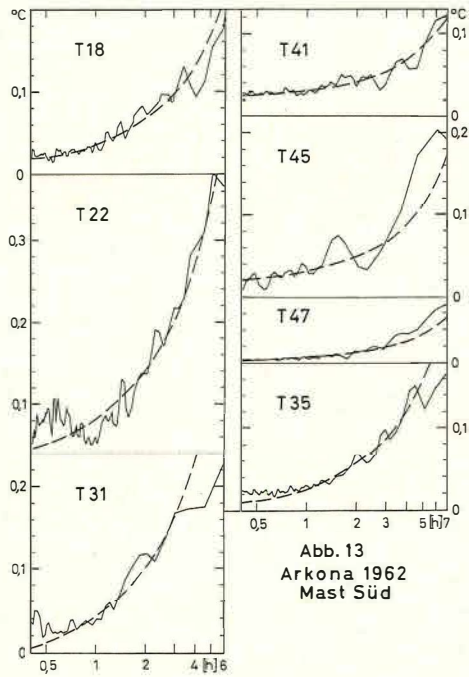
Abb. 13 bis 15: Amplitudenspektren der Temperaturschwankungen  $T$  auf den Positionen Arkona 1962, Mast Süd, Nord und Ost.





Tafel 5 (zu W. Krauß)

Tafel 6 (zu W. Krauß)



worin  $u, v$  gemäß (3), (4) und  $w$  gemäß

(16)

$$w(x, y, z, t) = \sum_{l, m, n = -\infty}^{+\infty} \frac{i \omega_n (\kappa_l^2 + \eta_m^2) P_{o, lmn}}{(\omega_n^2 - f^2) \sqrt{\frac{g \Gamma_o - \omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2} (\kappa_l^2 + \eta_m^2) - \frac{\Gamma_o^2}{4}}} g(z) e^{i(\kappa_l x + \eta_m y + \omega_n t)}$$

$$\text{mit } g(z) = e^{-\frac{\Gamma_o}{2} \sin \left\{ \sqrt{\frac{g \Gamma_o - \omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2} (\kappa_l^2 + \eta_m^2) - \frac{\Gamma_o^2}{4}} z \right\}}$$

gegeben sind (W. KRAUSS, 1966, S. 106).

Aus (16) folgt analog zu (6), (7)

$$(17) \operatorname{Re} \{W\} = - \sum_{l, m, n = -\infty}^{+\infty} \frac{\omega_n (\kappa_l^2 + \eta_m^2) P_{o, lmn} g(z_o)}{(\omega_n^2 - f^2) \sqrt{\frac{g \Gamma_o - \omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2} (\kappa_l^2 + \eta_m^2) - \frac{\Gamma_o^2}{4}}} \sin(\kappa_l x + \eta_m y + \omega_n t)$$

bzw. wegen  $g \Gamma_o \gg \omega_n^2$ ,  $\frac{g \Gamma_o}{\omega_n^2 - f^2} (\kappa_l^2 + \eta_m^2) \gg \frac{\Gamma_o^2}{4}$  und mit (2)

$$(18) \operatorname{Re} \{W\} \approx - \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \sum_{r = 1}^{\infty} \frac{\omega_n r \pi P_{o, lmn} g(z_o)}{g \Gamma_o H} \sin(\kappa_l x + \eta_m y + \omega_n t).$$

Aus (14) erhält man dann wegen  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \omega_n$  und  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$  sämtlich konstant für

eine Tiefe  $z_o$ , daß zwischen den Fourier-Amplituden  $T(\omega_n, \kappa_l, \eta_m)$  und  $U(\omega_n, \kappa_l, \eta_m)$  bzw.  $V(\omega_n, \kappa_l, \eta_m)$  die Relation

$$T(\omega_n, \kappa_l, \eta_m) \sim \frac{1}{\omega_n} \left\{ U(\omega_n, \kappa_l, \eta_m), V(\omega_n, \kappa_l, \eta_m), W(\omega_n, \kappa_l, \eta_m) \right\}$$

bestehen muß. Mit Hilfe von (12), (13) und (18) bedeutet dies

$$T(\omega_n) = a + b \frac{\omega_n}{\omega_n^2 - f^2},$$

so daß  $T(\omega_n)$  im Gegensatz zu  $U(\omega_n)$  und  $V(\omega_n)$  gemäß

$$(19) \quad \boxed{T(\omega_n) \sim \frac{\omega_n}{\omega_n^2 - f^2}}$$

verläuft. Voraussetzung hierfür ist  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \neq 0$  oder  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \neq 0$ , was bei einem breiten Spek-

trum der internen Wellen stets gegeben ist, weil die langperiodischen Wellen Neigungen der Isothermen bedingen, die für die kurzperiodischen Vorgänge als  $\bar{T}(x, t)$  gedeutet werden können.

Die Spektren (12), (13) unterscheiden sich von (19) beachtlich.

Wie Tabelle 1 zeigt, variiert  $\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - f^2}$  zwischen 1,00 und 1,88 im Bereich von 0,5—10 Stunden, d. h. es ändert sich um einen Faktor ca. 2. Demgegenüber verändert sich  $\frac{\omega_n}{\omega_n^2 - f^2}$  zwischen 0,029 und 1,078, d. h. um einen Faktor 37.

Tabelle 1

Verlauf der Funktionen  $\frac{\omega^2}{\omega^2 - f^2}$  und  $\frac{\omega}{\omega^2 - f^2}$  im Bereich  $0,5 \leq \tau \leq 10$  Std.  
( $f = 1,458 \cdot 10^{-4} \sin 55^\circ = 1,1944 \cdot 10^{-4}$ )

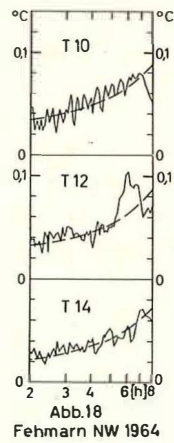
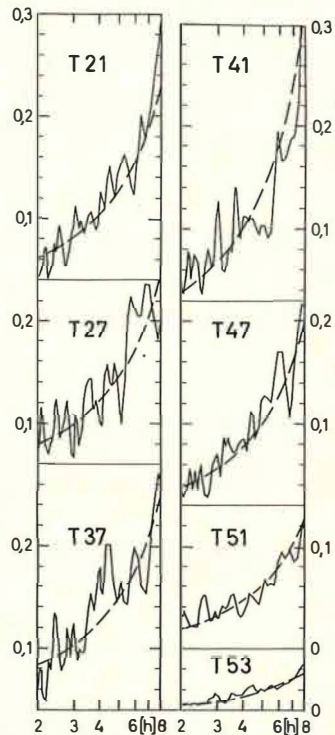
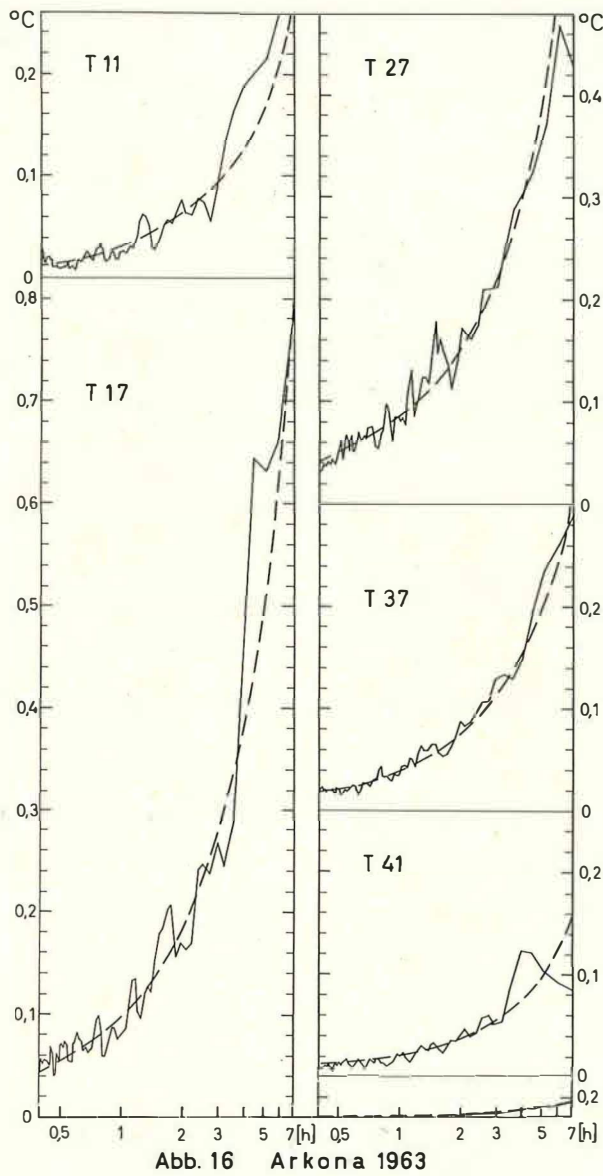
$\tau$ (Std)	$\omega$ (sec <sup>-1</sup> )	$\frac{\omega}{\omega^2 - f^2}$ (sec)	$\frac{\omega^2}{\omega^2 - f^2}$
10	$1,7453 \cdot 10^{-4}$	$1,0776 \cdot 10^{-4}$	1,8808
8	$2,1816 \cdot 10^{-4}$	0,6546	1,4281
6	$2,9088 \cdot 10^{-4}$	0,4135	1,2028
5	$3,4906 \cdot 10^{-4}$	0,3245	1,1327
4	$4,3633 \cdot 10^{-4}$	0,2477	1,0810
3	$5,8177 \cdot 10^{-4}$	0,1795	1,0440
2,5	$6,9813 \cdot 10^{-4}$	0,1476	1,0302
2	$8,7266 \cdot 10^{-4}$	0,1168	1,0191
1,5	$1,1635 \cdot 10^{-3}$	0,0869	.
1	$1,7453 \cdot 10^{-3}$	0,0576	.
0,5	$3,4906 \cdot 10^{-3}$	0,0287	1,0014

## 2. Beobachtete Spektren U ( $\omega_n$ ), V ( $\omega_n$ ) und T ( $\omega_n$ )

Mit Hilfe von Beobachtungsmasten (W. KRAUSS. 1966, S. 149) wurde in den Jahren 1961—1964 ein umfangreiches Material gewonnen. Davon wurden insgesamt ca. 141 750 Meßwerte zur Berechnung von Spektren verwendet. 93 460 Meßwerte entfallen auf die Geschwindigkeitskomponenten u und v, 48 290 auf Temperaturen. Tabelle 2 enthält Angaben über dieses Material; Abb. 1 zeigt die Positionen, auf denen das Material gewonnen wurde. 106 Spektren der Geschwindigkeitskomponenten sind in den Abbildungen 2—10, 43 Temperaturspektren in den Abbildungen 11—19 wiedergegeben. Die gestrichelte Kurve gibt das Gesetz  $\omega^2/(\omega^2 - f^2)$  bzw.  $\omega/(\omega^2 - f^2)$  wieder. Den Abbildungen ist zu entnehmen, daß die beobachteten Spektren im Gebiet der westlichen und mittleren Ostsee weitgehend den angegebenen Gesetzen gehorchen; die gemessenen Schwankungen u, v und T sind somit durch Luftdruckschwankungen interpretierbar.

### Legende zu den nebenstehenden Abbildungen (Tafel 7)

Abb. 16 bis 18: Amplitudenspektren der Temperaturschwankungen T auf den Positionen Arkona 1963, Arkona 1964, Mast II und Fehmarn NW 1964.



Tafel 7 (zu W. Krauß)



Tabelle 2  
Beobachtungsmaterial westliche und mittlere Ostsee 1961—1964

Lfd. Nr.	Bezeichnung	Position $\varphi$ (N) $\lambda$ (E)	Wassertiefe (m)	Meßwertdistanz	Meßdauer	Meßtiefen für u und $v_m$	Meßtiefen für $T_m$	Anzahl der Meßwerte je Meßgröße	Gesamtanzahl der Meßwerte für alle Tiefen
1	Arkona 1961, Mast Süd	55°00,7'; 14°10,0'	46	12 min	10. 8. 7 <sup>10</sup> bis 19. 8. 10 <sup>20</sup>	7, 21, 27, 31, 41	13, 16, 18, 23, 26, 30, 39	1 100	18 700
2	Mast West	55°09,0'; 13°59,5'	46	12 min	11. 8. 16 <sup>00</sup> bis 17. 8. 12 <sup>00</sup>	21, 27, 31, 41	9, 18, 23, 26, 30, 39	700	9 800
3	Arkona 1962, Mast Süd	55°19,5'; 14°22,2'	48	12 min	21. 8. 7 <sup>50</sup> bis 30. 8. 14 <sup>00</sup>	9, 19, 23, 29, 33, 43	18, 22, 31, 35, 41, 45, 47	1 110	21 090
4	Mast Ost	55°20,6'; 14°25,8'	51	12 min	21. 8. 15 <sup>30</sup> bis 27. 8. 12 <sup>30</sup>	12, 22, 26, 36, 42, 46	21, 25, 34, 38, 44, 48, 50	705	13 400
5	Mast Nord	55°21,5'; 14°23,0'	48	12 min	21. 8. 21 <sup>15</sup> bis 29. 8. 12 <sup>15</sup>	9, 19, 23, 29, 33, 43	18, 22, 31, 35, 41, 45, 47	915	17 400
6	Arkona 1963	55°09,6'; 14°17,2'	44	12 min	14. 8. 7 <sup>20</sup> bis 22. 8. 7 <sup>50</sup>	15, 19, 25, 29, 35, 39	11, 17, 27, 31, 37, 41, 43	962	18 280
7	Fehmarn 1964	54°36,8'; 10°57,8'	28	1 Std.	13. 4. 15 <sup>00</sup> bis 8. 6. 12 <sup>00</sup>	10, 12, 14, 16, 20, 22, 24, 26	10, 12, 14	1 340	25 460
8	Arkona 1964, Mast I	55°05,4'; 14°07,4'	46	30 min	31. 7. 5 <sup>00</sup> bis 2. 8. 8 <sup>00</sup>	17, 21, 27, 31, 37, 41	13, 19, 29, 33, 39, 43, 45	102	1 940
9	Arkona 1964, Mast II	55°20,2'; 14°29,0'	54	30 min	31. 7. 12 <sup>00</sup> bis 17. 8. 16 <sup>00</sup>	25, 29, 35, 39, 45, 49	21, 27, 37, 41, 47, 51, 53	825	15 680

Aus der guten Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung, die in ca. 150 Spektren vorhanden ist und keine prinzipiellen Unterschiede von Jahr zu Jahr aufweist, kann man schließen, daß die Gesetzmäßigkeiten (12), (13) und (18) generell in der Ostsee für den angegebenen Periodenbereich gültig sind. Für die zukünftigen Messungen kann man diesen Bereich daher als bekannt annehmen. Da für den Spektralbereich  $\tau > 7^h$  lediglich eine Meßwertdistanz  $\Delta t = 3,5$  Std. notwendig ist, kann man bei begrenztem Energievorrat für Meß- und Registriereinrichtungen mit ausgelegten Beobachtungsgeräten über erheblich längere Zeiträume messen.

Die Berechnung der Spektren konnte auf der elektronischen Rechenmaschine X 1 des Rechenzentrums der Universität Kiel erfolgen. Dafür sei auch an dieser Stelle gedankt.

#### Literaturverzeichnis

KRAUSS, W. (1966): Methoden und Ergebnisse der Theoretischen Ozeanographie. Bd. II. Interne Wellen. 250 pp. Borntraeger-Verlag, Berlin.